Apéndice E

Diapositivas

A continuación, se presentan las diapositivas explicativas elaboradas como recursos de divulgación académica en el marco del presente proyecto. Cada presentación expone e interpreta los códigos desarrollados en Python para la resolución de todos los casos de estudio por tipología, mediante el Método Matricial de Rigidez y sus modelos equivalentes en OpenSees, sirviendo como soporte visual complementario a las guías explicativas para la construcción de los videos tutoriales.

Armaduras

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Armaduras
Ejercicio 1
Método Matricial de rigidez en Python

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

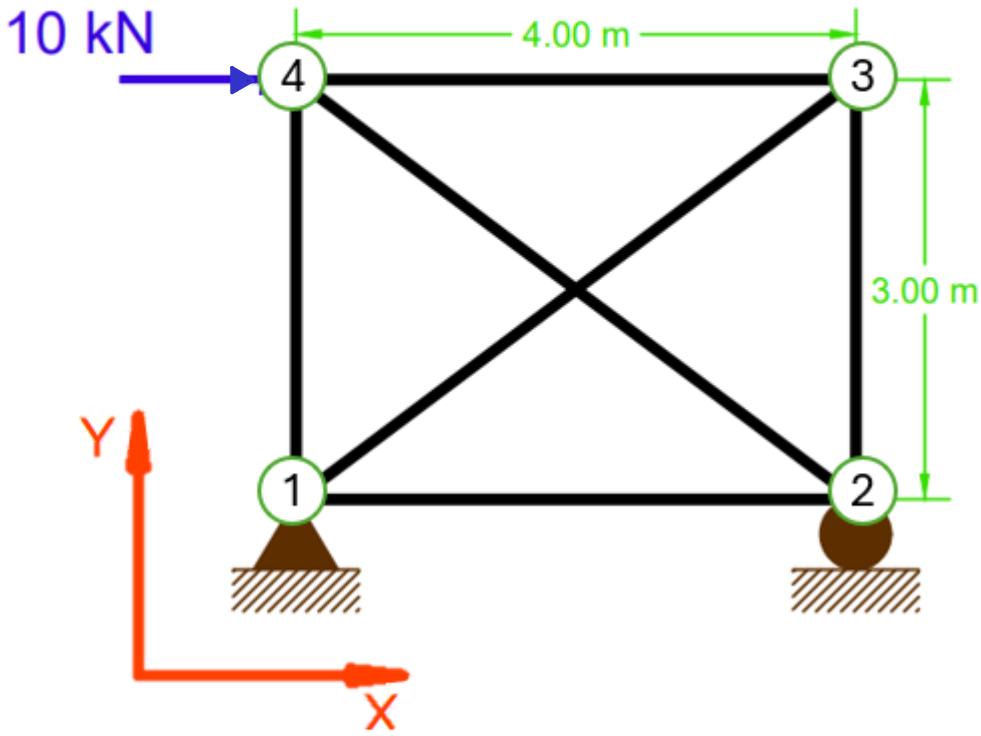
#LaUISqueQueremos

ARMADURAS: EJERCICIO 1

Se tiene una armadura plana dispuesta como un núcleo rectangular de 4.00 m de luz horizontal y 3.00 m de altura. Utilizando el método matricial de rigidez y con base en la información proporcionada, los ejes globales XY indicados y la nomenclatura establecida para nodos, se solicita lo siguiente:

- Determinar los desplazamientos en los nodos 3 y 4.
- Calcular las reacciones en los apoyos ubicados en los nodos 1 y 2.
- Determinar las fuerzas internas en cada barra e indicar si están a tracción o compresión.

Desprecie el peso propio de los elementos. Considere únicamente las cargas indicadas, E=200GPa y At=1500mm²

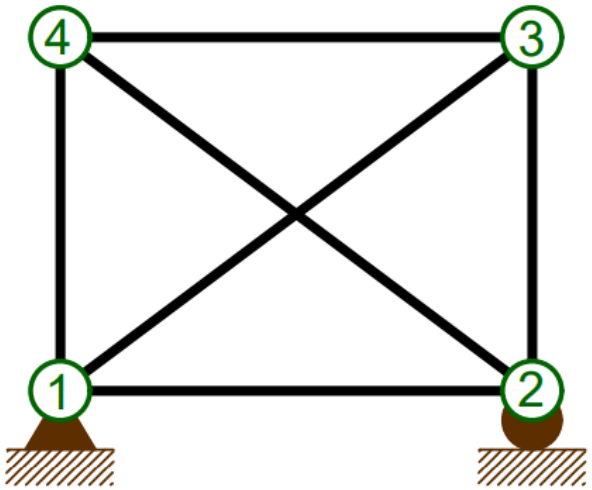


$$E = 200GPa = 2 \times 10^8 \, {}^{kN}/_{m^2}$$

$$A_t = 1500mm^2 = 0.0015m^2$$

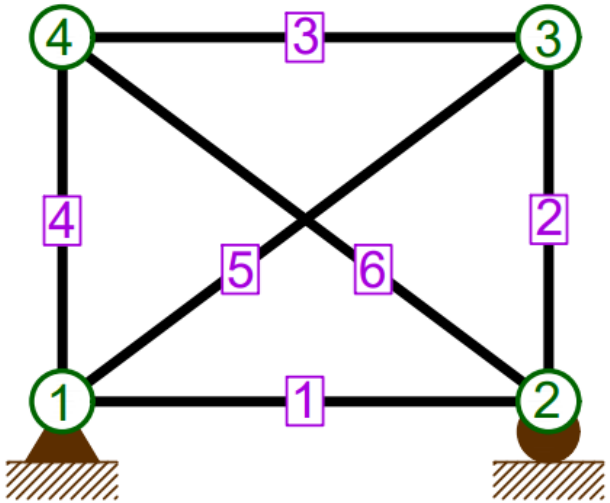
DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

NODOS



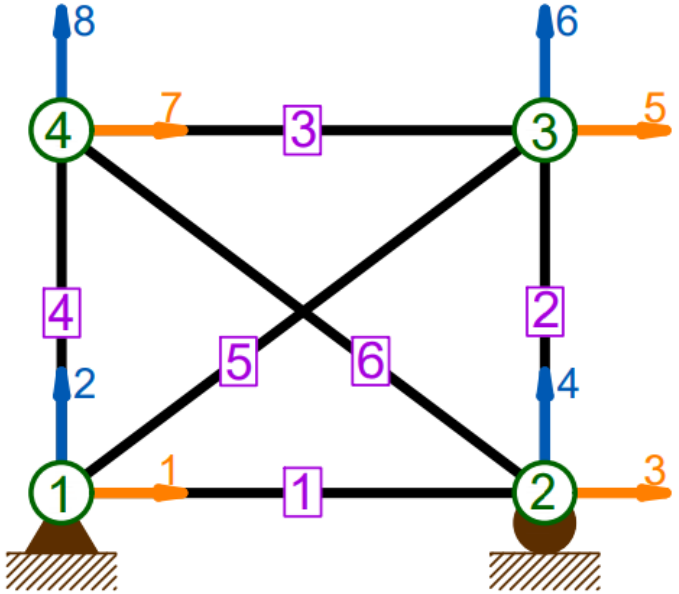
Número de nodos: 4

ELEMENTOS



Número de elementos: 6

GRADOS DE LIBERTAD

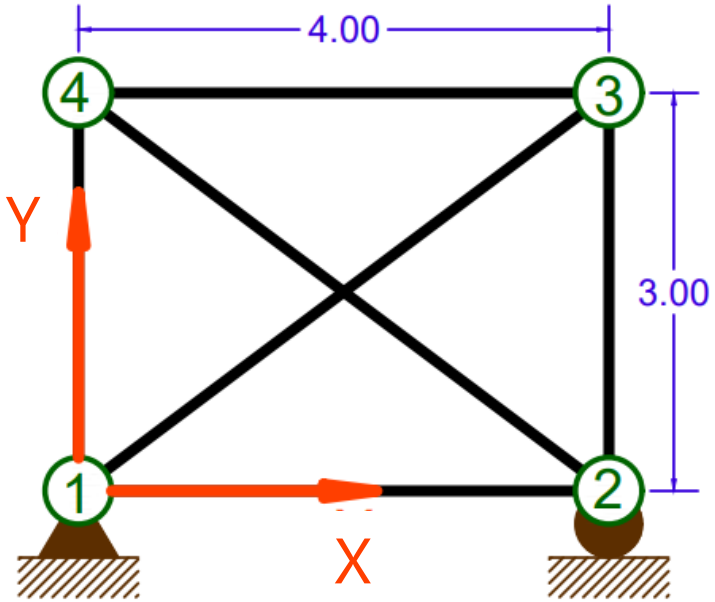


Número de grados de libertad: 8

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

COORDENADAS DE LOS NODOS



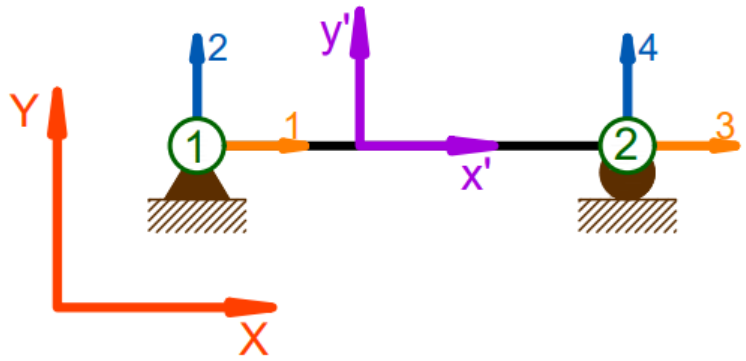
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	4.0	0.0
3	4.0	3.0
4	0.0	3.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0

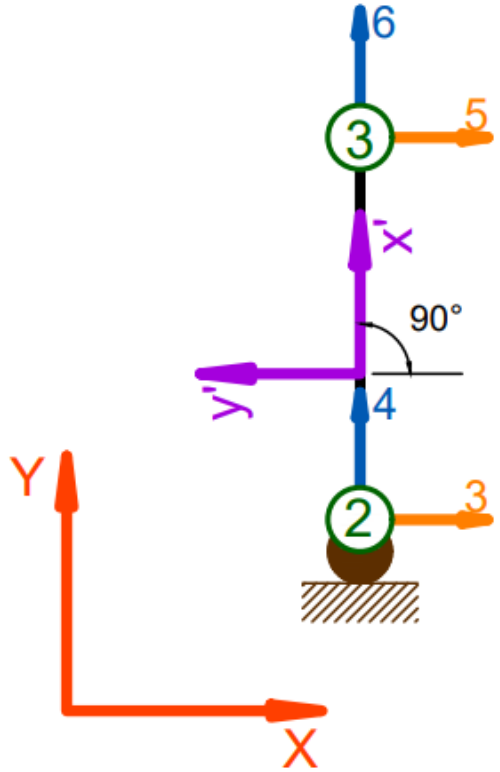


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90

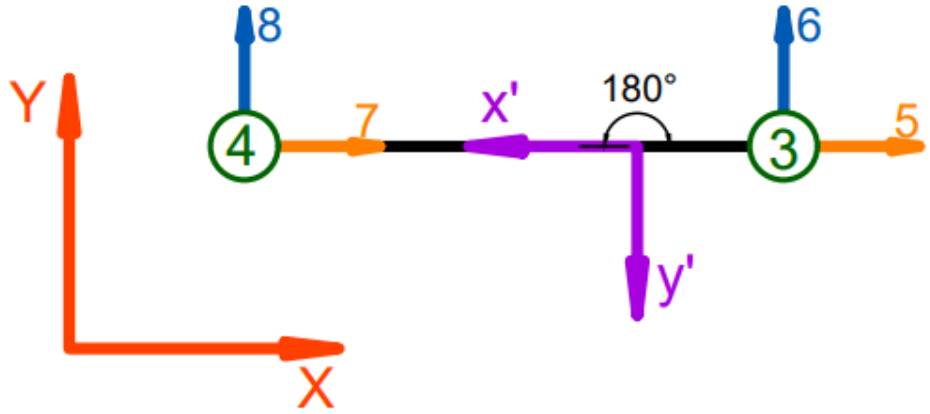


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 3

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180

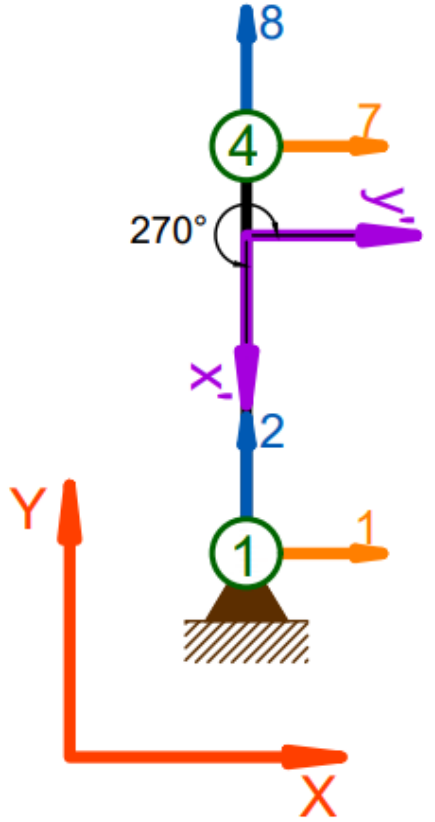


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 4

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180
4	4	1	3.0	270

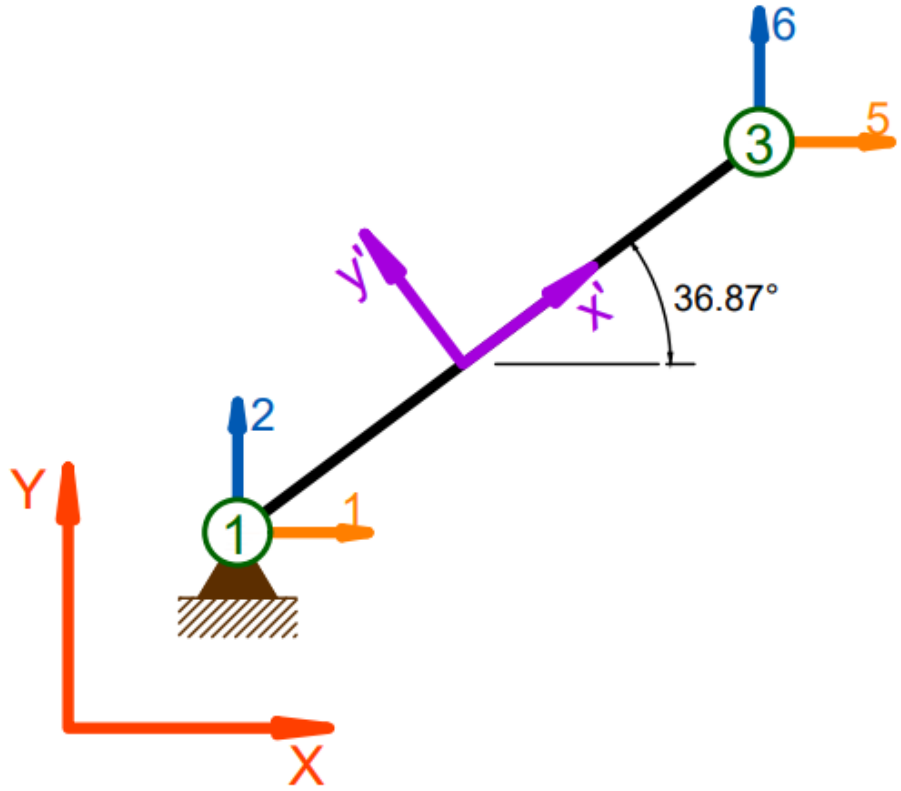


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 5

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180
4	4	1	3.0	270
5	1	3	5.0	36.8699

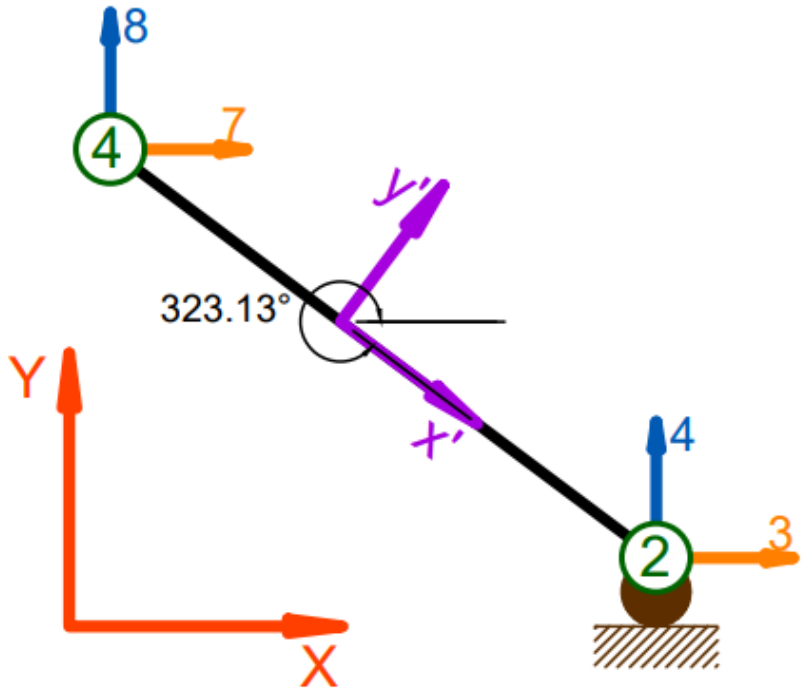


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 6

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180
4	4	1	3.0	270
5	1	3	5.0	36.8699
6	4	2	5.0	323.1301

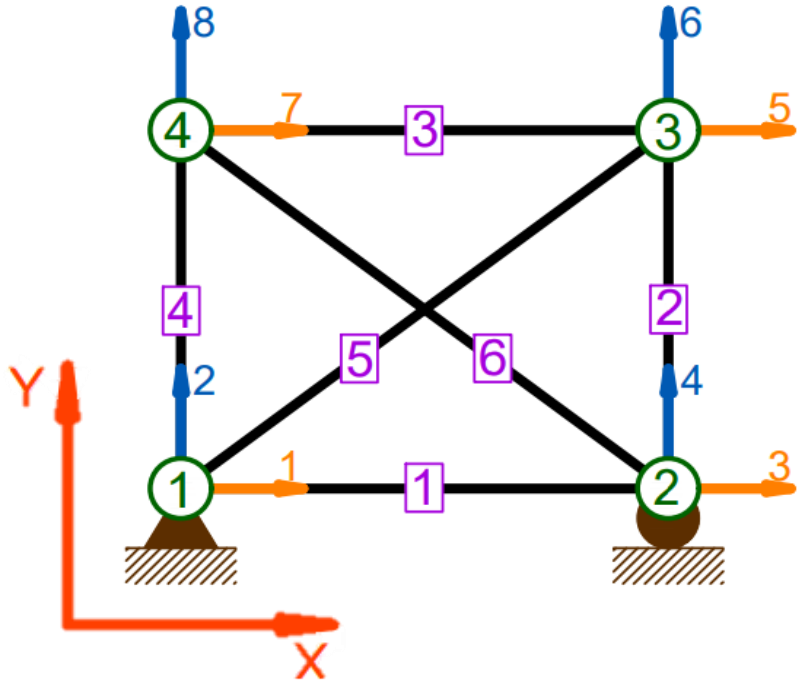


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTOS

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180
4	4	1	3.0	270
5	1	3	5.0	36.8699
6	4	2	5.0	323.1301



#LaUISqueQueremos

ECUACIONES FUNDAMENTALES DEL MÉTODO MATRICIAL

Matriz de rigidez local: $[k]_L = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de transformación: $[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$

Matriz de rigidez global del elemento: $[k]_G = [T]^T[k]_L[T] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\}$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G$

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180
4	4	1	3.0	270
5	1	3	5.0	36.8699
6	4	2	5.0	323.1301

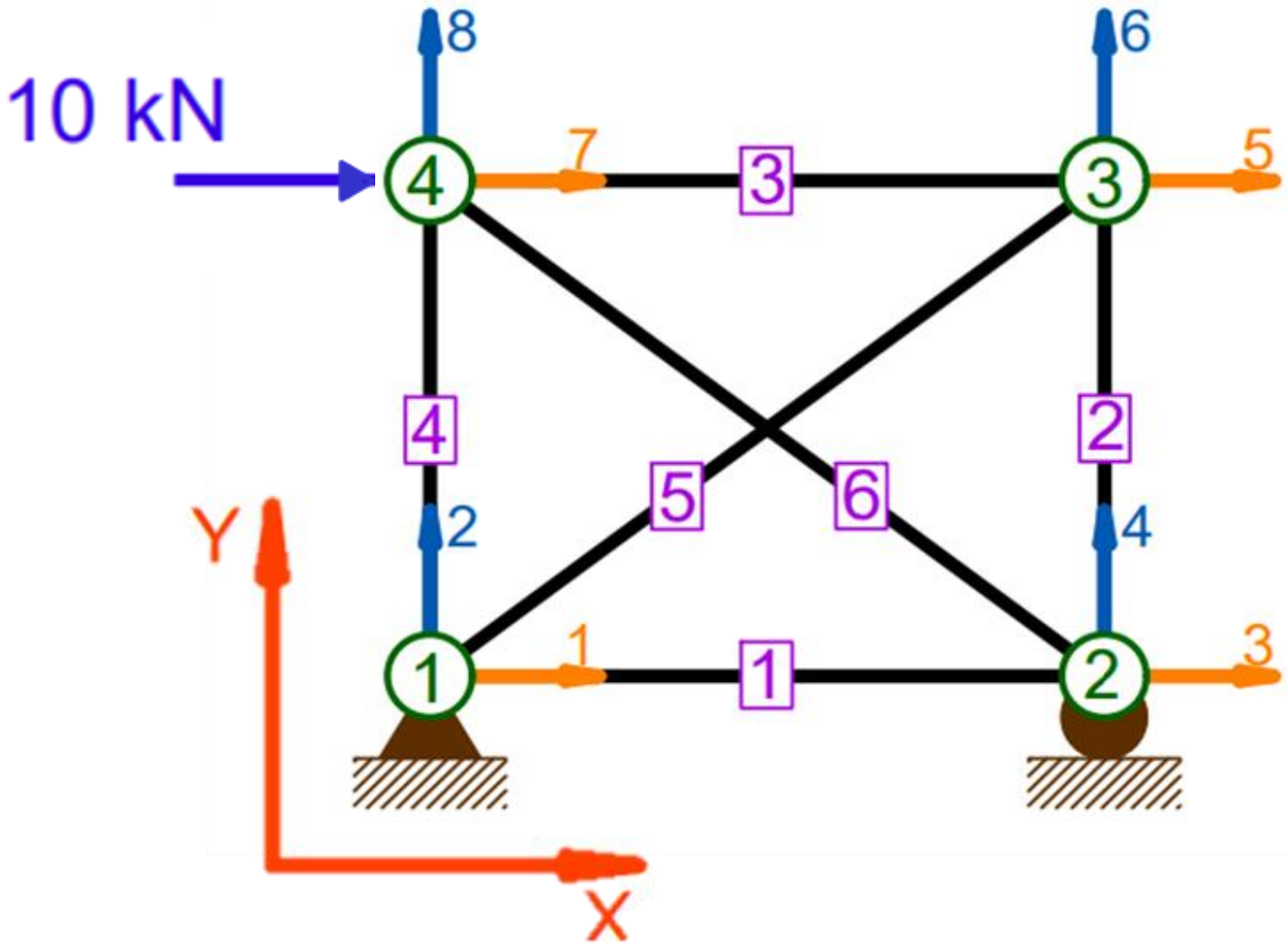
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	4.0	0.0
3	4.0	3.0
4	0.0	3.0

$$E = 200GPa = 2 \times 10^8 \, {}^{kN}/_{m^2}$$

$$A_t = 1500mm^2 = 0.0015m^2$$

#LaUISqueQueremos

CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS



#LaUISqueQueremos

ENSAMBLE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

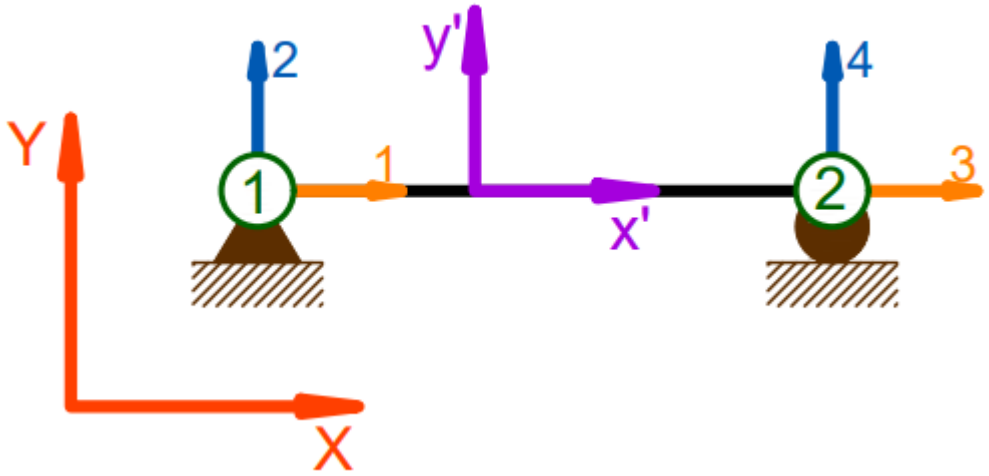
$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

$$[k]_G = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS GLOBALES

ELEMENTO 1



$$A = 0.0015\ m^2$$
$$E = 2 \times 10^8 kN/m^2$$
$$L = 4\ m$$
$$\alpha = 0°$$

$$\frac{AE}{L} = \frac{(0.0015)(2 \times 10^8)}{4} = 75000\ {}^{kN}/_{m}$$

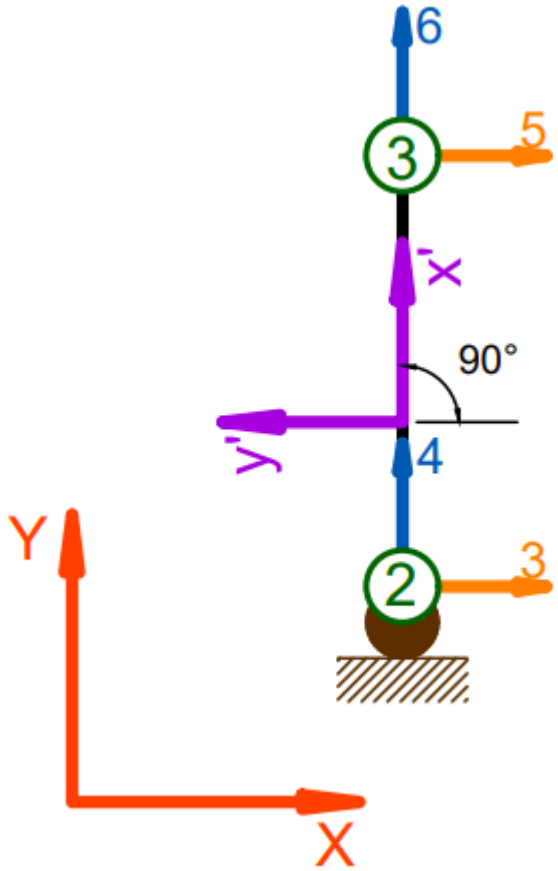
$$\cos(0) = 1$$
$$sen(0) = 0$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \textcircled{1} & & \textcircled{2} & \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \\ \textcircled{2} \\ \\ \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{matrix} \begin{bmatrix} 75000 & 0 & -75000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75000 & 0 & 75000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS GLOBALES

ELEMENTO 2



$$A = 0.0015\ m^2$$
$$E = 2 \times 10^8 kN/m^2$$
$$L = 3\ m$$
$$\alpha = 90°$$

$$\frac{AE}{L} = \frac{(0.0015)(2 \times 10^8)}{3} = 100000\ {}^{kN}/_{m}$$

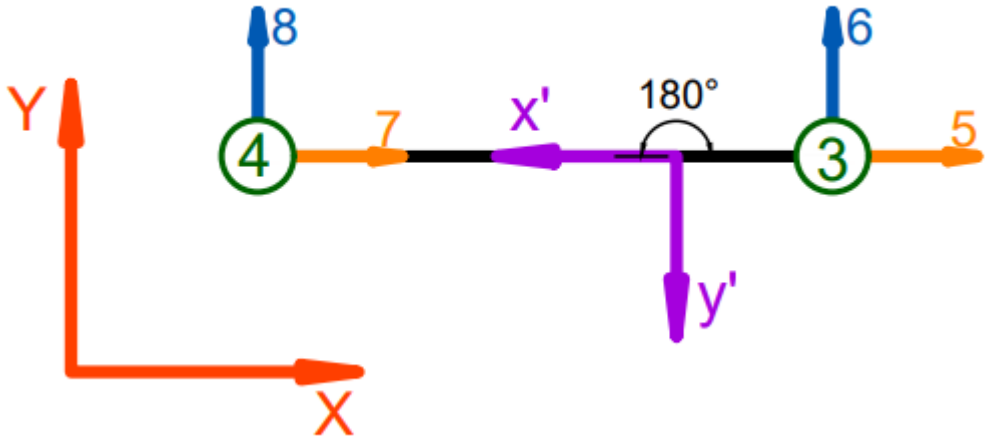
$$\cos(90°) = 0$$
$$sen(90°) = 1$$

$$\begin{array}{c} \\ (2)\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \\ (3)\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad 3 \quad & \quad 4 \quad & \quad 5 \quad & \quad 6 \quad \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100000 & 0 & -100000 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -100000 & 0 & 100000 \end{array}\right] \end{array}$$

#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS GLOBALES

ELEMENTO 3



$$A = 0.0015\ m^2$$
$$E = 2 \times 10^8 kN/m^2$$
$$L = 4\ m$$
$$\alpha = 180°$$

$$\frac{AE}{L} = \frac{(0.0015)(2 \times 10^8)}{4} = 75000\ {}^{kN}/_{m}$$

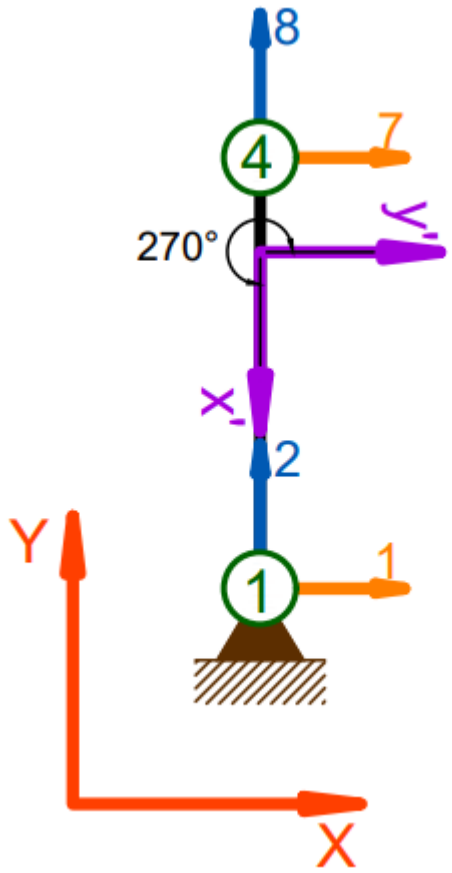
$$\cos(180) = -1$$
$$sen(180) = 0$$

		③		④	
		5	6	7	8
③	5	75000	0	−75000	0
	6	0	0	0	0
④	7	−75000	0	75000	0
	8	0	0	0	0

#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS GLOBALES

ELEMENTO 4



$$A = 0.0015\ m^2$$
$$E = 2 \times 10^8 kN/m^2$$
$$L = 3\ m$$
$$\alpha = 270°$$

$$\frac{AE}{L} = \frac{(0.0015)(2 \times 10^8)}{3} = 100000\ {}^{kN}/_{m}$$

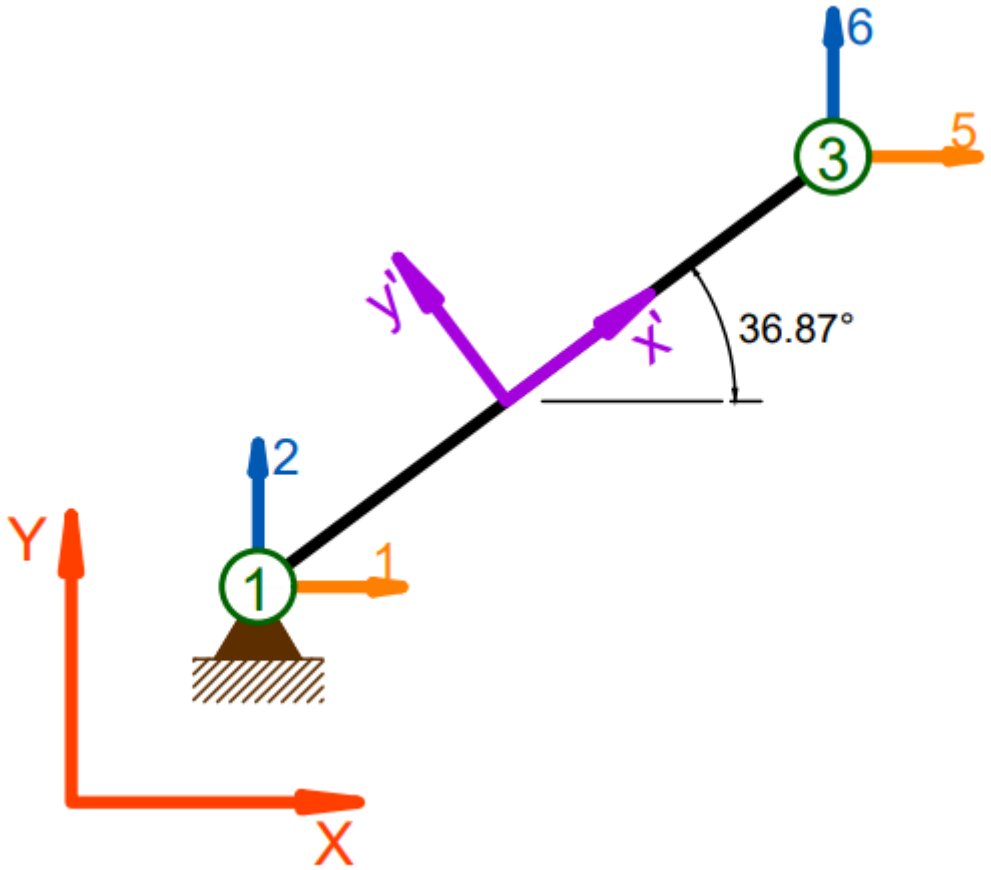
$$\cos(270°) = 0$$
$$sen(270°) = 1$$

		④		①	
		7	8	1	2
④	7	0	0	0	0
	8	0	100000	0	−100000
①	1	0	0	0	0
	2	0	−100000	0	100000

#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS GLOBALES

ELEMENTO 5



$$A = 0.0015\ m^2$$
$$E = 2 \times 10^8 kN/m^2$$
$$L = 5\ m$$
$$\alpha = 90°$$

$$\frac{AE}{L} = \frac{(0.0015)(2 \times 10^8)}{5} = 60000\ {}^{kN}/_{m}$$

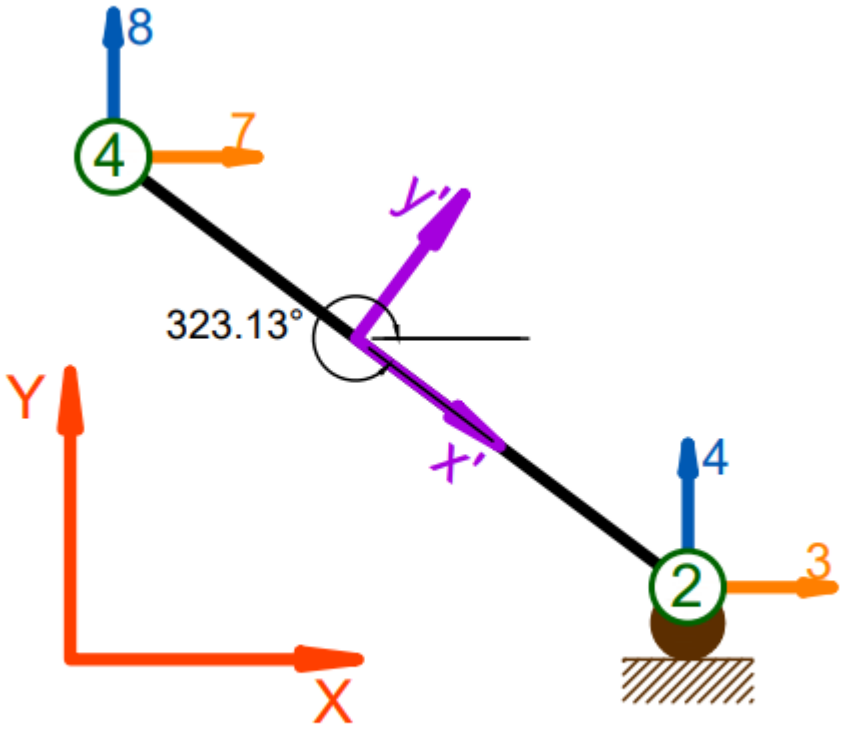
$$\cos(36.87°) = 0.80$$
$$sen(36.87°) = 0.60$$

$$\begin{array}{c} \\ \textcircled{1} \\ \textcircled{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textcircled{1} & & & \textcircled{3} \\ 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 38400 & 28800 & -38400 & -28800 \\ 28800 & 21600 & -28800 & -21600 \\ -38400 & -28800 & 38400 & 28800 \\ -28800 & -21600 & 28800 & 21600 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ EN COORDENADAS GLOBALES

ELEMENTO 6



$$A = 0.0015\ m^2$$
$$E = 2 \times 10^8 kN/m^2$$
$$L = 5\ m$$
$$\alpha = 90°$$

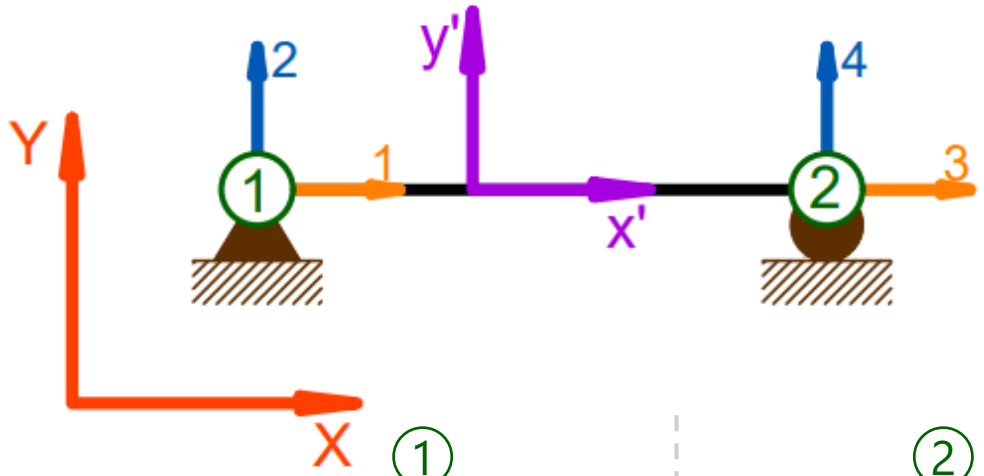
$$\frac{AE}{L} = \frac{(0.0015)(2 \times 10^8)}{5} = 60000\ {}^{kN}/_{m}$$

$$\cos(323.13°) = 0.80$$
$$sen(323.13°) = -0.60$$

$$\begin{array}{c} \\ \textcircled{4} \\ 7 \\ 8 \\ \textcircled{2} \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textcircled{4} & \\ 7 & 8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 38400 & -28800 & -38400 & 28800 \\ -28800 & 21600 & 28800 & -21600 \\ \hline -38400 & 28800 & 38400 & -28800 \\ 28800 & -21600 & -28800 & 21600 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textcircled{2} & \\ 3 & 4 \end{array} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

#LaUISqueQueremos

ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA:
ELEMENTO 1

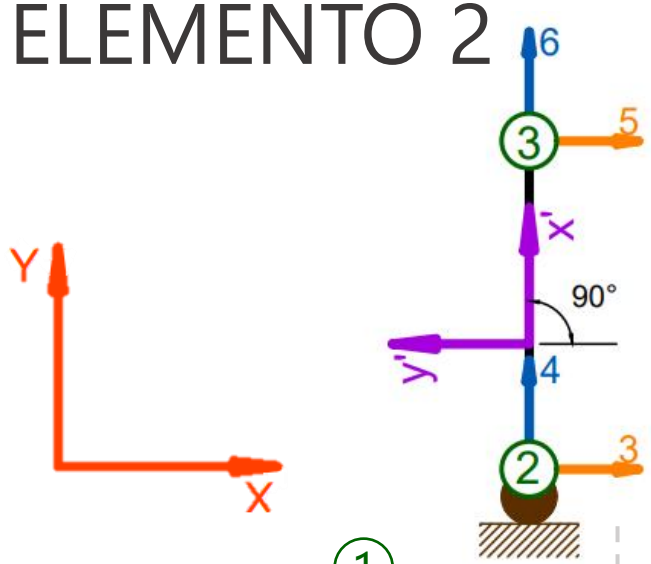


		①		②	
		1	2	3	4
①	1	75000	0	−75000	0
	2	0	0	0	0
②	3	−75000	0	75000	0
	4	0	0	0	0

		①		②		③		④	
		1	2	3	4	5	6	7	8
①	1	75000	0	−75000	0				
	2	0	0	0	0				
②	3	−75000	0	75000	0				
	4	0	0	0	0				
③	5								
	6								
④	7								
	8								

#LaUISqueQueremos

ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA:
ELEMENTO 2

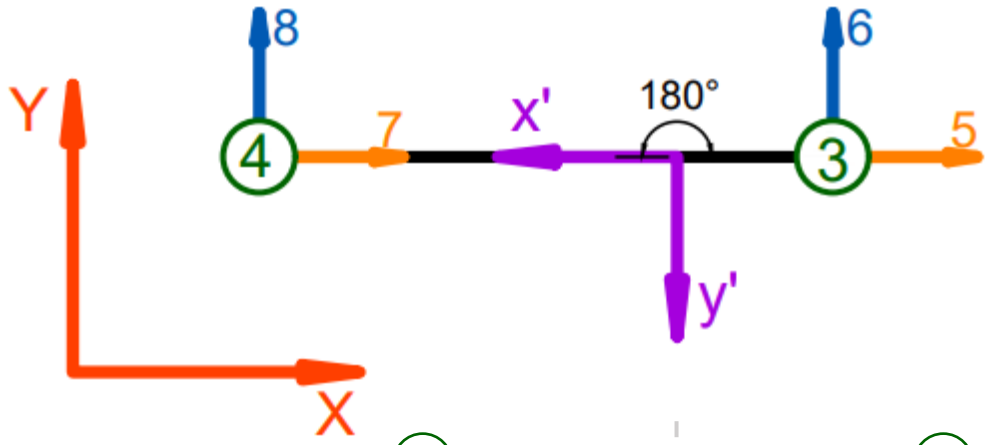


		② 3	4	③ 5	6
②	3	0	0	0	0
	4	0	100000	0	−100000
③	5	0	0	0	0
	6	0	−100000	0	100000

		① 1	2	② 3	4	③ 5	6	④ 7	8
①	1	75000	0	−75000	0				
	2	0	0	0	0				
②	3	−75000	0	75000	0	0	0		
	4	0	0	0	100000	0	−100000		
③	5			0	0	0	0		
	6			0	−100000	0	100000		
④	7								
	8								

#LaUISqueQueremos

ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA:
ELEMENTO 3

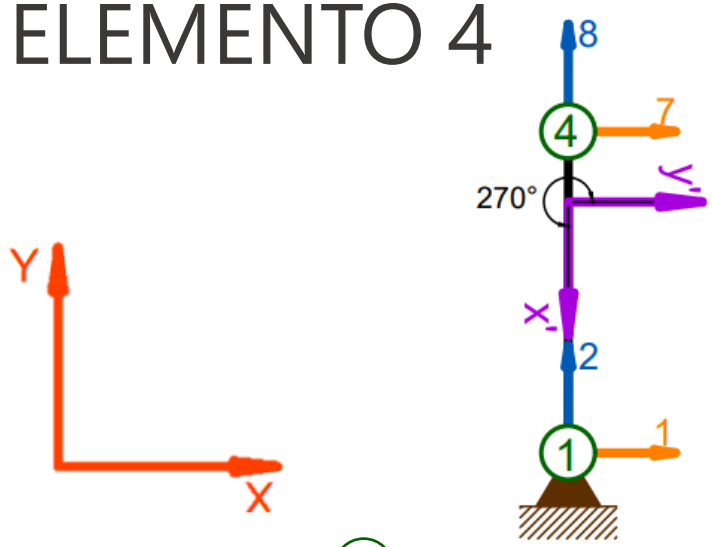


		③ 3	4	④ 5	6
③	3	75000	0	−75000	0
	4	0	0	0	0
④	5	−75000	0	75000	0
	6	0	0	0	0

		① 1	2	② 3	4	③ 5	6	④ 7	8
①	1	75000	0	−75000	0				
	2	0	0	0	0				
②	3	−75000	0	75000	0	0	0		
	4	0	0	0	100000	0	−100000		
③	5			0	0	75000	0	−75000	0
	6			0	−100000	0	100000	0	0
④	7					−75000	0	75000	0
	8					0	0	0	0

#LaUISqueQueremos

ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA:
ELEMENTO 4

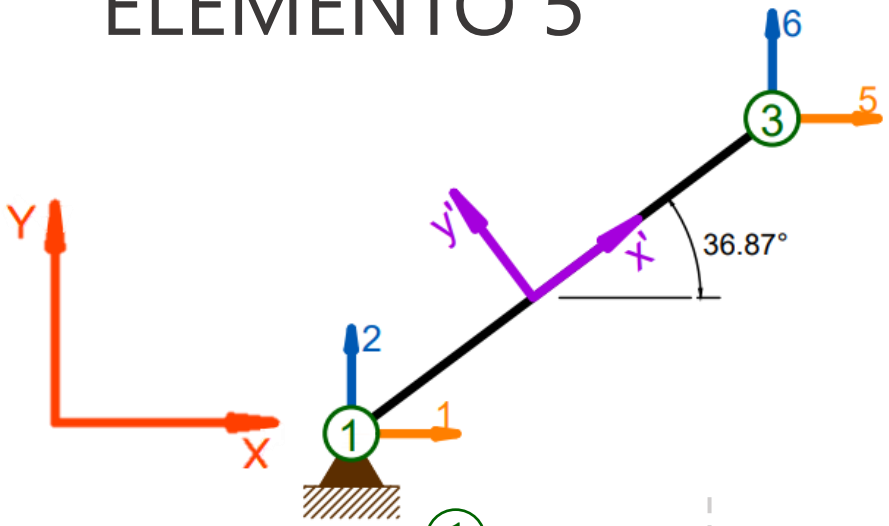


		④ 7	④ 8	① 1	① 2
④	7	0	0	0	0
	8	0	100000	0	−100000
①	1	0	0	0	0
	2	0	−100000	0	100000

		① 1	① 2	② 3	② 4	③ 5	③ 6	④ 7	④ 8
①	1	75000	0	−75000	0			0	0
	2	0	−100000	0	0			0	−100000
②	3	−75000	0	75000	0	0	0		
	4	0	0	0	100000	0	−100000		
③	5			0	0	75000	0	−75000	0
	6			0	−100000	0	100000	0	0
④	7	0	0			−75000	0	75000	0
	8	0	−100000			0	0	0	100000

#LaUISqueQueremos

ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA:
ELEMENTO 5



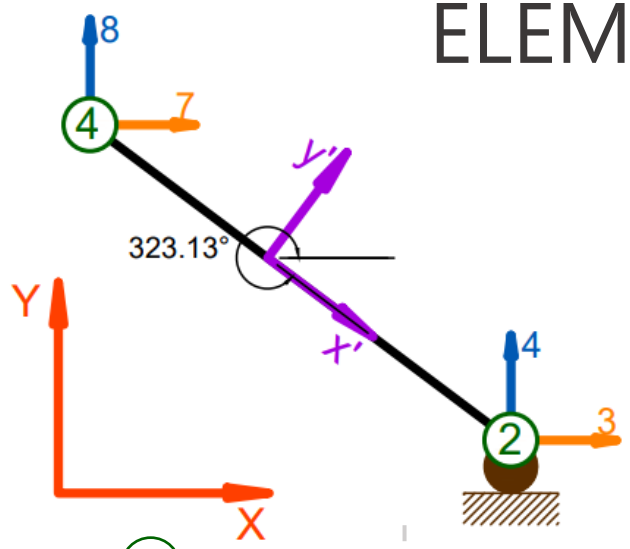
		① 1	① 2	③ 5	③ 6
①	1	38400	28800	− 38400	− 28800
	2	28800	21600	−28800	−21600
③	5	−38400	−28800	38400	28800
	6	−28800	−21600	28800	21600

		① 1	① 2	② 3	② 4	③ 5	③ 6	④ 7	④ 8
①	1	113400	28800	−75000	0	− 38400	− 28800	0	0
	2	28800	121600	0	0	−28800	−21600	0	−100000
②	3	−75000	0	75000	0	0	0		
	4	0	0	0	100000	0	−100000		
③	5	−38400	28800	0	0	113400	28800	−75000	0
	6	−28800	−21600	0	−100000	28800	121600	0	0
④	7	0	0			−75000	0	75000	0
	8	0	−100000			0	0	0	100000

#LaUISqueQueremos

ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA:

ELEMENTO 6

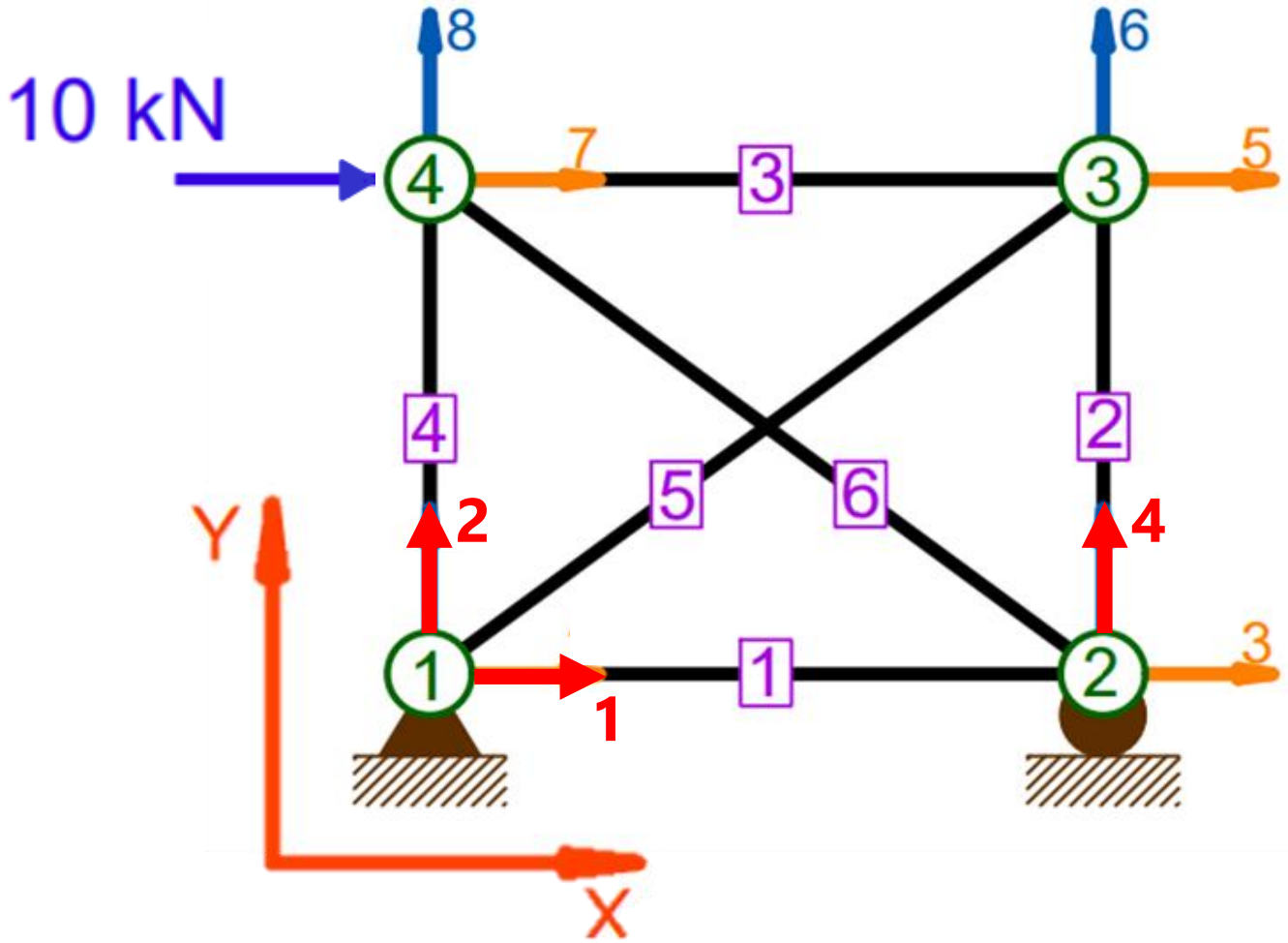


		④		②	
		7	8	3	4
④	7	38400	−28800	− 38400	28800
	8	−28800	21600	28800	−21600
②	3	−38400	28800	38400	−28800
	4	28800	−21600	−28800	21600

		①		②		③		④	
		1	2	3	4	5	6	7	8
①	1	113400	28800	−75000	0	− 38400	− 28800	0	0
	2	28800	121600	0	0	−28800	−21600	0	−100000
②	3	−75000	0	113400	28800	0	0	−38400	28800
	4	0	0	28800	121600	0	−100000	28800	−21600
③	5	−38400	28800	0	0	113400	28800	−75000	0
	6	−28800	−21600	0	−100000	28800	121600	0	0
④	7	0	0	− 38400	28800	−75000	0	113400	−28800
	8	0	−100000	28800	−21600	0	0	−28800	121600

#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CONTORNO



- Grados de libertad restringidos

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Reacciones: $\{R\} = [K]_G\{U\}_G$

Desplazamientos: $\{U\}_G = [K]_G{}^{-1}\{F_{ext}\}$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G$

Matriz de rigidez local: $[k]_L = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de transformación: $[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 1

Desplazamientos:

Nodo 3: $Ux = 1.58 \times 10^{-4}$ m, $Uy = -3.75 \times 10^{-5}$ m

Nodo 4: $Ux = 2.25 \times 10^{-4}$ m, $Uy = 3.75 \times 10^{-5}$ m

Reacciones:

Nodo 1: $Rx = -10.00$ kN, $Ry = -7.50$ kN

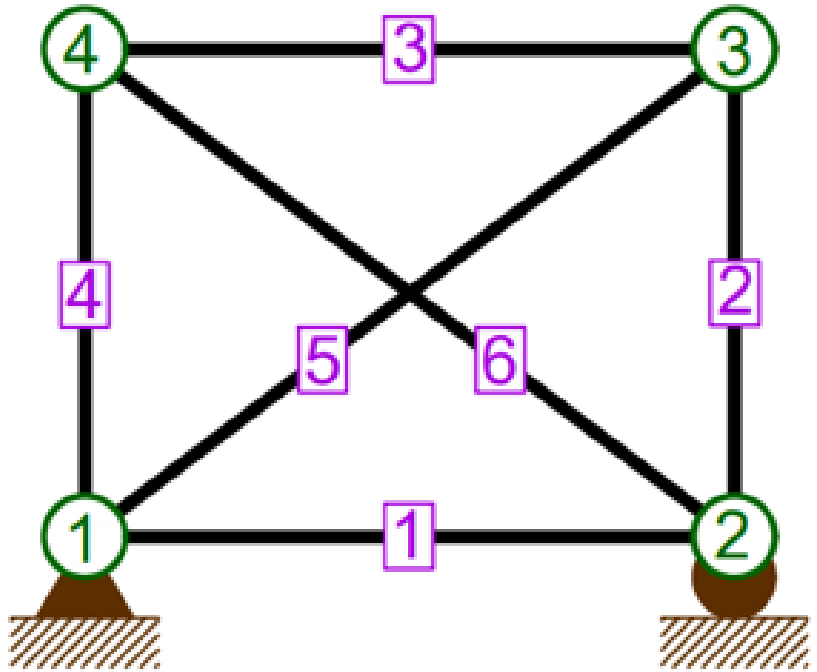
Nodo 2: $Ry = 7.50$ kN

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 1

Fuerzas internas:

E1: 5.00 kN - Tracción
E2: -3.75 kN - Compresión
E3: -5.00 kN - Compresión
E4: 3.75 kN - Tracción
E5: 6.25 kN - Tracción
E6: -6.25 kN - Compresión



#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

UIS 1948 2025

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Armaduras
Ejercicio 1
Modelo OpenSees

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

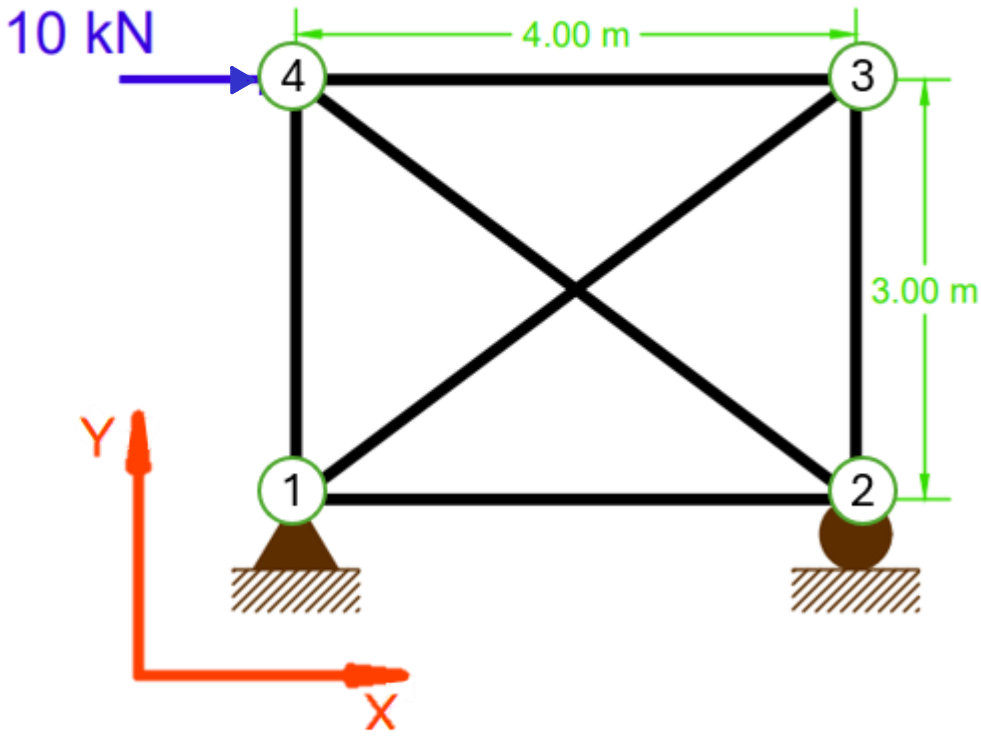
#LaUISqueQueremos

ARMADURAS: EJERCICIO 1

Se tiene una armadura plana dispuesta como un núcleo rectangular de 4.00 m de luz horizontal y 3.00 m de altura. Utilizando el método matricial de rigidez y con base en la información proporcionada, los ejes globales XY indicados y la nomenclatura establecida para nodos, se solicita lo siguiente:

- Determinar los desplazamientos en los nodos 3 y 4.
- Calcular las reacciones en los apoyos ubicados en los nodos 1 y 2.
- Determinar las fuerzas internas en cada barra e indicar si están a tracción o compresión.

Desprecie el peso propio de los elementos. Considere únicamente las cargas indicadas, E=200GPa y At=1500mm²

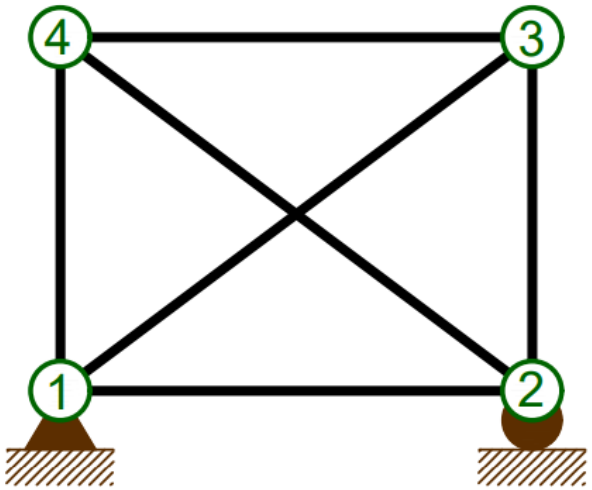


$$E = 200GPa = 2 \times 10^8 \, {}^{kN}/_{m^2}$$

$$A_t = 1500mm^2 = 0.0015m^2$$

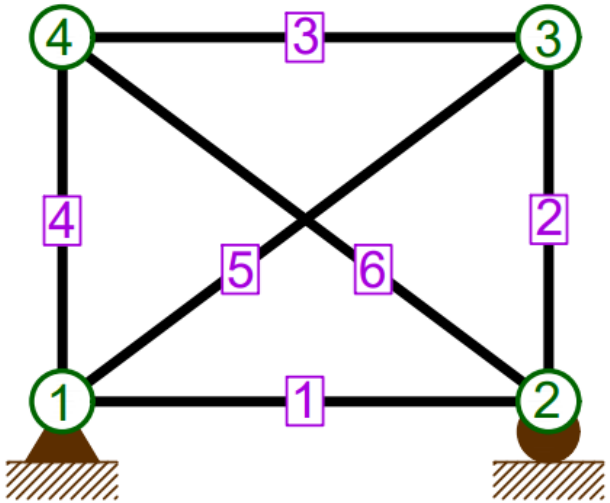
DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

NODOS



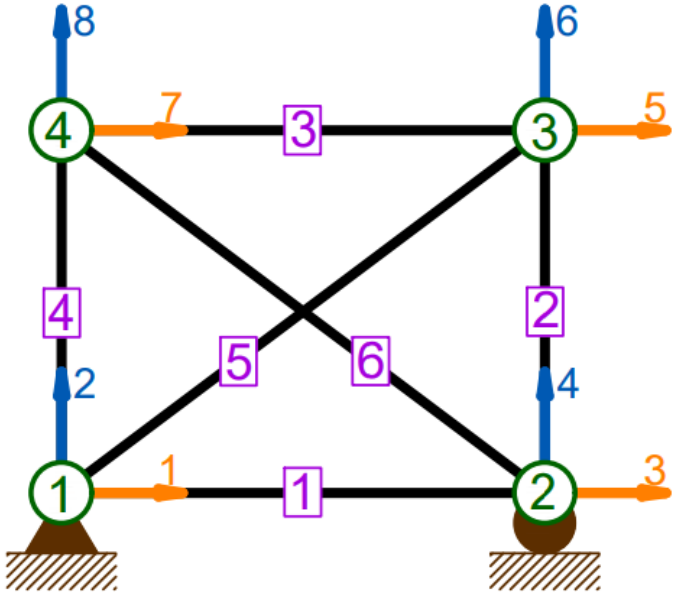
Número de nodos: 4

ELEMENTOS



Número de elementos: 6

GRADOS DE LIBERTAD

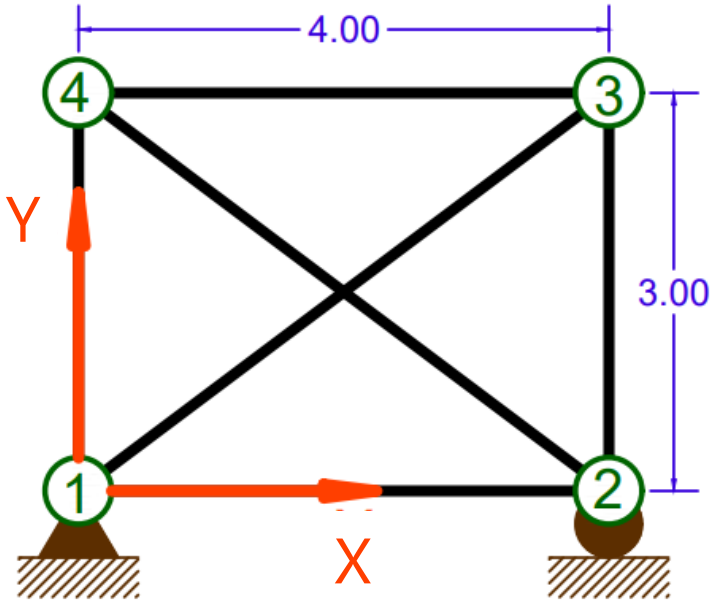


Número de grados de libertad: 8

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

COORDENADAS DE LOS NODOS



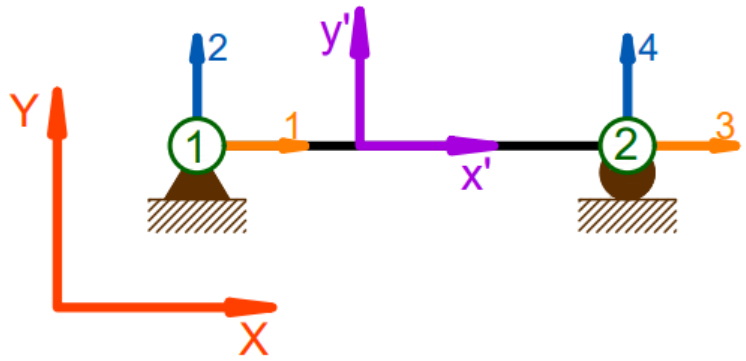
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	4.0	0.0
3	4.0	3.0
4	0.0	3.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0

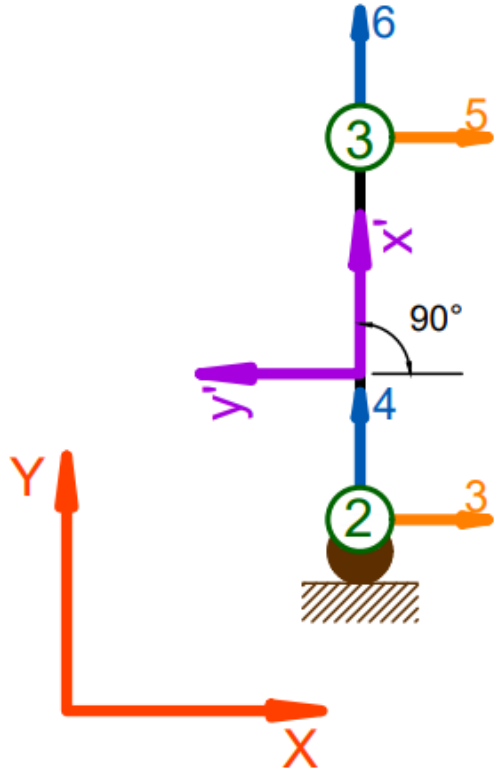


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90

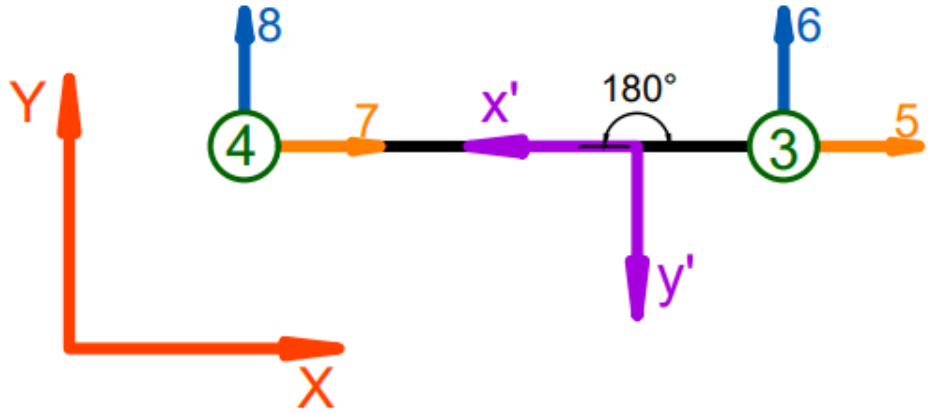


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 3

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180

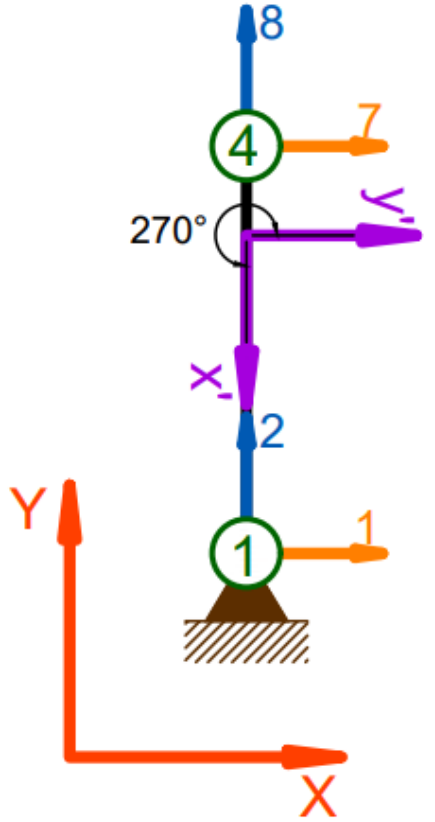


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 4

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180
4	4	1	3.0	270

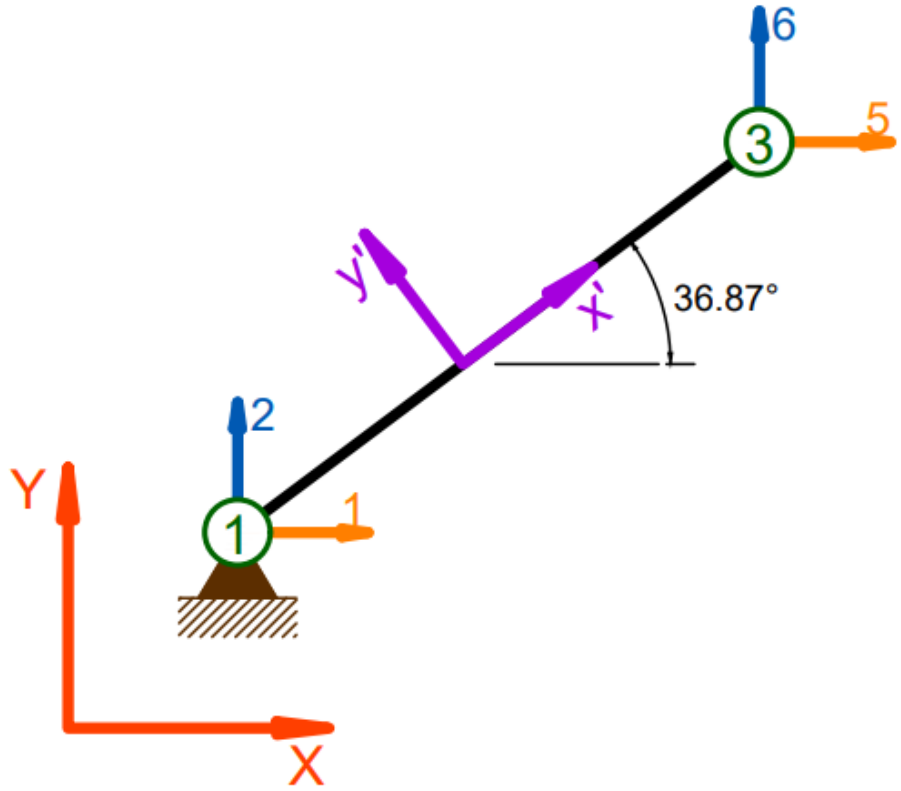


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 5

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180
4	4	1	3.0	270
5	1	3	5.0	36.8699

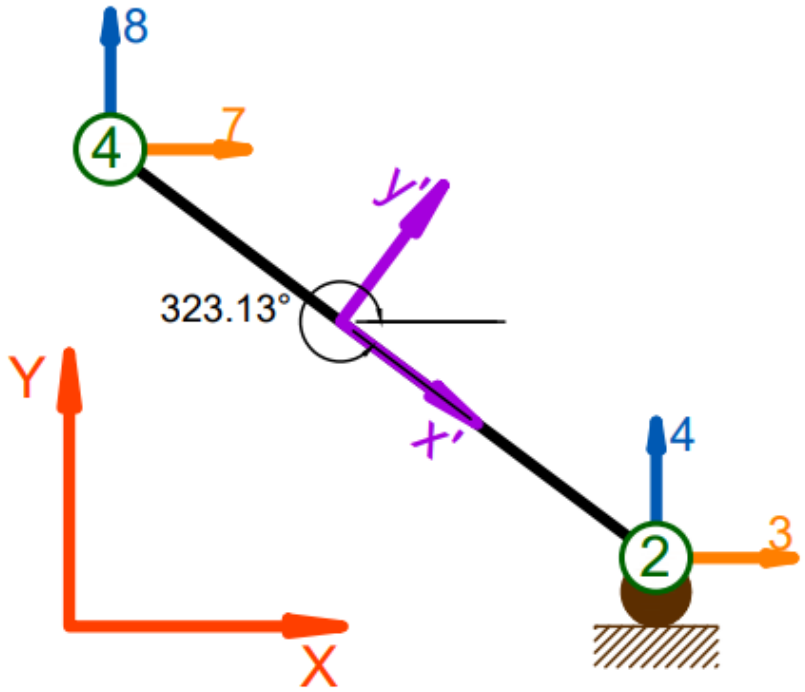


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 6

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180
4	4	1	3.0	270
5	1	3	5.0	36.8699
6	4	2	5.0	323.1301

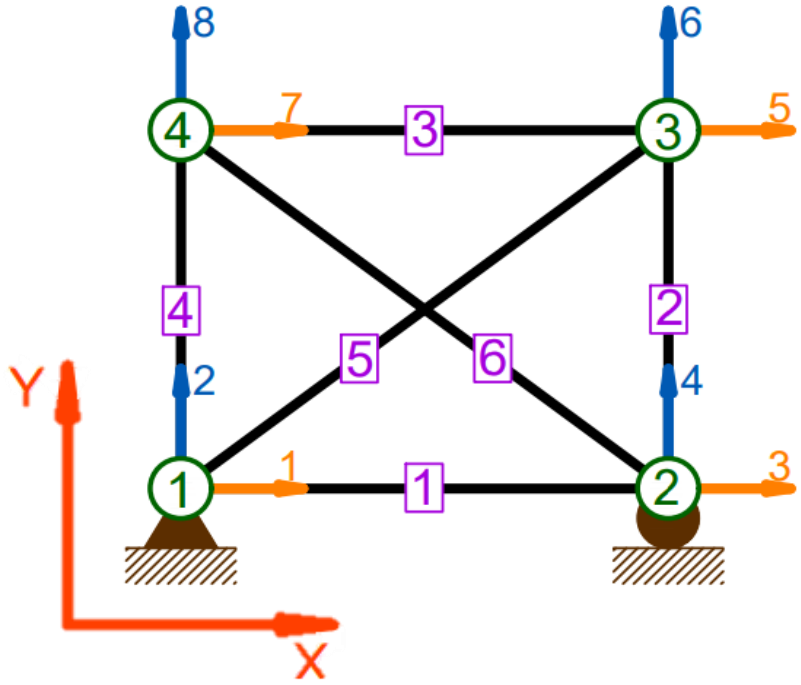


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTOS

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180
4	4	1	3.0	270
5	1	3	5.0	36.8699
6	4	2	5.0	323.1301



#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	3.0	90
3	3	4	4.0	180
4	4	1	3.0	270
5	1	3	5.0	36.8699
6	4	2	5.0	323.1301

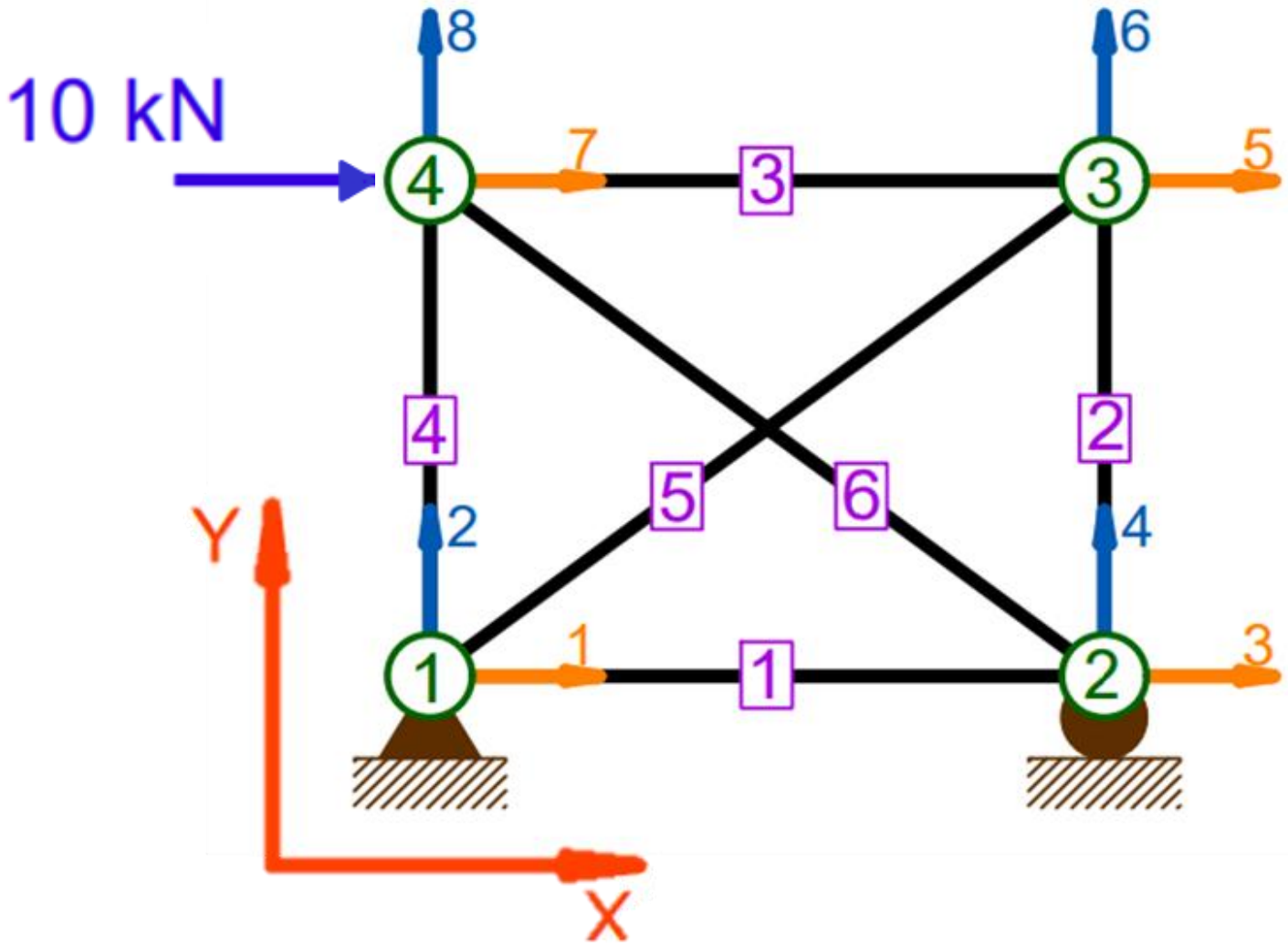
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	4.0	0.0
3	4.0	3.0
4	0.0	3.0

$$E = 200GPa = 2 \times 10^8 \, {}^{kN}/_{m^2}$$

$$A_t = 1500mm^2 = 0.0015m^2$$

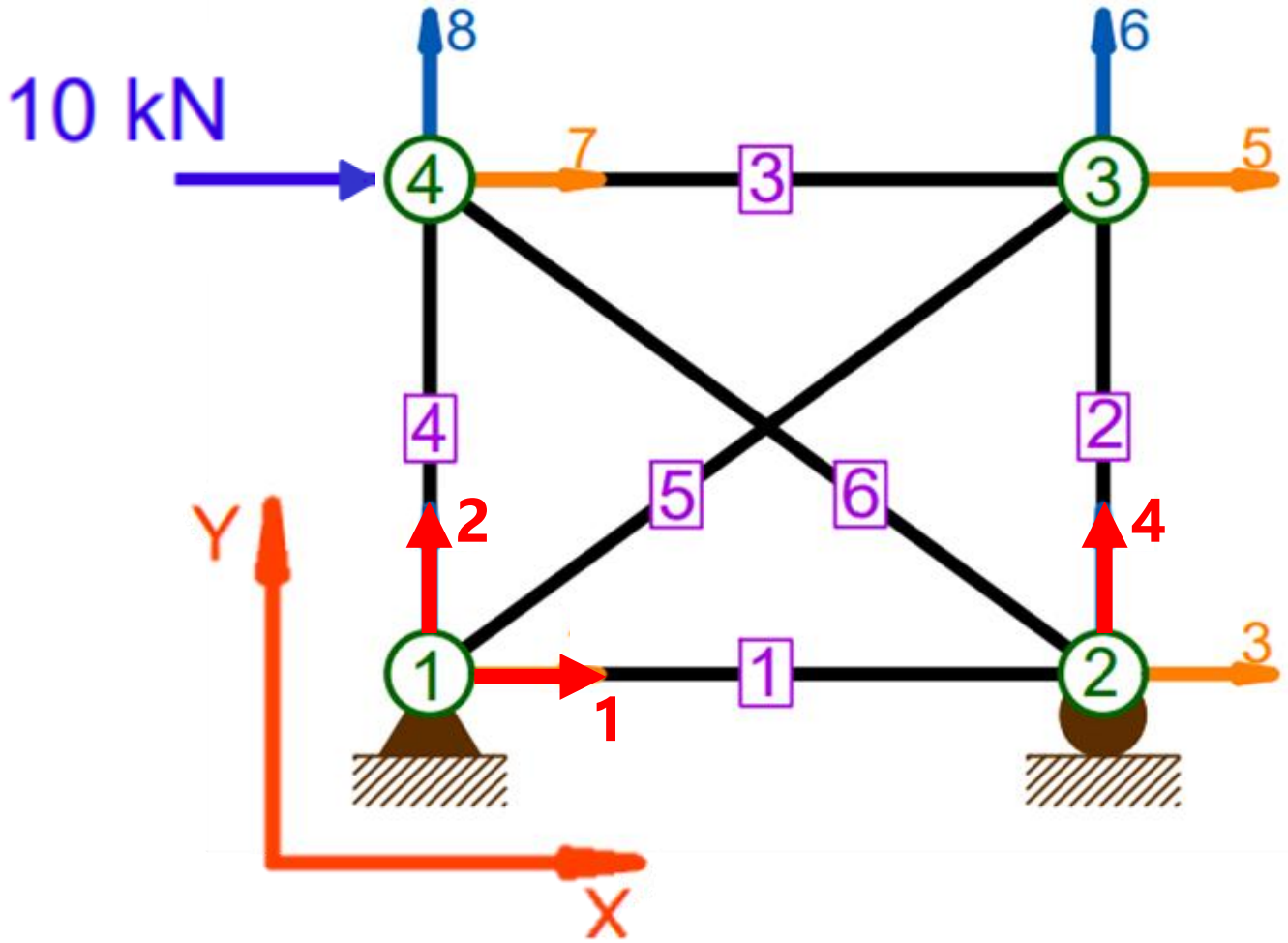
#LaUISqueQueremos

CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS



#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CONTORNO



- Grados de libertad restringidos

SOLUCIÓN EJERCICIO 1

Desplazamientos:

Nodo 3: $Ux = 1.58 \times 10^{-4}$ m, $Uy = -3.75 \times 10^{-5}$ m

Nodo 4: $Ux = 2.25 \times 10^{-4}$ m, $Uy = 3.75 \times 10^{-5}$ m

Reacciones:

Nodo 1: $Rx = -10.00$ kN, $Ry = -7.50$ kN

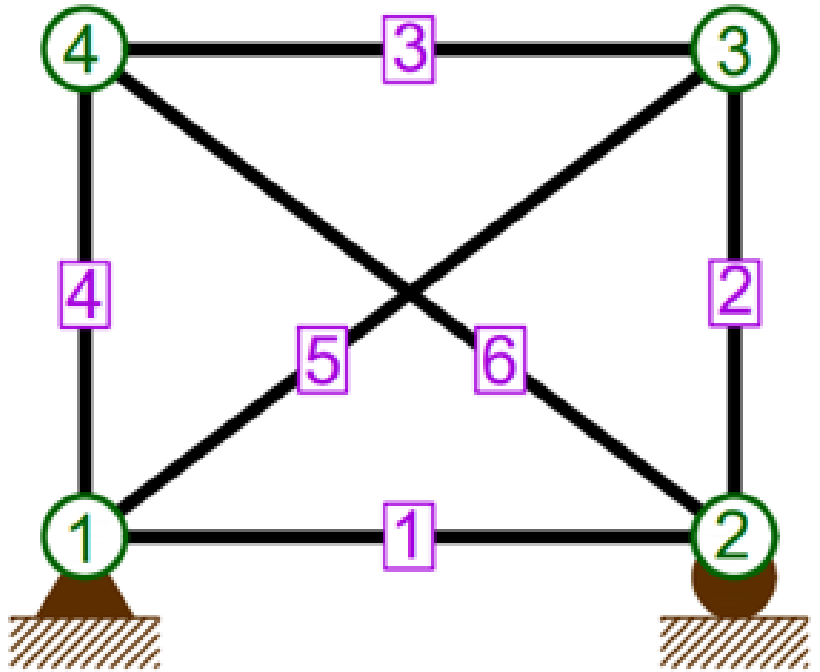
Nodo 2: $Ry = 7.50$ kN

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 1

Fuerzas internas:

E1: -5.00 kN - Tracción
E2: 3.75 kN - Compresión
E3: 5.00 kN - Compresión
E4: -3.75 kN - Tracción
E5: -6.25 kN - Tracción
E6: 6.25 kN - Compresión



#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

UIS 1948 2025

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Armaduras
Ejercicio 2
Método Matricial de rigidez en Python

#LaUISqueQueremos

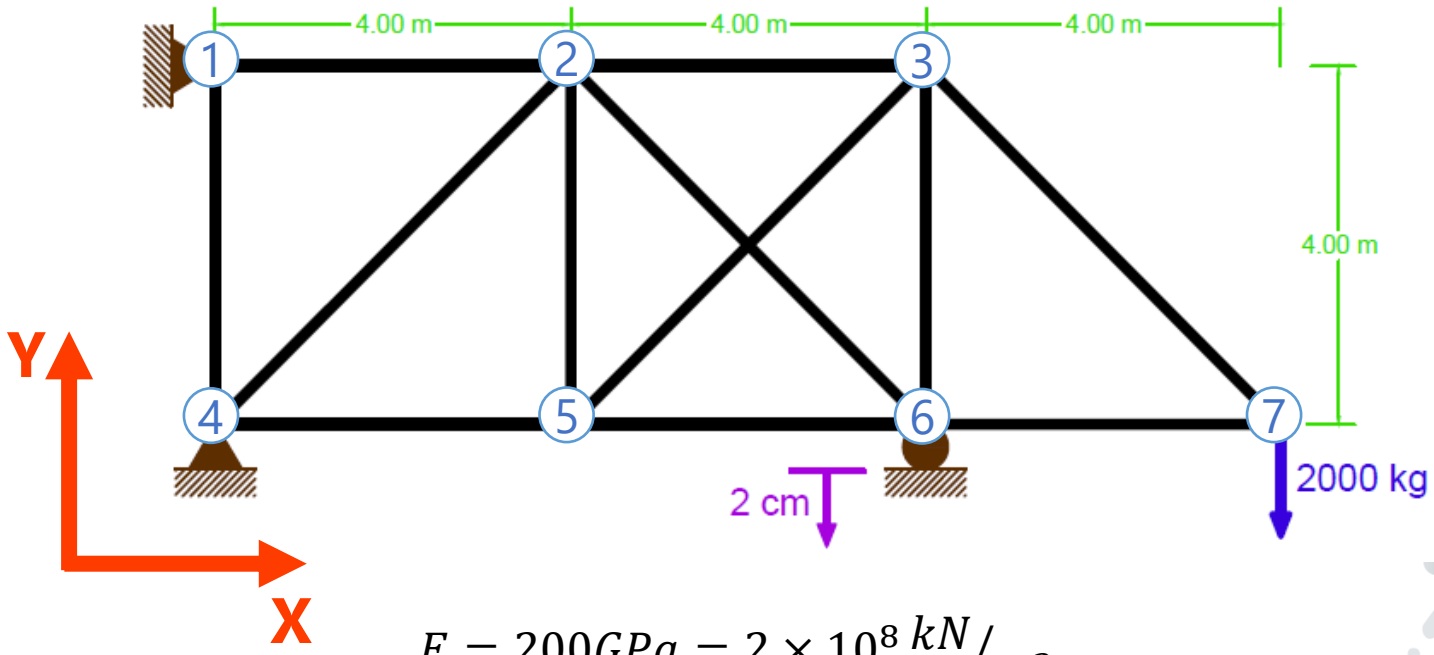
Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

ARMADURAS: EJERCICIO 2

Se tiene una armadura plana dispuesta como se muestra en la figura, conformada por barras articuladas en sus extremos y organizada en módulos de 4.00 m de luz horizontal y 4.00 m de altura. Utilizando el método matricial de rigidez y con base en la información proporcionada, los ejes globales XY indicados y la nomenclatura establecida para los nodos, se solicita lo siguiente:

- Determinar el desplazamiento del nodo 7 de la estructura, considerando que el apoyo móvil del nodo 6 presenta un descenso vertical impuesto de 2 cm.
- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Determinar las fuerzas internas en cada barra, indicando si se encuentran a tracción o compresión.

Desprecie el peso propio de los elementos y considere únicamente las cargas y desplazamientos impuestos indicados. Todas las barras poseen un módulo de elasticidad E=200GPa y un área transversal constante At=1500mm².



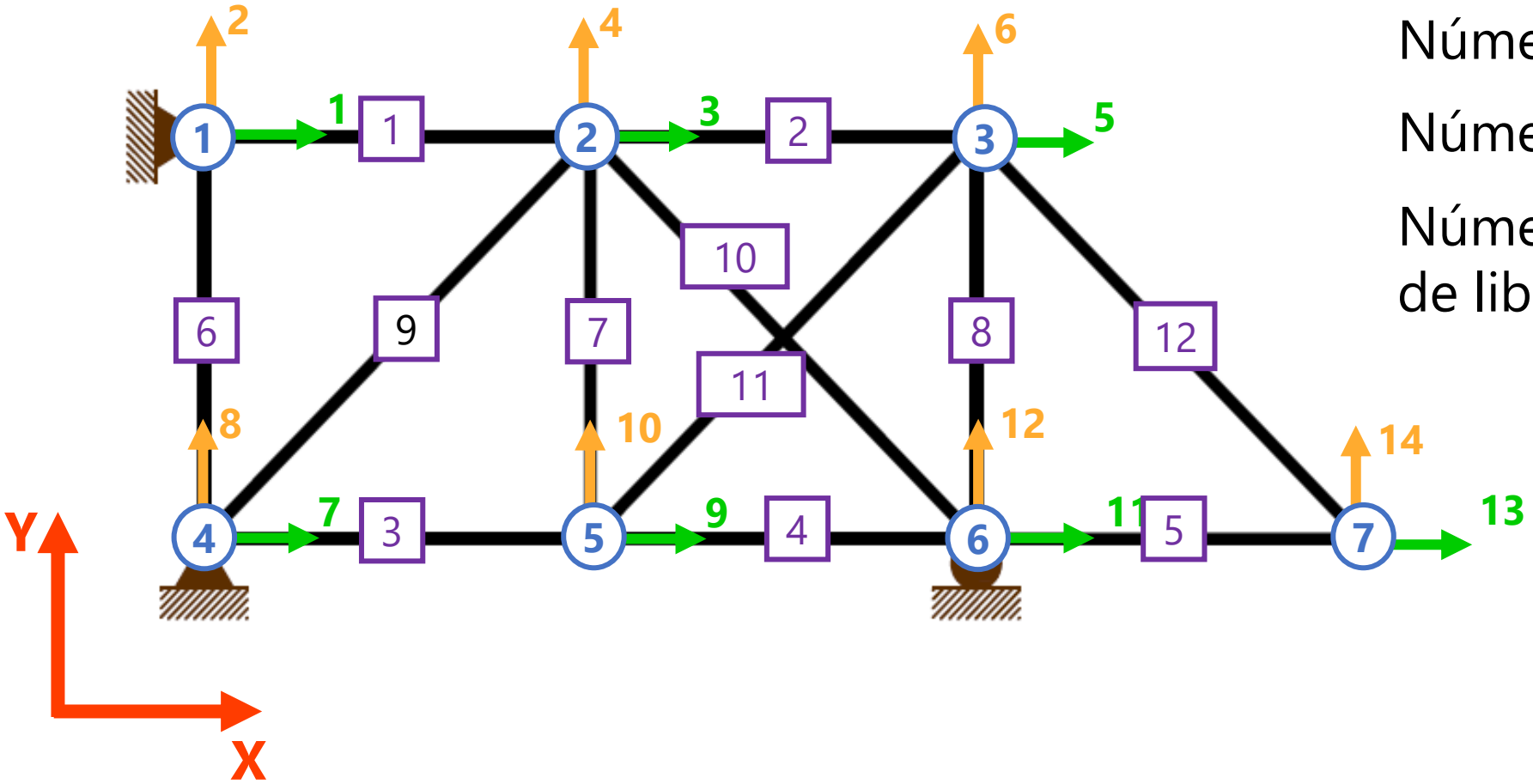
$$E = 200GPa = 2 \times 10^8 \, {}^{kN}/_{m^2}$$

$$A_t = 1500mm^2 = 0.0015m^2$$

$$P = -2000 \, kg = -19.613 \, kN$$

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA



Número de nodo: 7

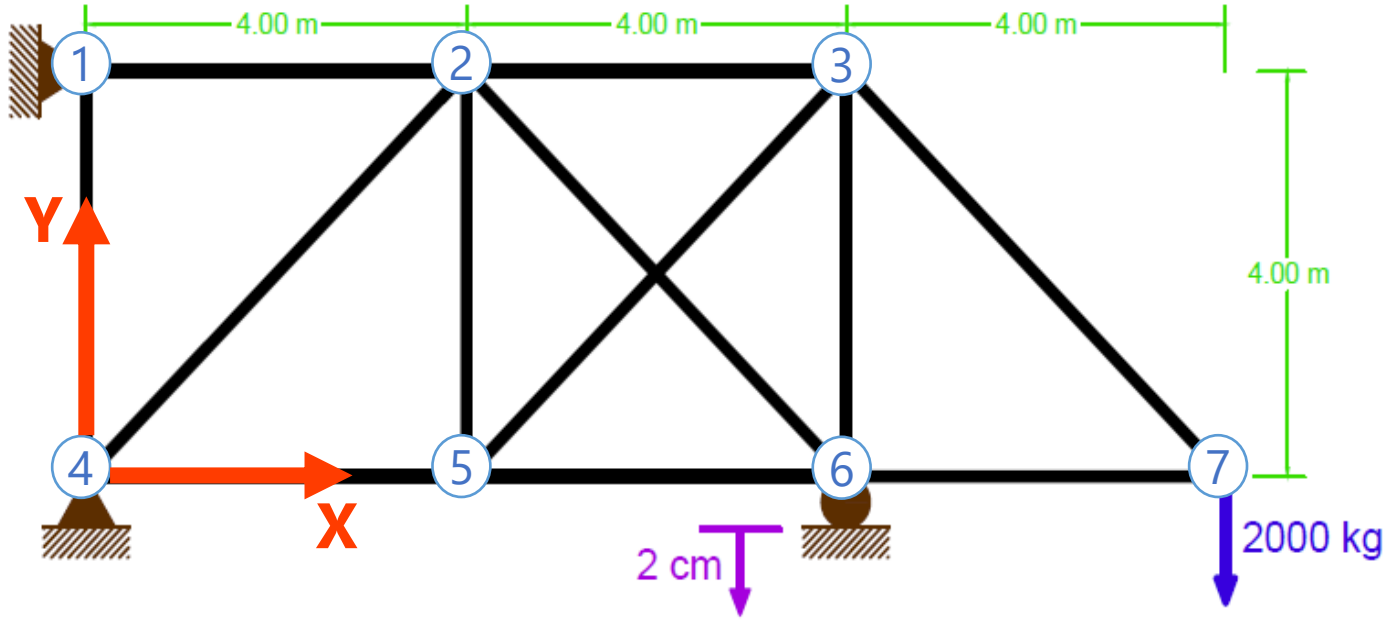
Número de elementos: 12

Número de grados de libertad: 14

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

COORDENADAS DE LOS NODOS

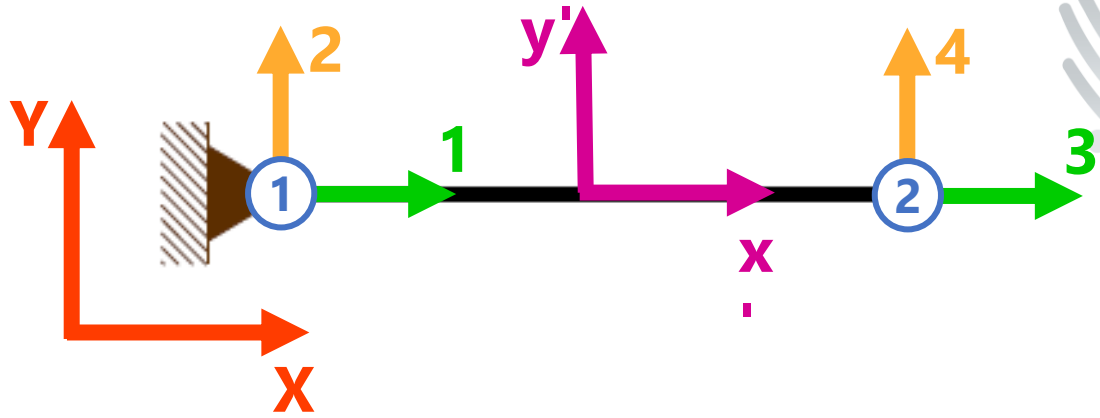


NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	4.0
2	4.0	4.0
3	8.0	4.0
4	0.0	0.0
5	4.0	0.0
6	8.0	0.0
7	12.0	0.0

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0

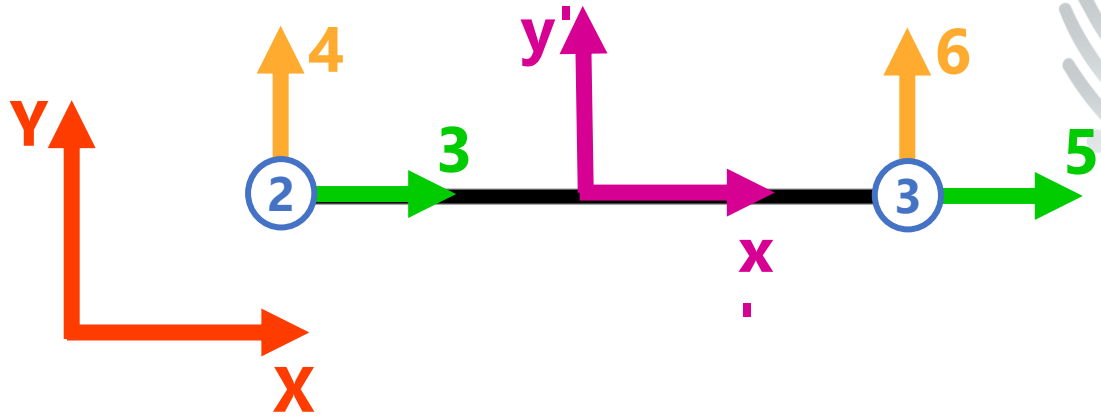


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0

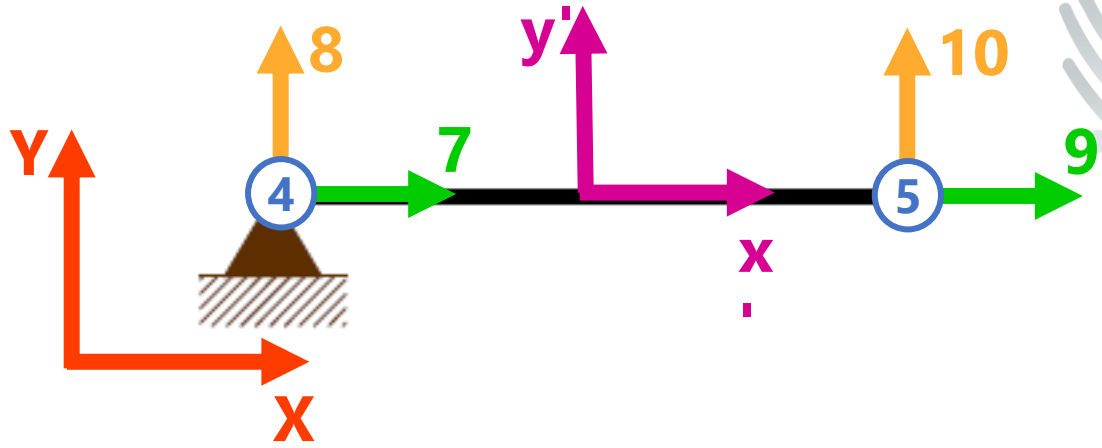


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 3

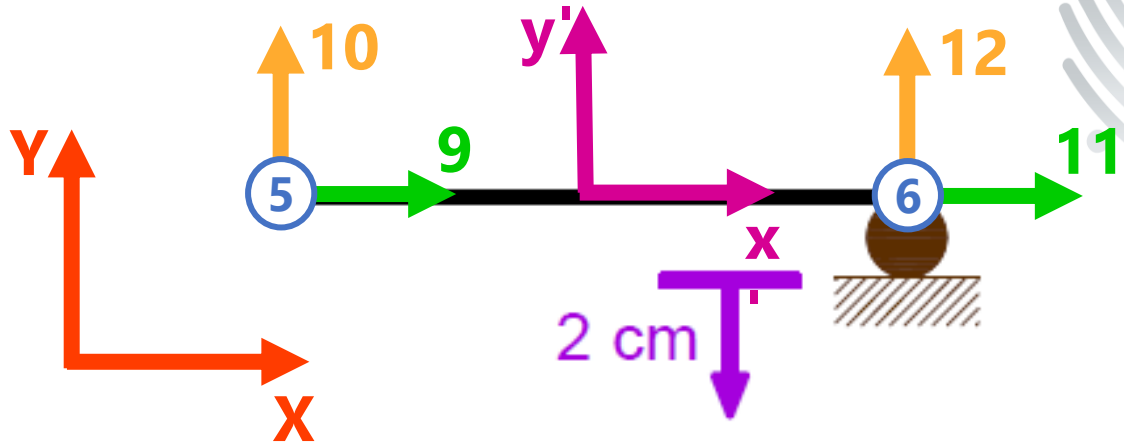
ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0



DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 4

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0

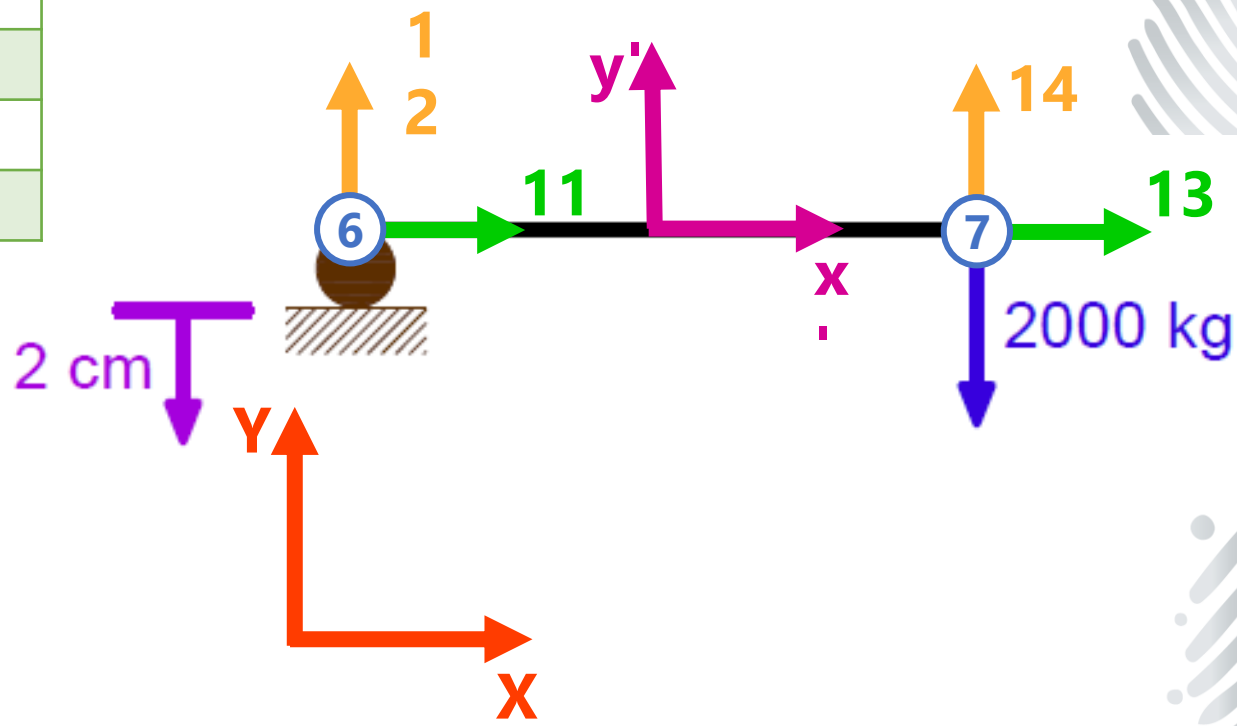


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 5

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0

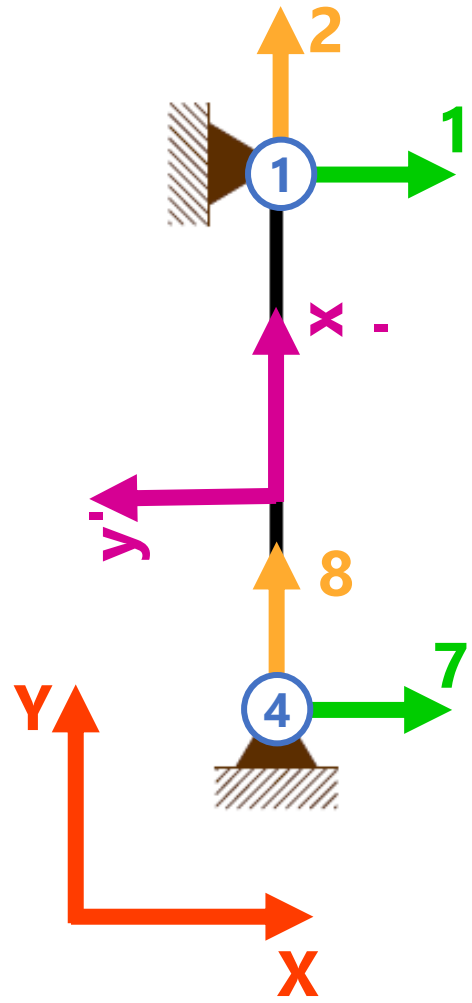


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 6

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90

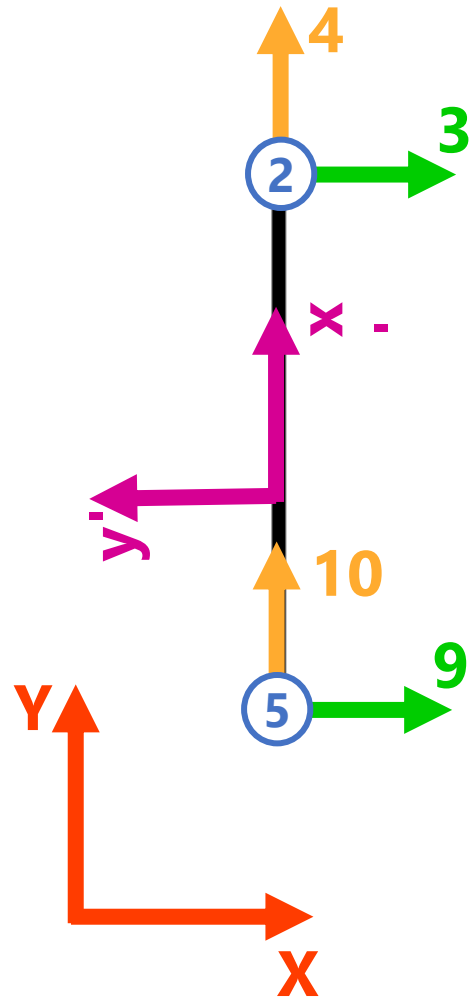


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 7

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90

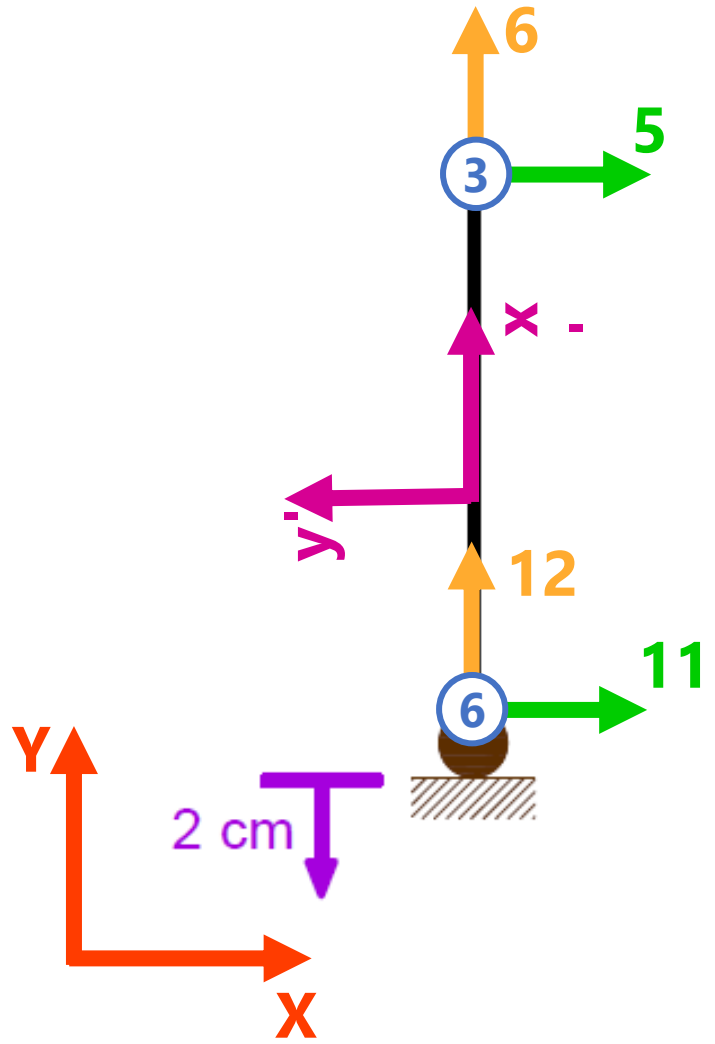


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 8

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90

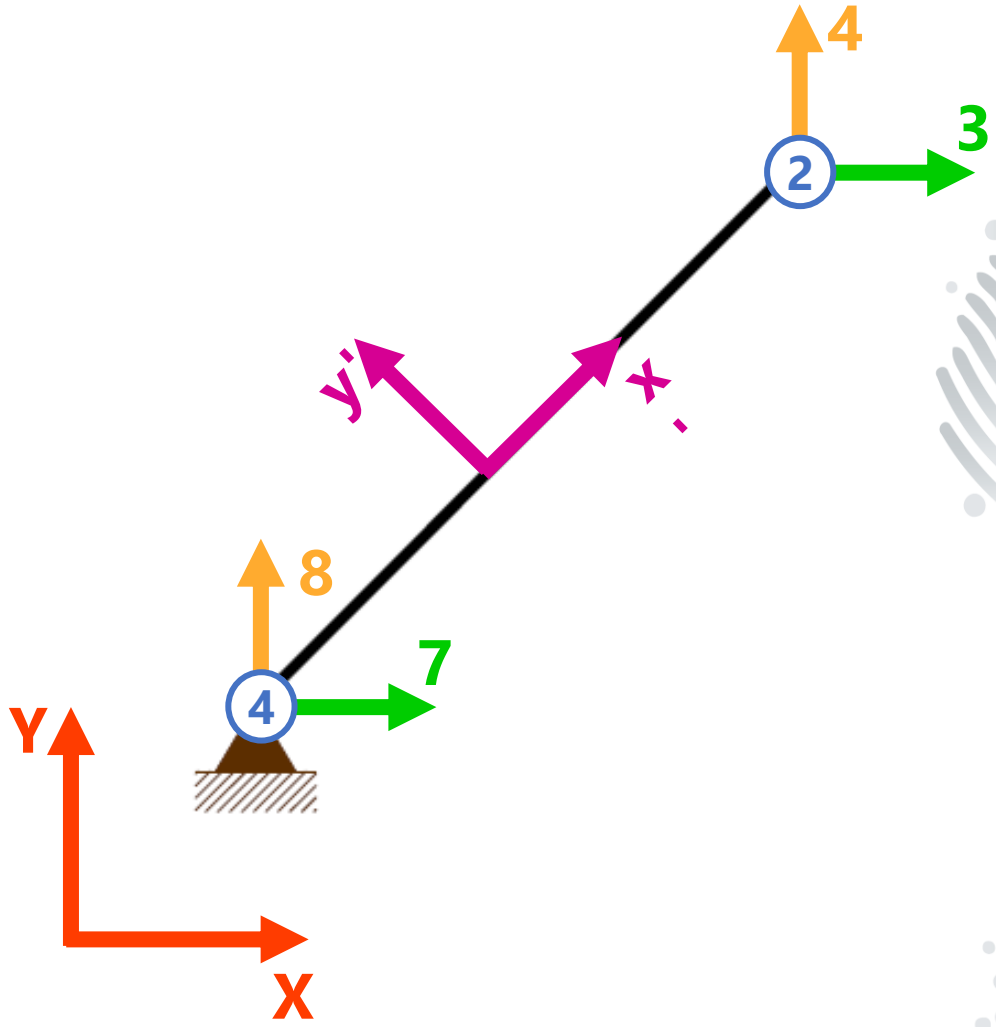


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 9

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90
9	4	2	5.65685	45

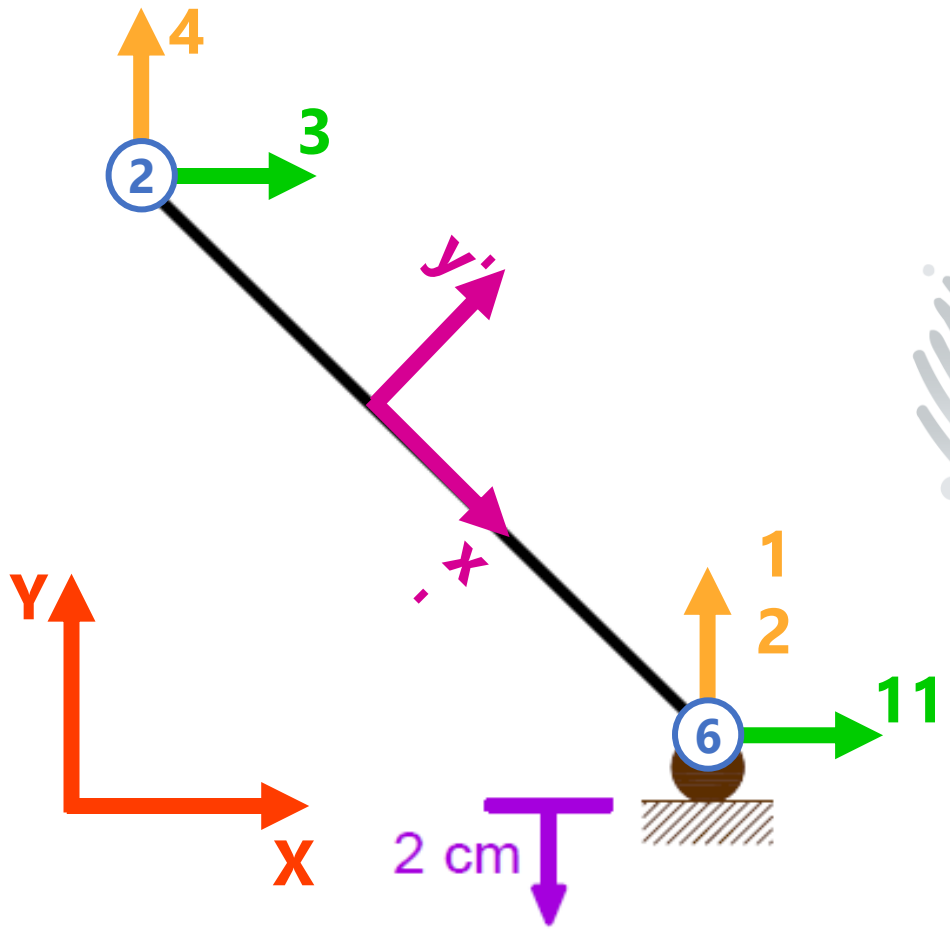


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 10

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90
9	4	2	5.65685	45
10	2	6	5.65685	-45

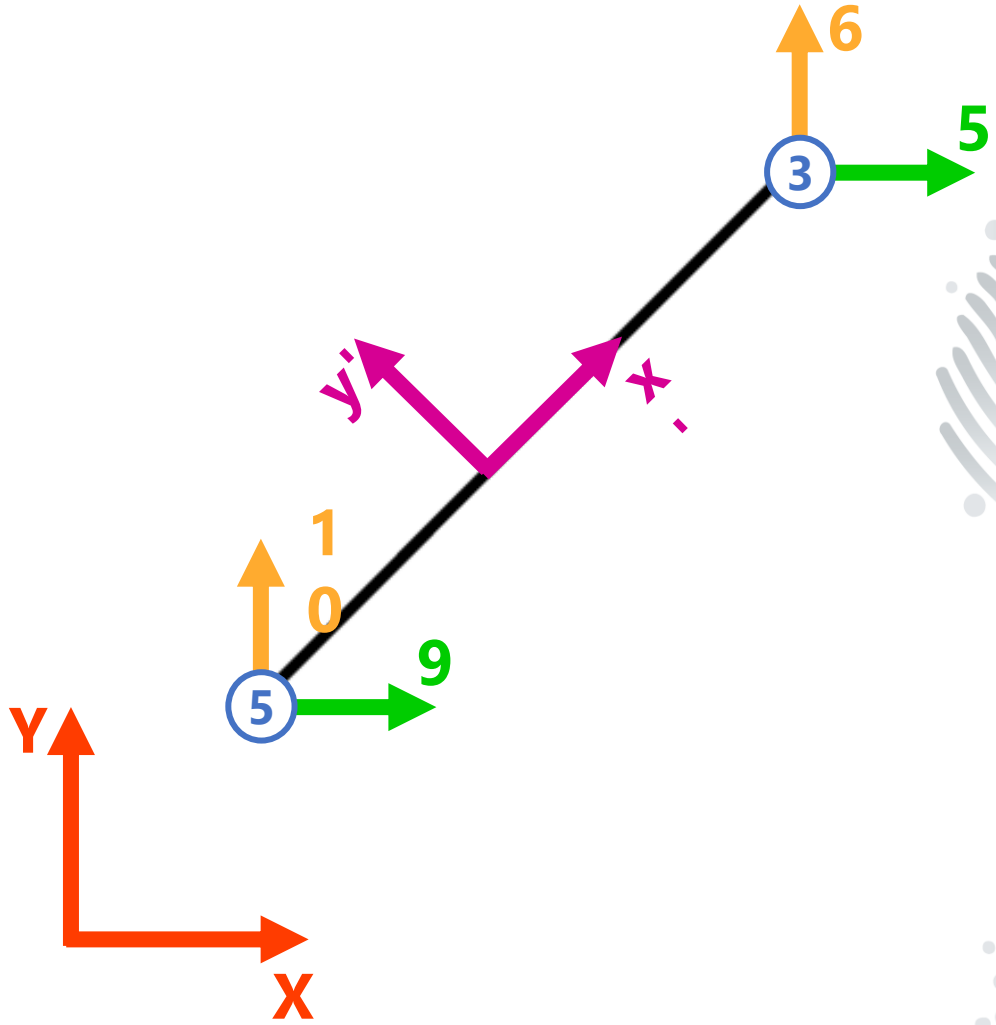


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 11

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90
9	4	2	5.65685	45
10	2	6	5.65685	-45
11	5	3	5.65685	45

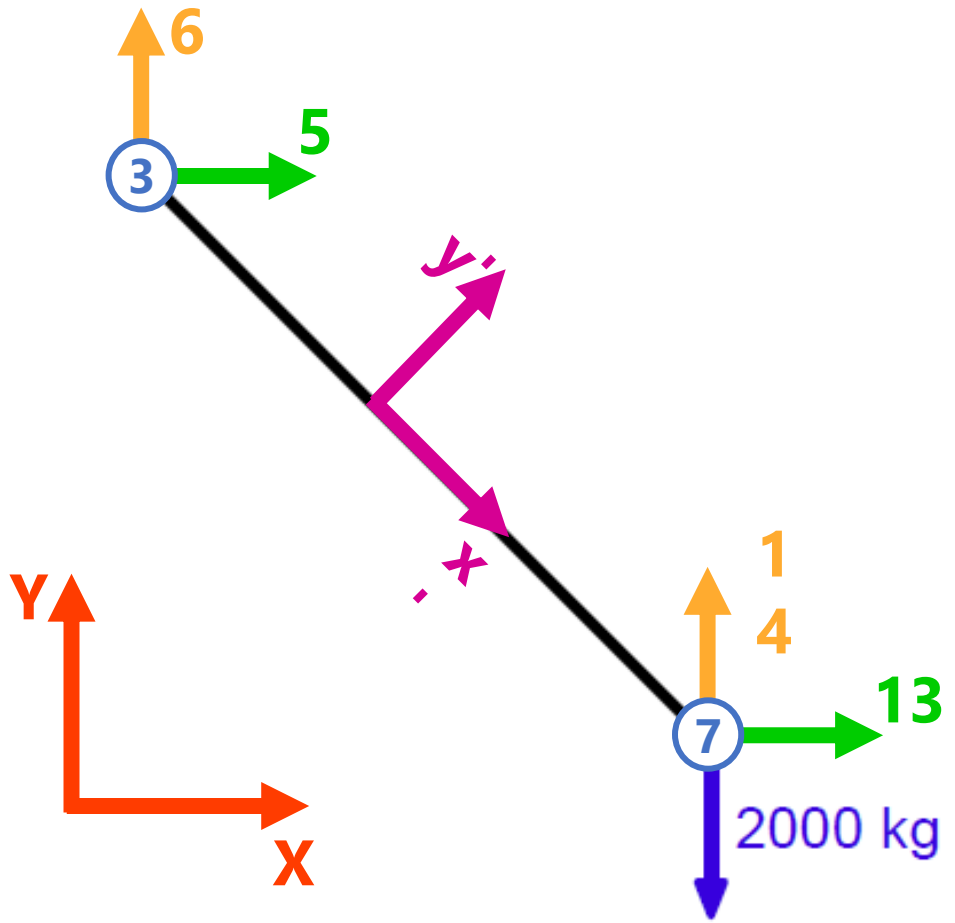


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 12

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90
9	4	2	5.65685	45
10	2	6	5.65685	-45
11	5	3	5.65685	45
12	3	7	5.65685	-45



#LaUISqueQueremos

ECUACIONES FUNDAMENTALES DEL MÉTODO MATRICIAL

Matriz de rigidez local: $[k]_L = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de transformación: $[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$

Matriz de rigidez global del elemento: $[k]_G = [T]^T[k]_L[T] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]_G\{U\} + \{F_{A_s}\}$

Vector fuerzas por asentamiento: $\{F_{A_s}\}_G = [k]_G\{A_s\}_G$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G$

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90
9	4	2	5.65685	45
10	2	6	5.65685	-45
11	5	3	5.65685	45
12	3	7	5.65685	-45

NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	4.0
2	4.0	4.0
3	8.0	4.0
4	0.0	0.0
5	4.0	0.0
6	8.0	0.0
7	12.0	0.0

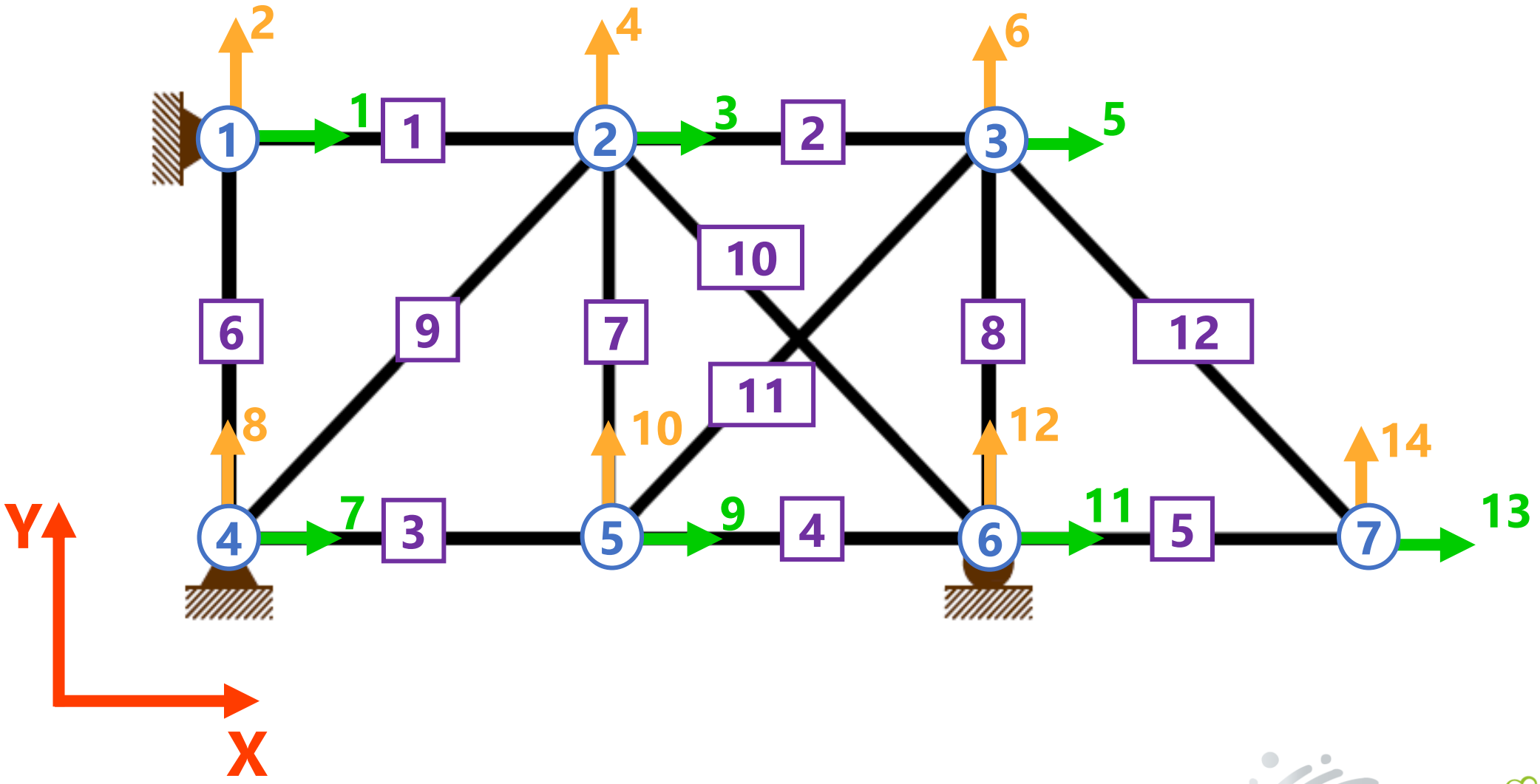
$$E = 200GPa = 2 \times 10^8 \, {kN}/{m^2}$$

$$A_t = 1500mm^2 = 0.0015m^2$$

$$P = -2000 \, kg = -19.613 \, kN$$

#LaUISqueQueremos

GRADOS DE LIBERTAD



#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DEL ELEMENTO

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

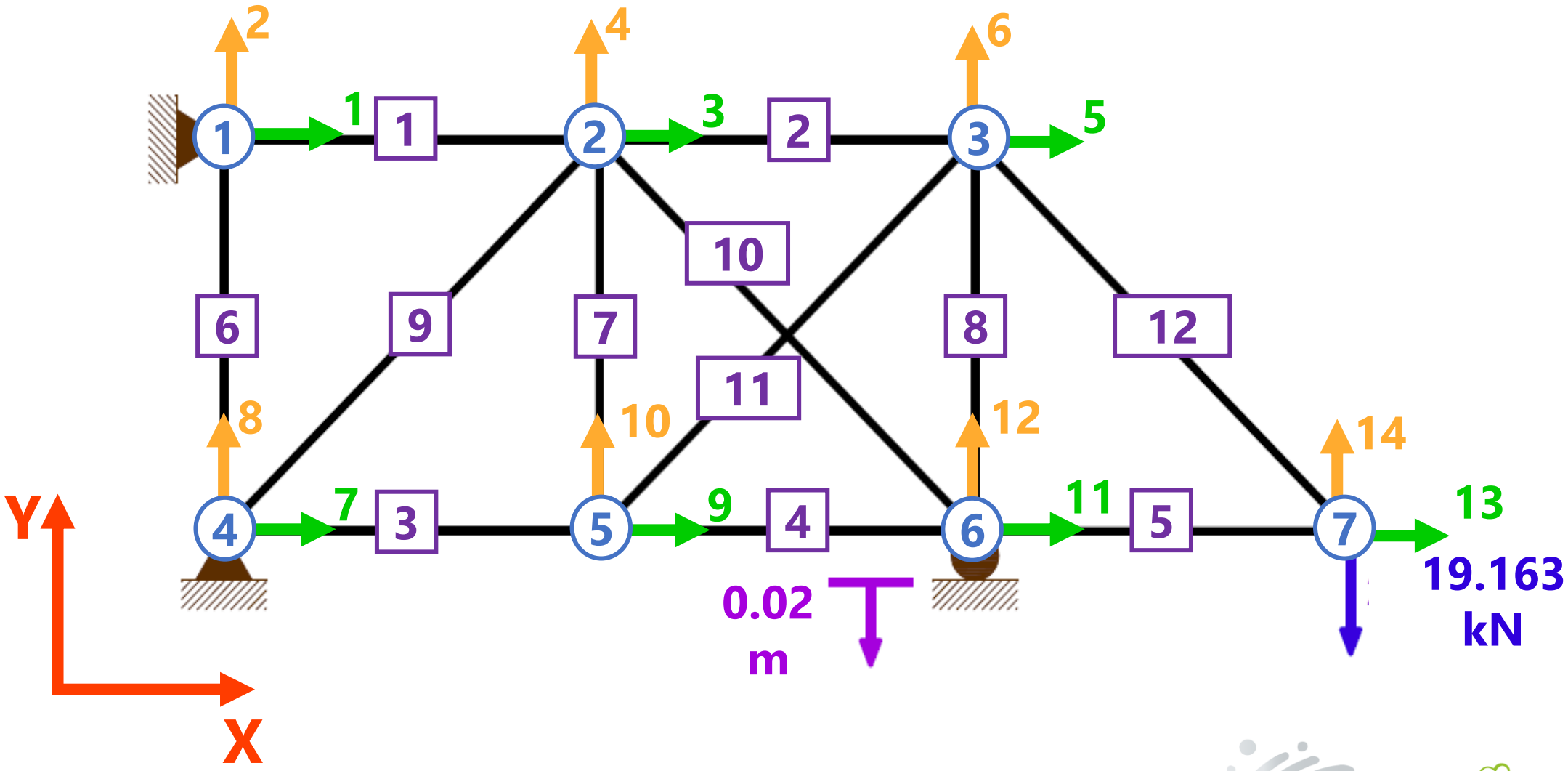
$$[k]_G = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

VECTOR FUERZAS POR ASENTAMIENTO

$$\{F_{A_s}\}_G = [k]_G \{A_s\}_G$$

#LaUISqueQueremos

ARMADURA EJERCICIO 2



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Reacciones: $\{F\} = [K]_G\{U\} + \{F_{A_s}\}$

Desplazamientos: $\{U\} = [K]_G{}^{-1}(\{F\} - \{F_{A_s}\})$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G$

Matriz de rigidez local: $[k]_L = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de transformación: $[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 2

Desplazamiento nodo 7:

$Ux = -3.772 \times 10^{-3}$ m, $Uy = -2.905 \times 10^{-2}$ m

Reacciones:

Nodo 1: $Rx = -301.56$ kN, $Ry = 0.00$ kN

Nodo 4: $Rx = 301.56$ kN, $Ry = 140.97$ kN

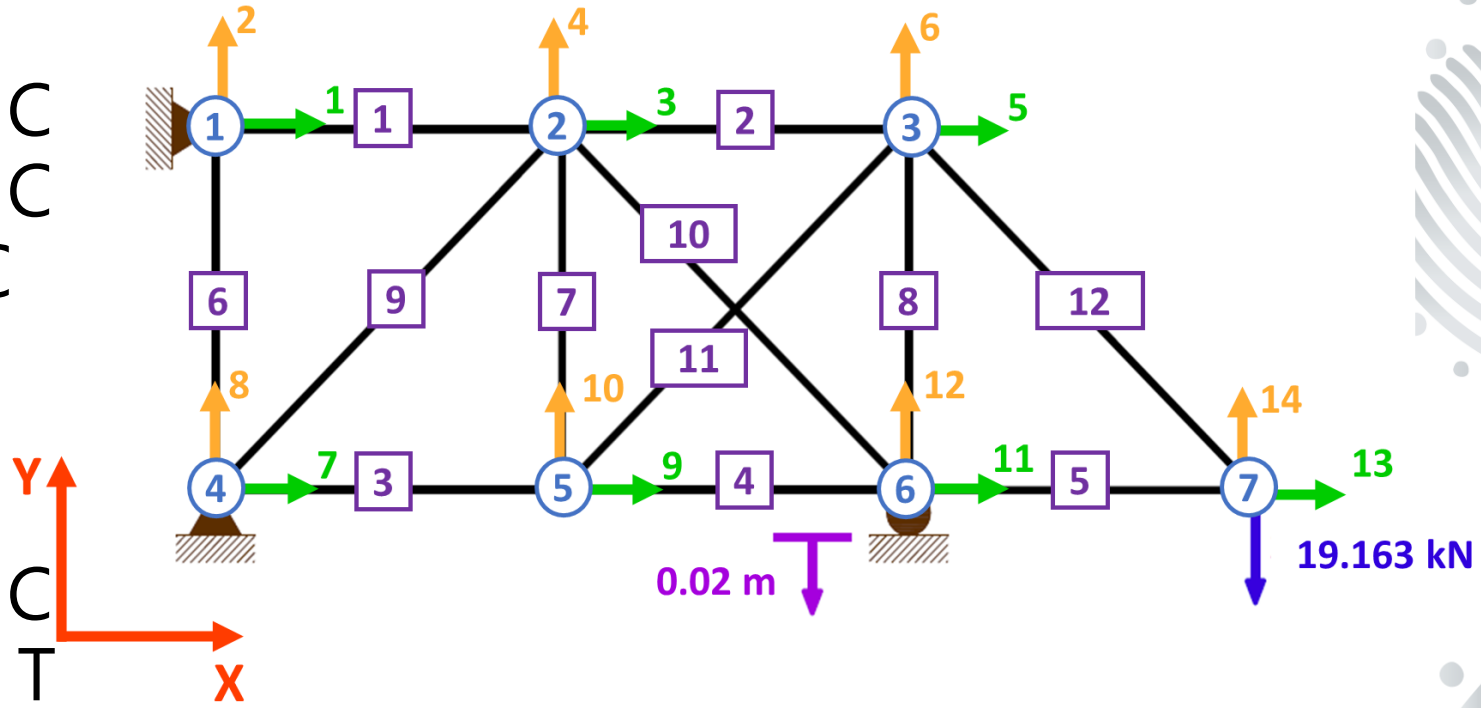
Nodo 6: $Ry = -121.36$ kN

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 2

Fuerzas axiales:

Elemento 1: 301.556 kN - T
Elemento 2: 77.532 kN - T
Elemento 3: -160.585 kN - C
Elemento 4: -102.666 kN - C
Elemento 5: -19.613 kN - C
Elemento 6: 0.000 kN
Elemento 7: 57.919 kN - T
Elemento 8: 38.305 kN - T
Elemento 9: -199.364 kN - C
Elemento 10: 117.454 kN - T
Elemento 11: -81.909 kN - C
Elemento 12: 27.737 kN – T



#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

UIS 1948 2025

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Armaduras Ejercicio 2 Modelación en Opensees

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

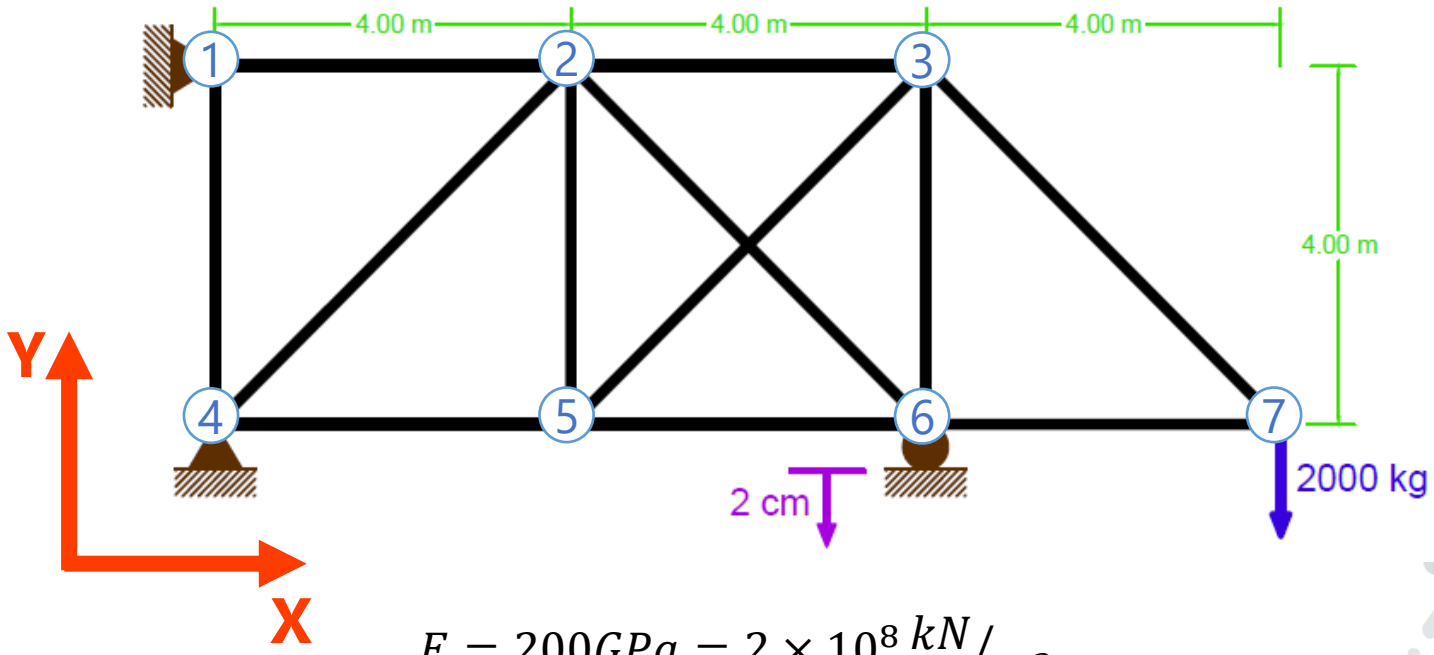
#LaUISqueQueremos

ARMADURAS: EJERCICIO 2

Se tiene una armadura plana dispuesta como se muestra en la figura, conformada por barras articuladas en sus extremos y organizada en módulos de 4.00 m de luz horizontal y 4.00 m de altura. Utilizando el método matricial de rigidez y con base en la información proporcionada, los ejes globales XY indicados y la nomenclatura establecida para los nodos, se solicita lo siguiente:

- Determinar el desplazamiento del nodo 7 de la estructura, considerando que el apoyo móvil del nodo 6 presenta un descenso vertical impuesto de 2 cm.
- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Determinar las fuerzas internas en cada barra, indicando si se encuentran a tracción o compresión.

Desprecie el peso propio de los elementos y considere únicamente las cargas y desplazamientos impuestos indicados. Todas las barras poseen un módulo de elasticidad E=200GPa y un área transversal constante At=1500mm².



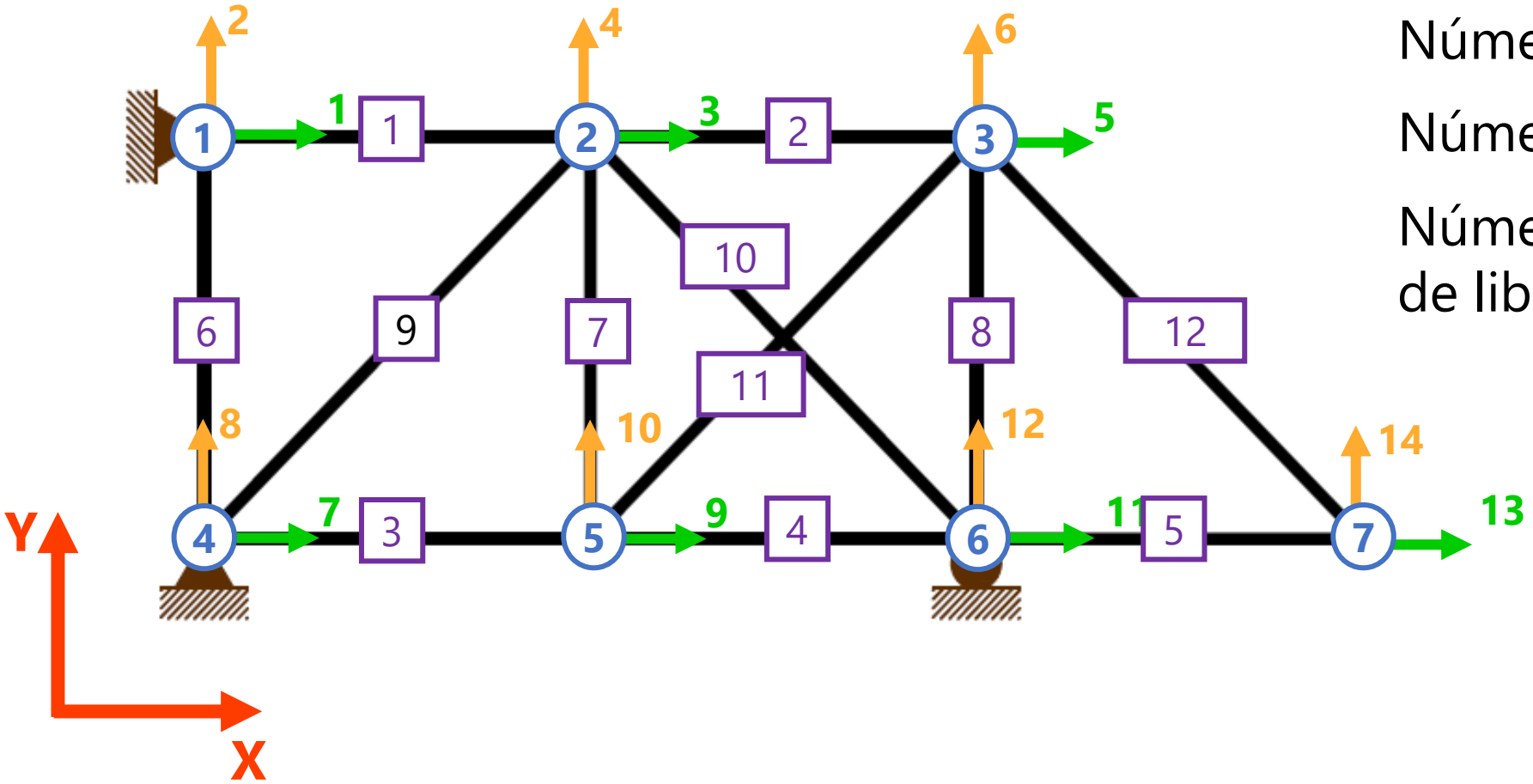
$$E = 200GPa = 2 \times 10^8 \, {kN}/{m^2}$$

$$A_t = 1500mm^2 = 0.0015m^2$$

$$P = -2000 \, kg = -19.613 \, kN$$

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA



Número de nodo: 7

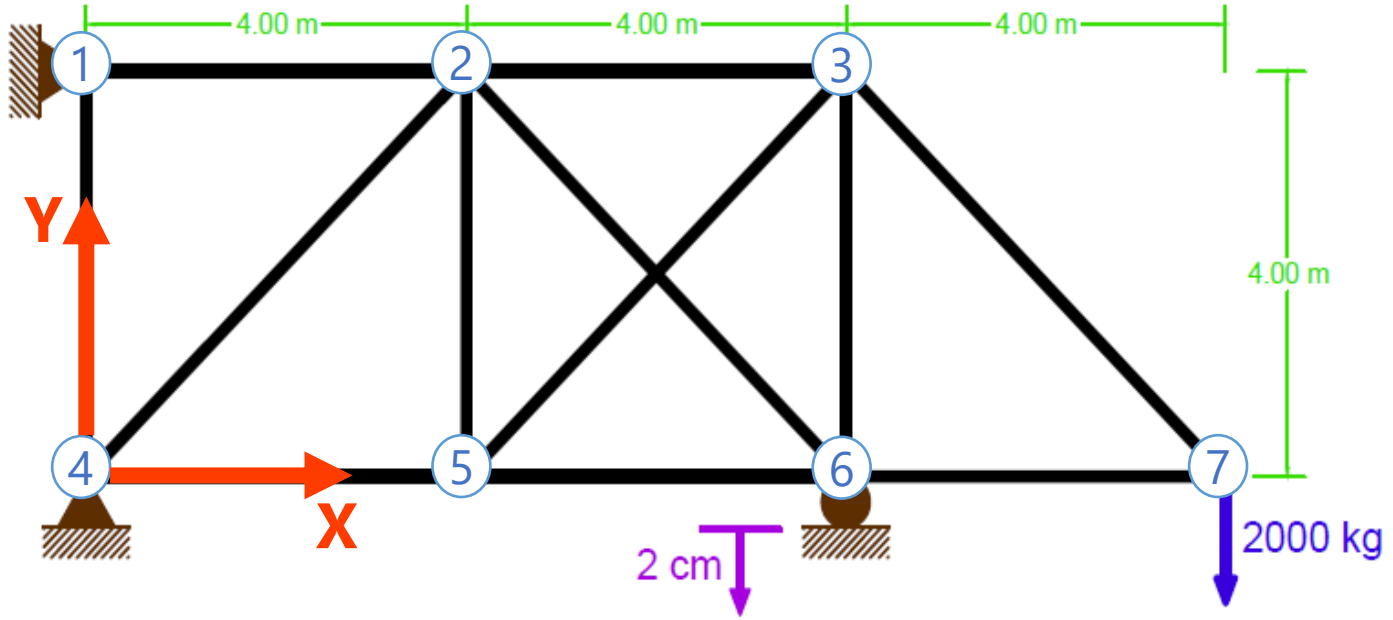
Número de elementos: 12

Número de grados de libertad: 14

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

COORDENADAS DE LOS NODOS

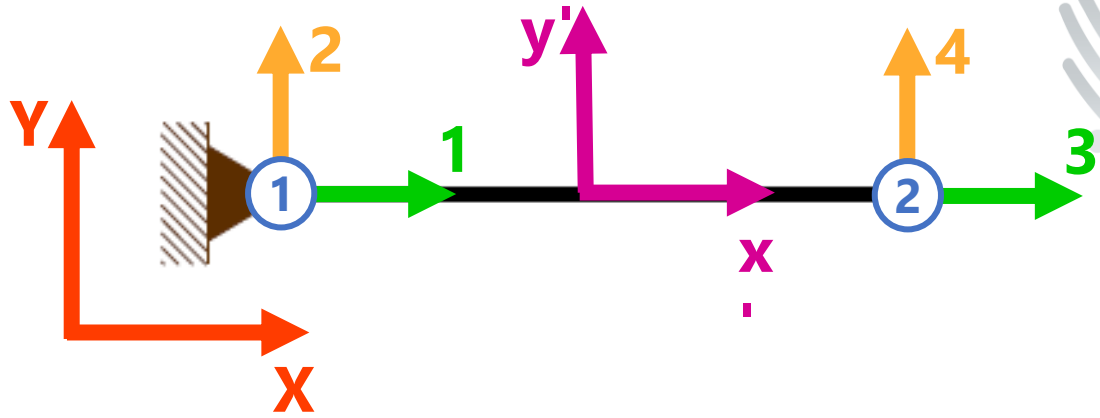


NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	4.0
2	4.0	4.0
3	8.0	4.0
4	0.0	0.0
5	4.0	0.0
6	8.0	0.0
7	12.0	0.0

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0

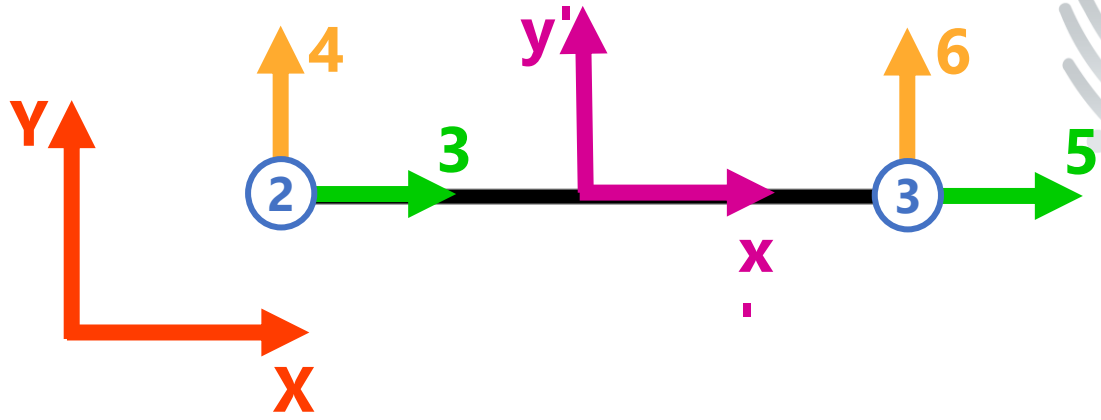


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0

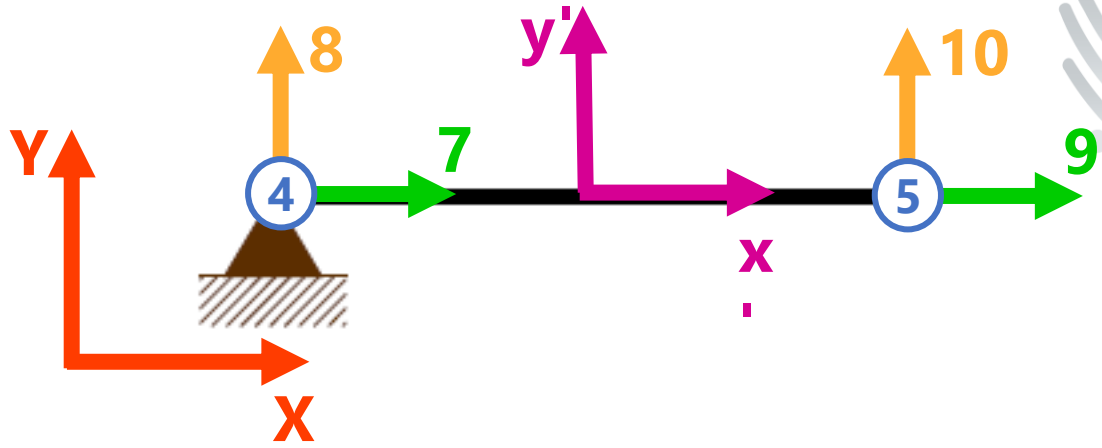


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 3

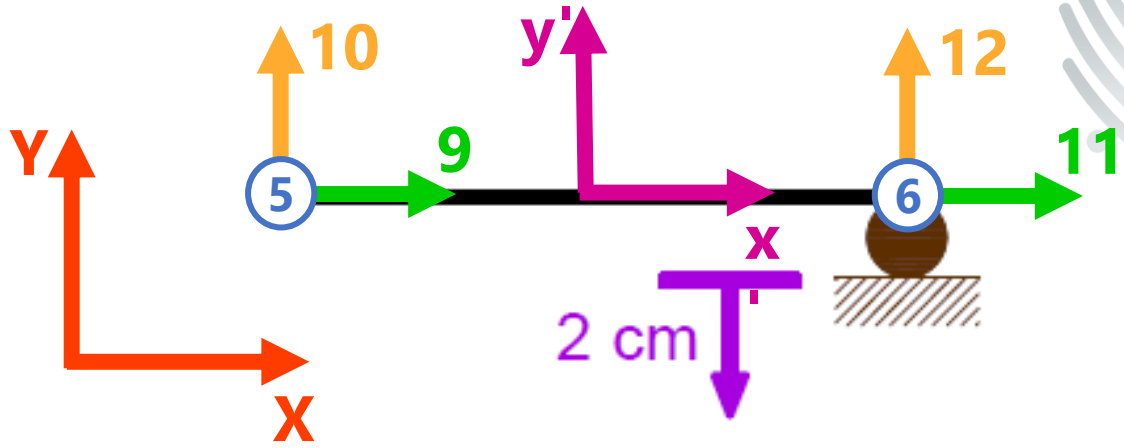
ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0



DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 4

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0

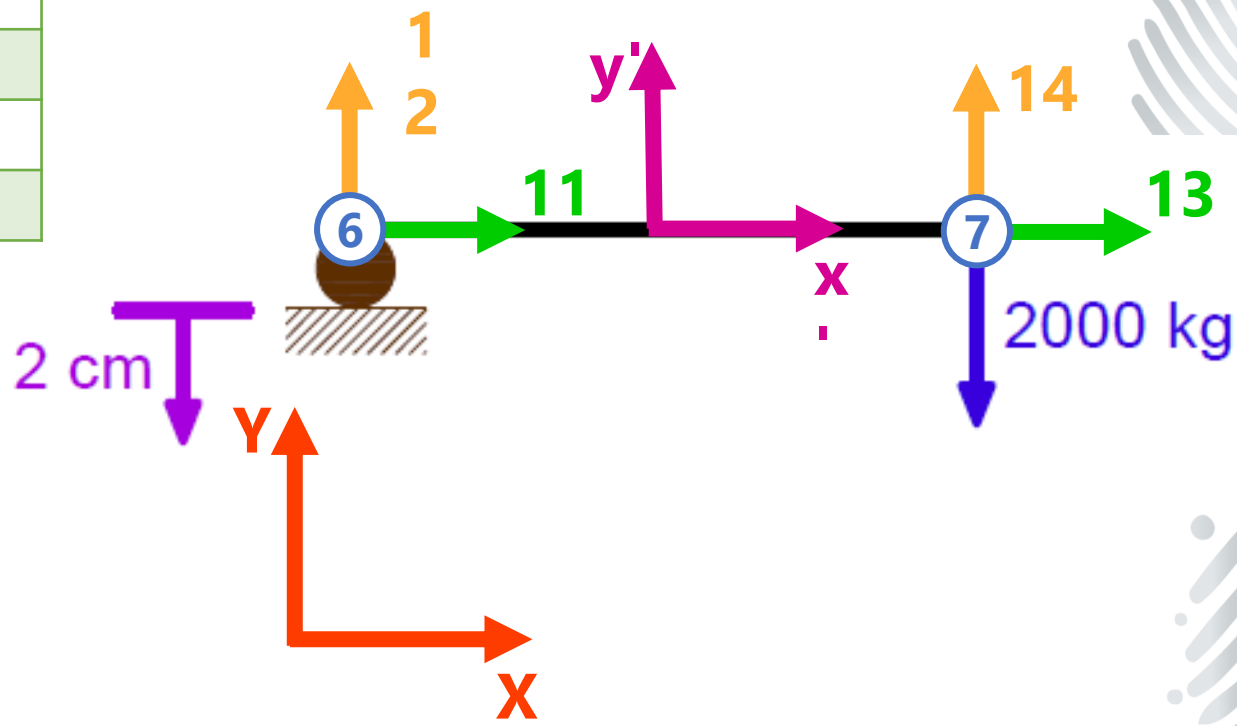


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 5

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0

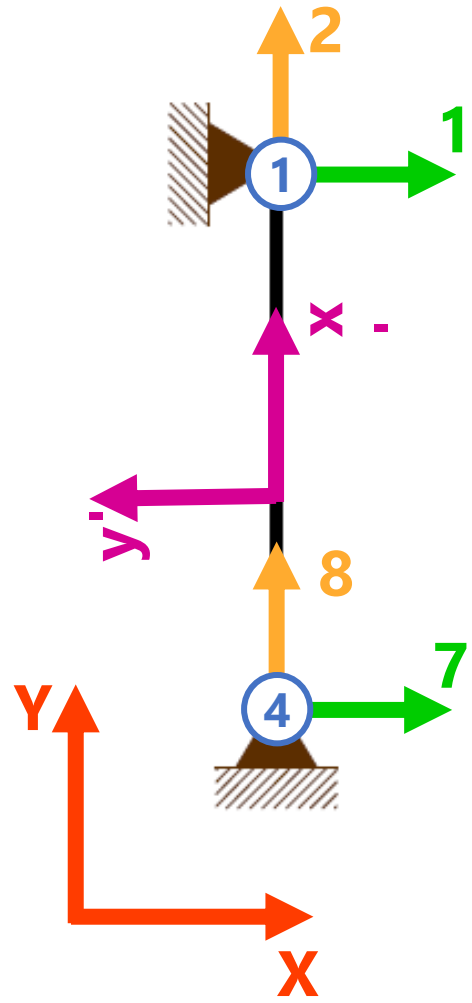


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 6

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90

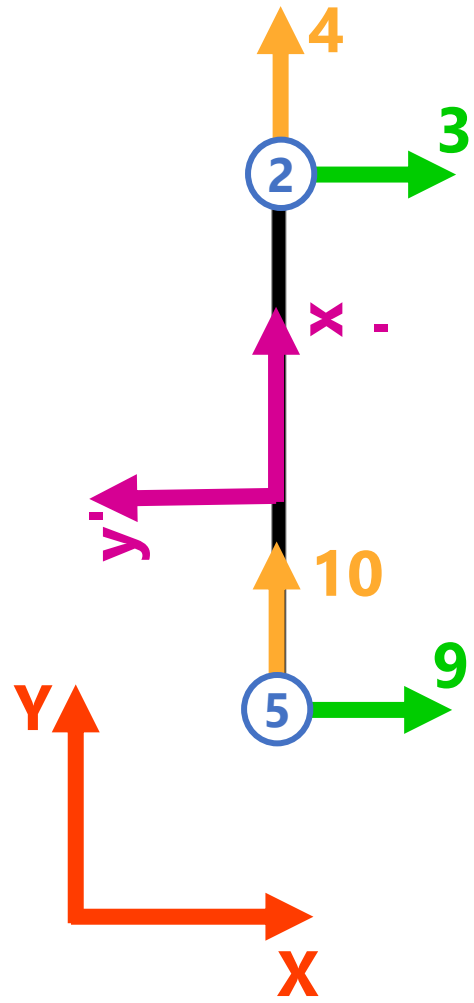


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 7

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90

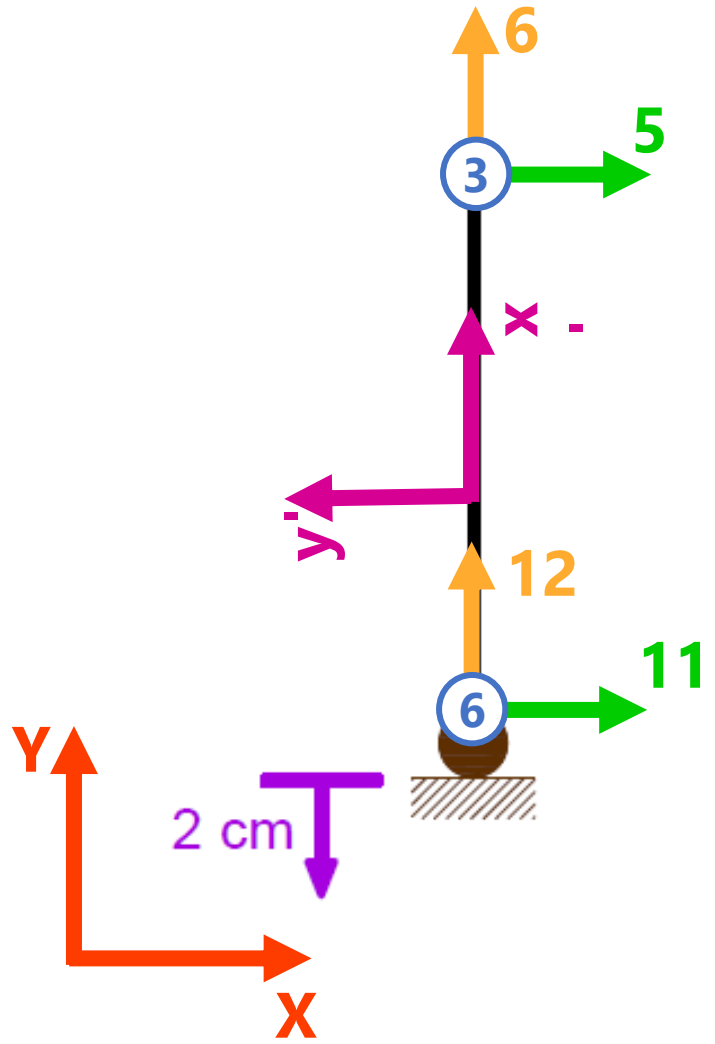


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 8

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90

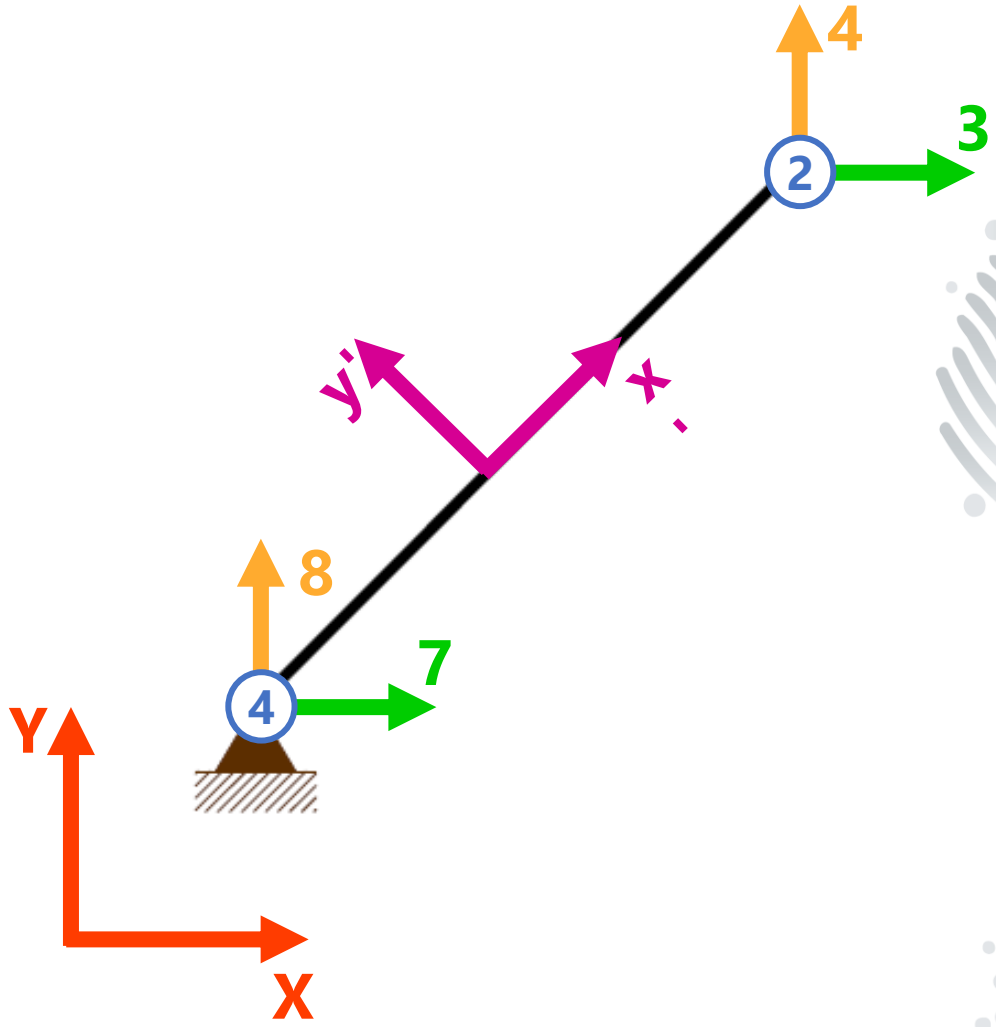


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 9

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90
9	4	2	5.65685	45

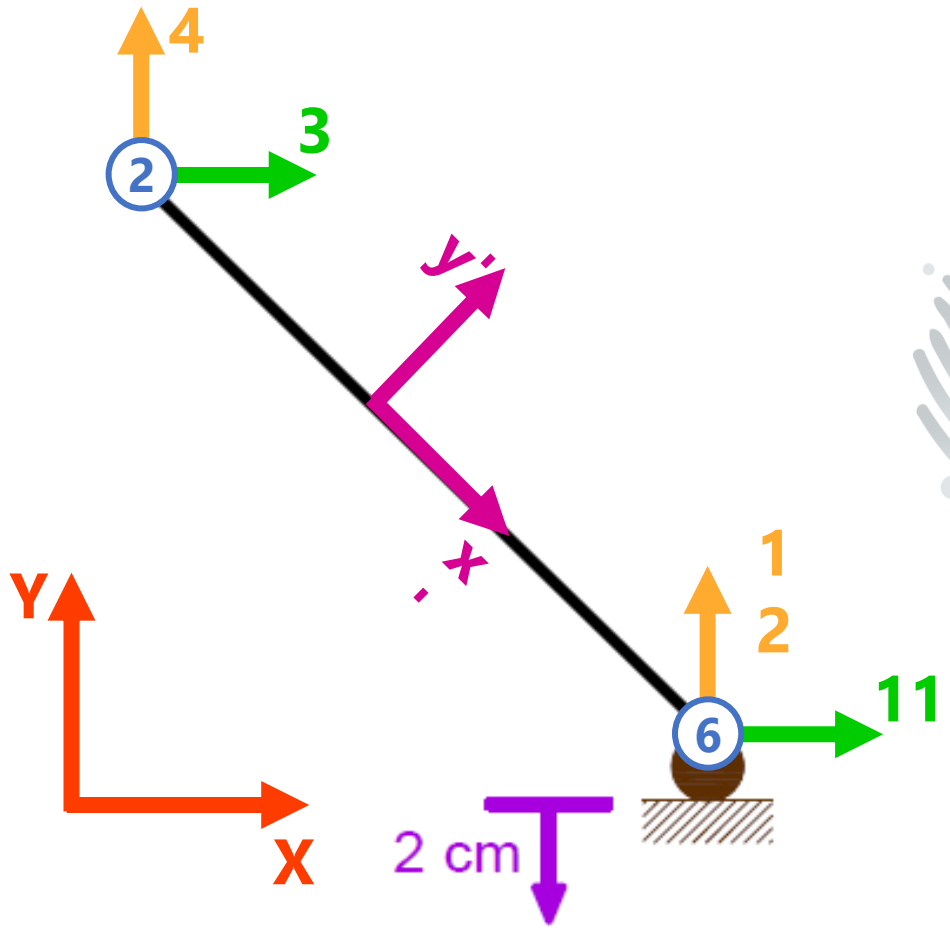


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 10

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90
9	4	2	5.65685	45
10	2	6	5.65685	-45

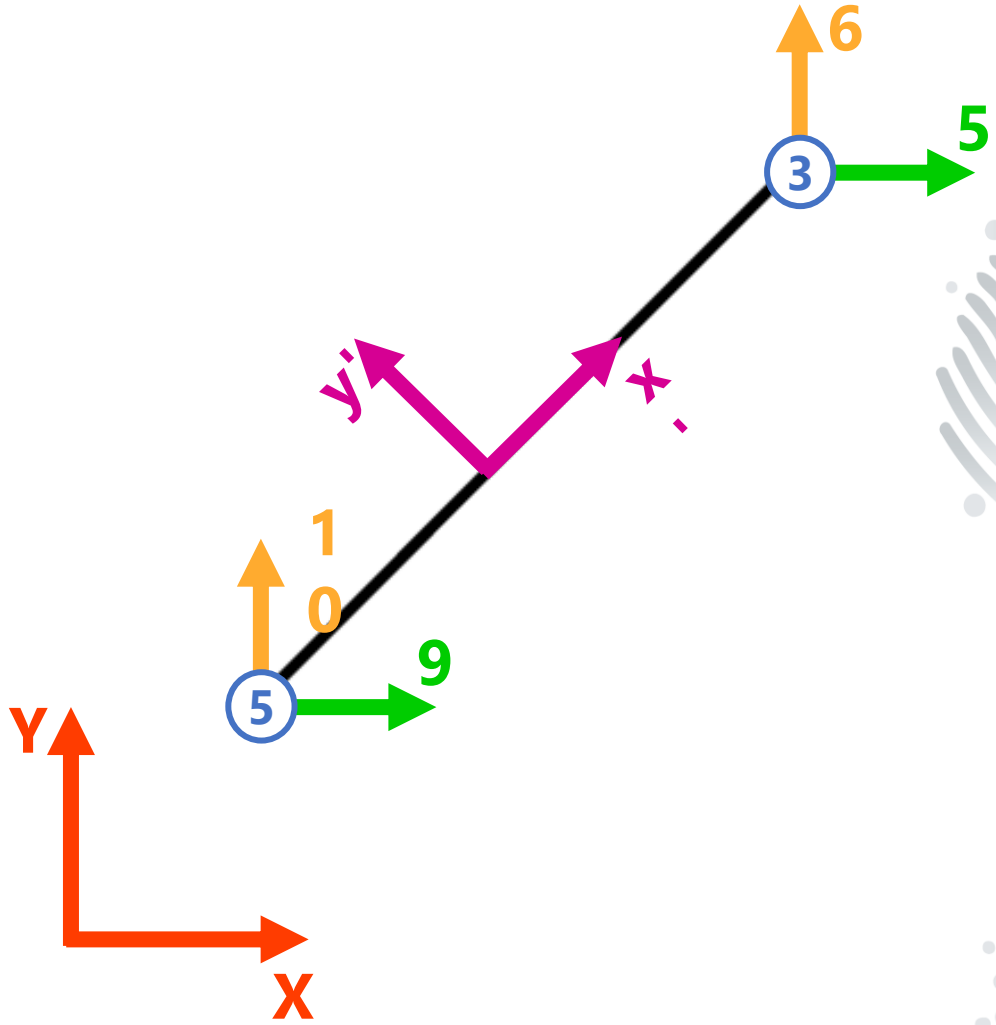


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 11

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90
9	4	2	5.65685	45
10	2	6	5.65685	-45
11	5	3	5.65685	45

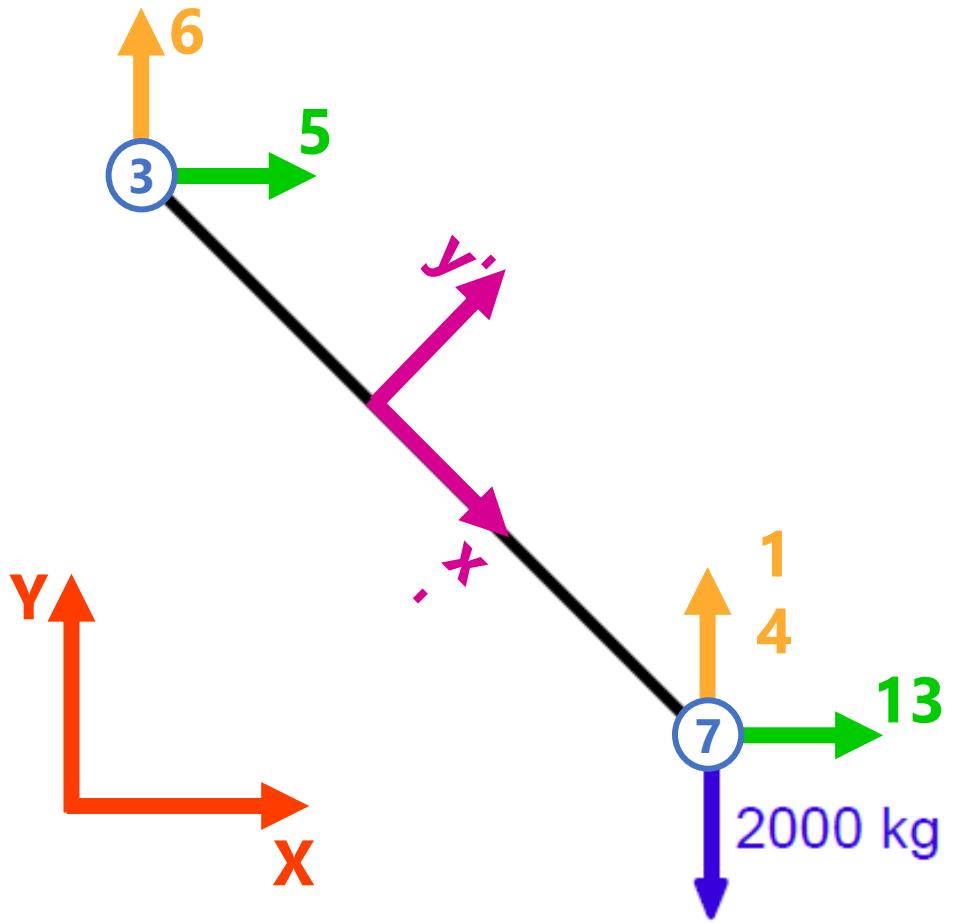


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 12

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	0
2	2	3	4.0	0
3	4	5	4.0	0
4	5	6	4.0	0
5	6	7	4.0	0
6	4	1	4.0	90
7	5	2	4.0	90
8	6	3	4.0	90
9	4	2	5.65685	45
10	2	6	5.65685	-45
11	5	3	5.65685	45
12	3	7	5.65685	-45



#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

ELEMENTO	NODO i	NODO f
1	1	2
2	2	3
3	4	5
4	5	6
5	6	7
6	4	1
7	5	2
8	6	3
9	4	2
10	2	6
11	5	3
12	3	7

NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	4.0
2	4.0	4.0
3	8.0	4.0
4	0.0	0.0
5	4.0	0.0
6	8.0	0.0
7	12.0	0.0

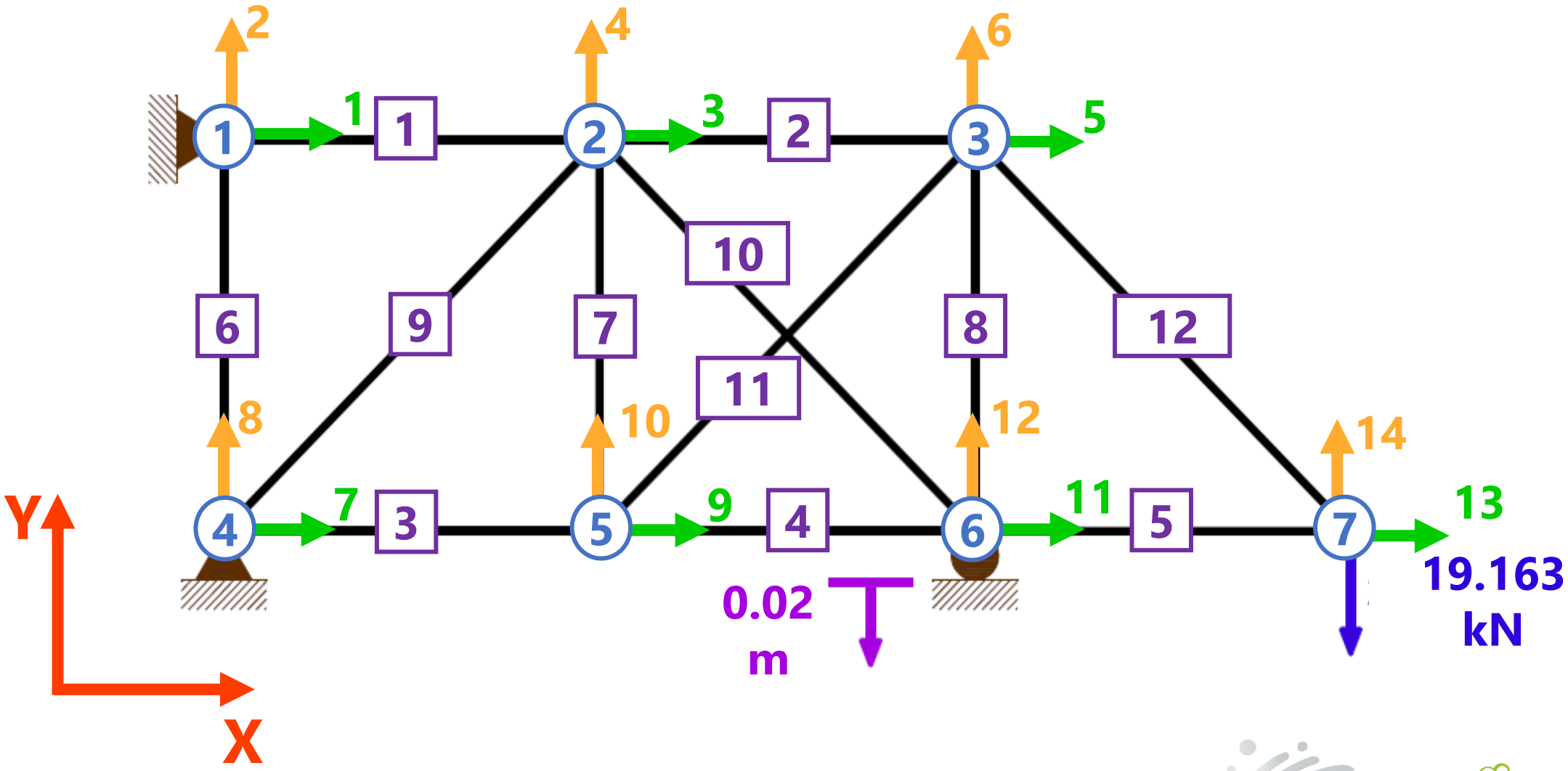
$$E = 200GPa = 2 \times 10^8 \, {kN}/{m^2}$$

$$A_t = 1500mm^2 = 0.0015m^2$$

$$P = -2000 \, kg = -19.613 \, kN$$

#LaUISqueQueremos

ARMADURA EJERCICIO 2



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 2

Desplazamiento nodo 7:

$Ux = -3.772 \times 10^{-3}$ m, $Uy = -2.905 \times 10^{-2}$ m

Reacciones:

Nodo 1: $Rx = -301.56$ kN, $Ry = 0.00$ kN

Nodo 4: $Rx = 301.56$ kN, $Ry = 140.97$ kN

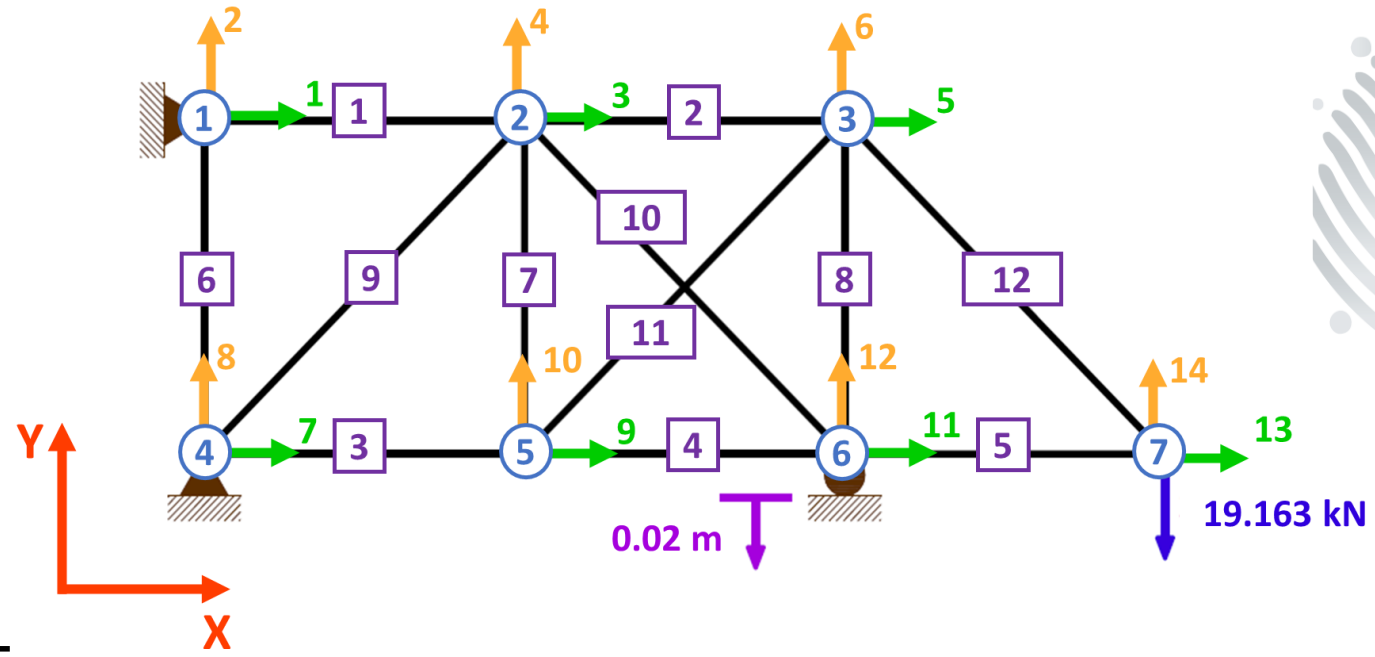
Nodo 6: $Ry = -121.36$ kN

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 2

Fuerzas axiales:

Elemento 1: -301.556 kN - T
Elemento 2: -77.532 kN - T
Elemento 3: 160.585 kN - C
Elemento 4: 102.666 kN - C
Elemento 5: 19.613 kN - C
Elemento 6: 0.000 kN
Elemento 7: -57.919 kN - T
Elemento 8: -38.305 kN - T
Elemento 9: 199.364 kN - C
Elemento 10: -117.454 kN - T
Elemento 11: 81.909 kN - C
Elemento 12: -27.737 kN – T



#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

UIS 1948 2025

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Armaduras
Ejercicio 3
Método Matricial de rigidez en Python

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

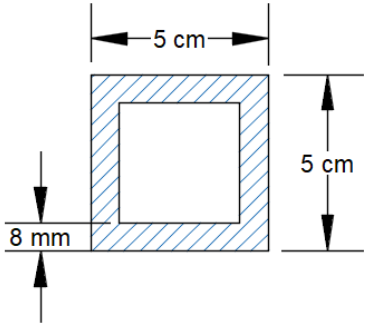
#LaUISqueQueremos

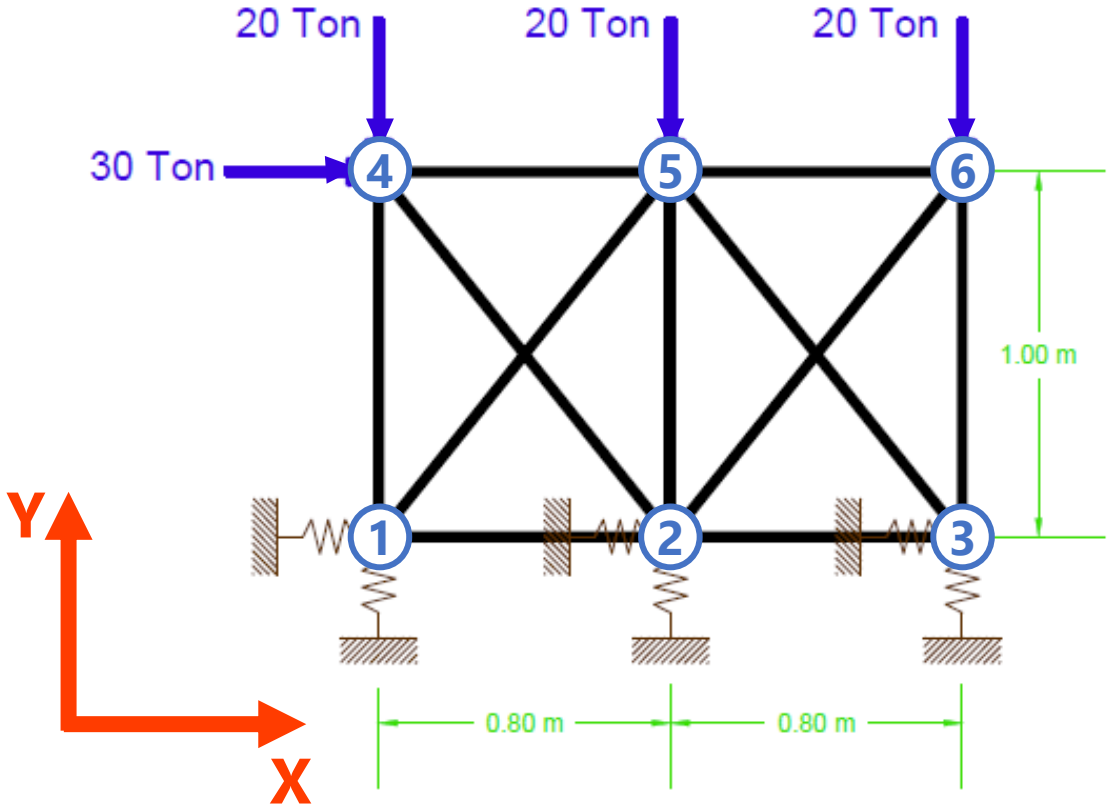
ARMADURAS: EJERCICIO 3

Se tiene una armadura plana dispuesta como se muestra en la figura, conformada por barras articuladas en sus extremos y organizada en módulos de 0.8 m de luz horizontal y 1 m de altura, con apoyos elásticos en los nodos 1, 2 y 3. Utilizando el método matricial de rigidez y con base en la información proporcionada, los ejes globales XY indicados y la nomenclatura establecida para los nodos, se solicita lo siguiente:

- Determinar los desplazamientos en los nodos 4, 5 y 6 de la estructura.
- Calcular las reacciones en los apoyos elásticos.
- Determinar las fuerzas internas en cada barra, indicando si se encuentran a tracción o compresión.

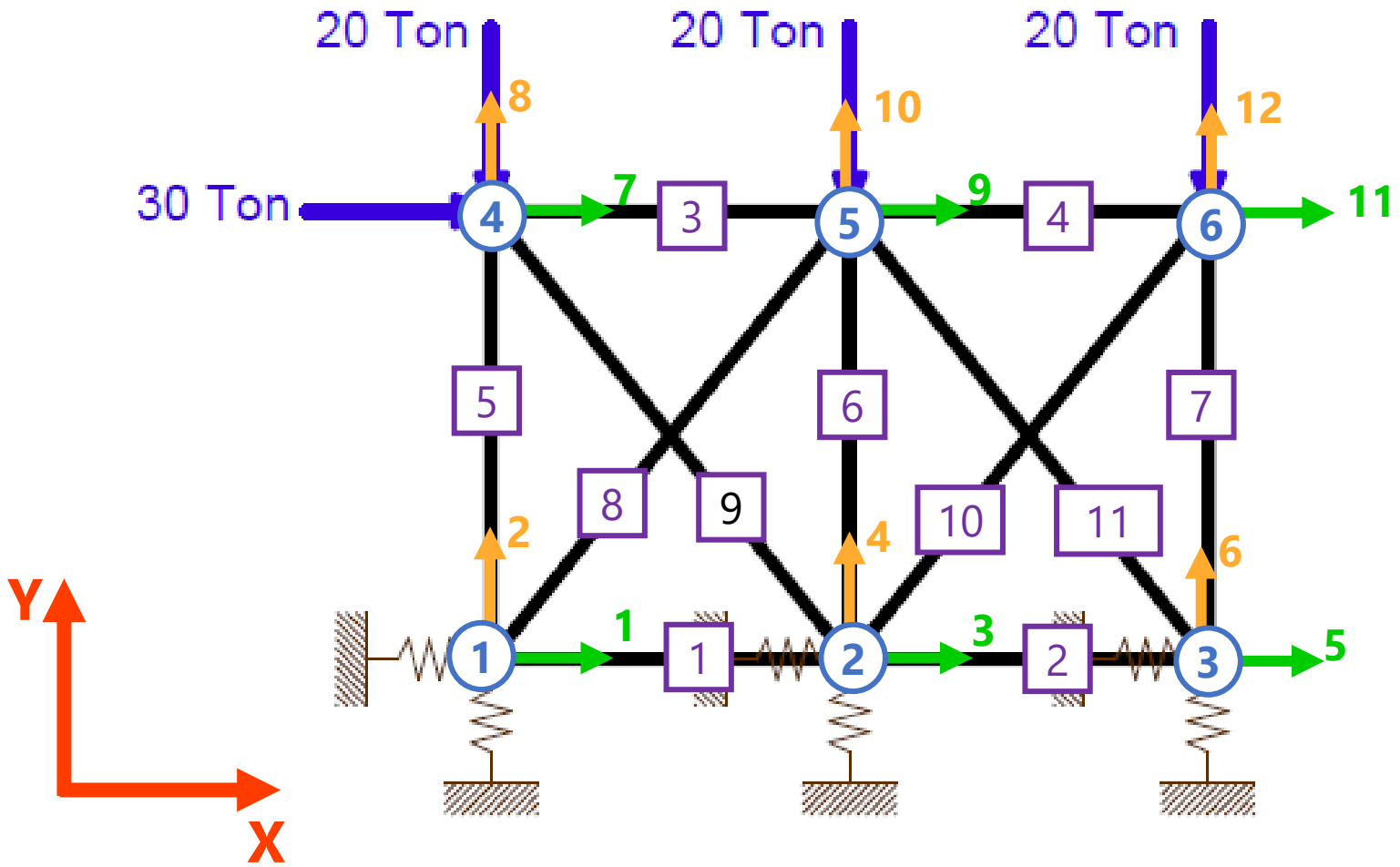
Desprecie el peso propio de los elementos y considere únicamente las cargas y apoyos indicados. La rigidez de los apoyos elásticos en kx=8500 Ton/m y ky=5000 Ton/m. Todas las barras poseen un módulo de elasticidad $E=2.1x10^7$ Ton/m^2 y una sección transversal tubular cuadrada como se indica a continuación:





#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA



Número de nodo: 6

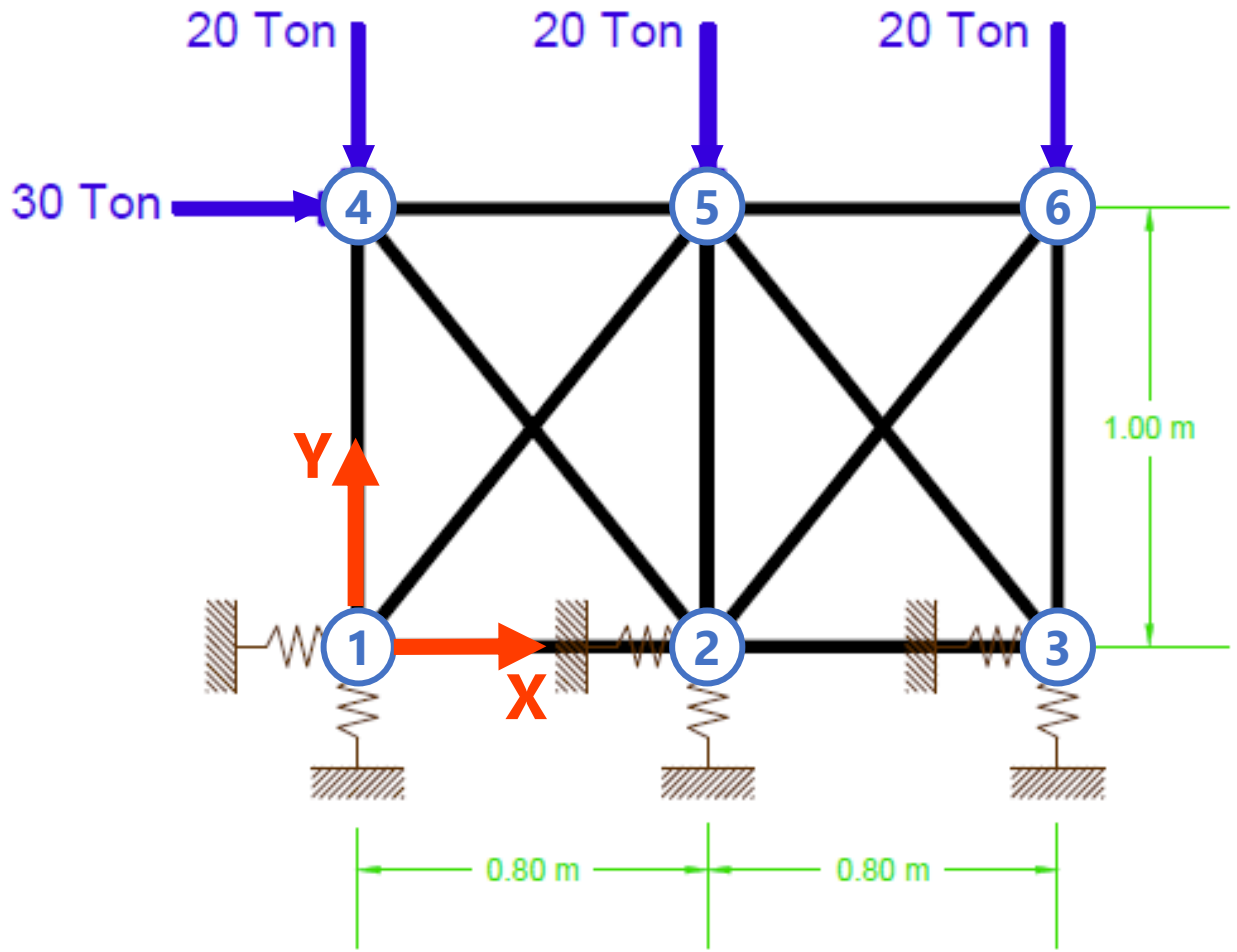
Número de elementos: 11

Número de grados de libertad: 12

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

COORDENADAS DE LOS NODOS



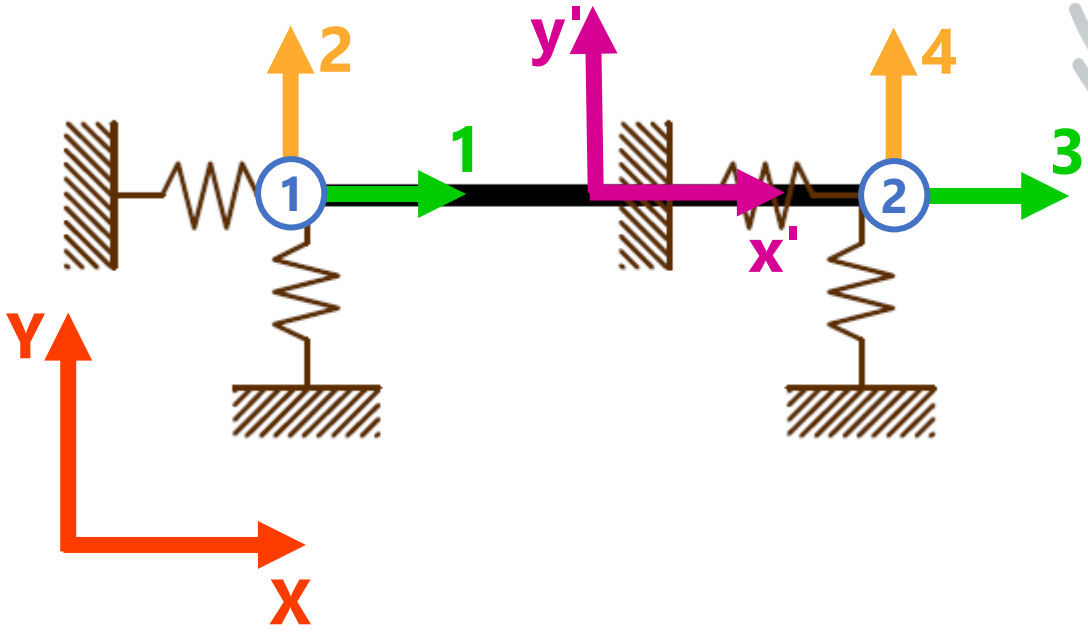
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.8	0.0
3	1.6	0.0
4	0.0	1.0
5	0.8	1.0
6	1.6	1.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0

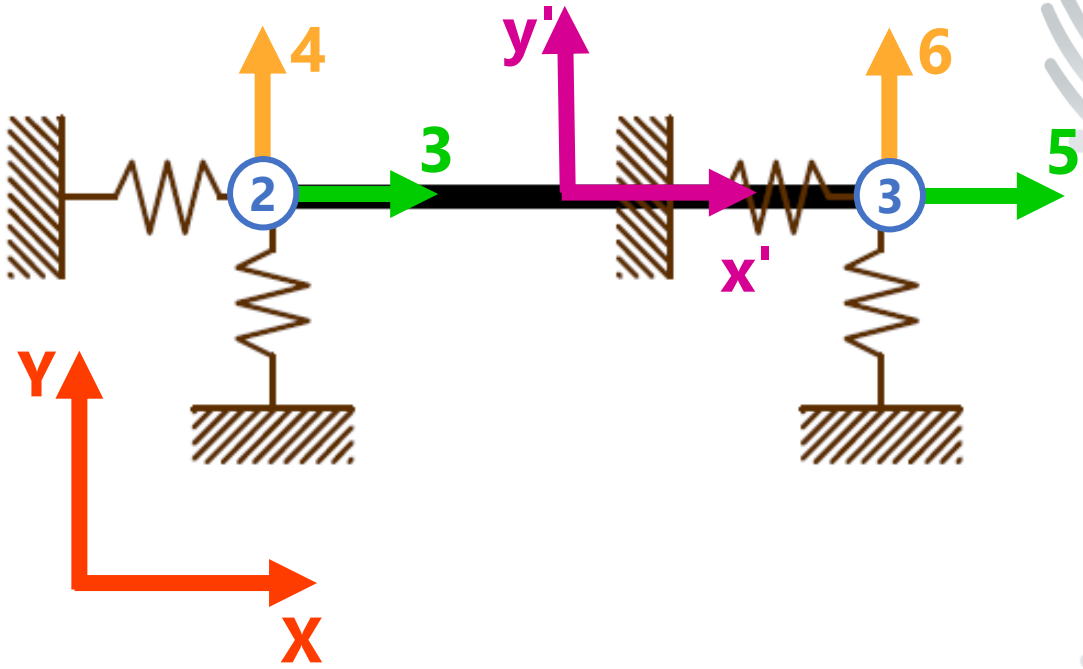


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0

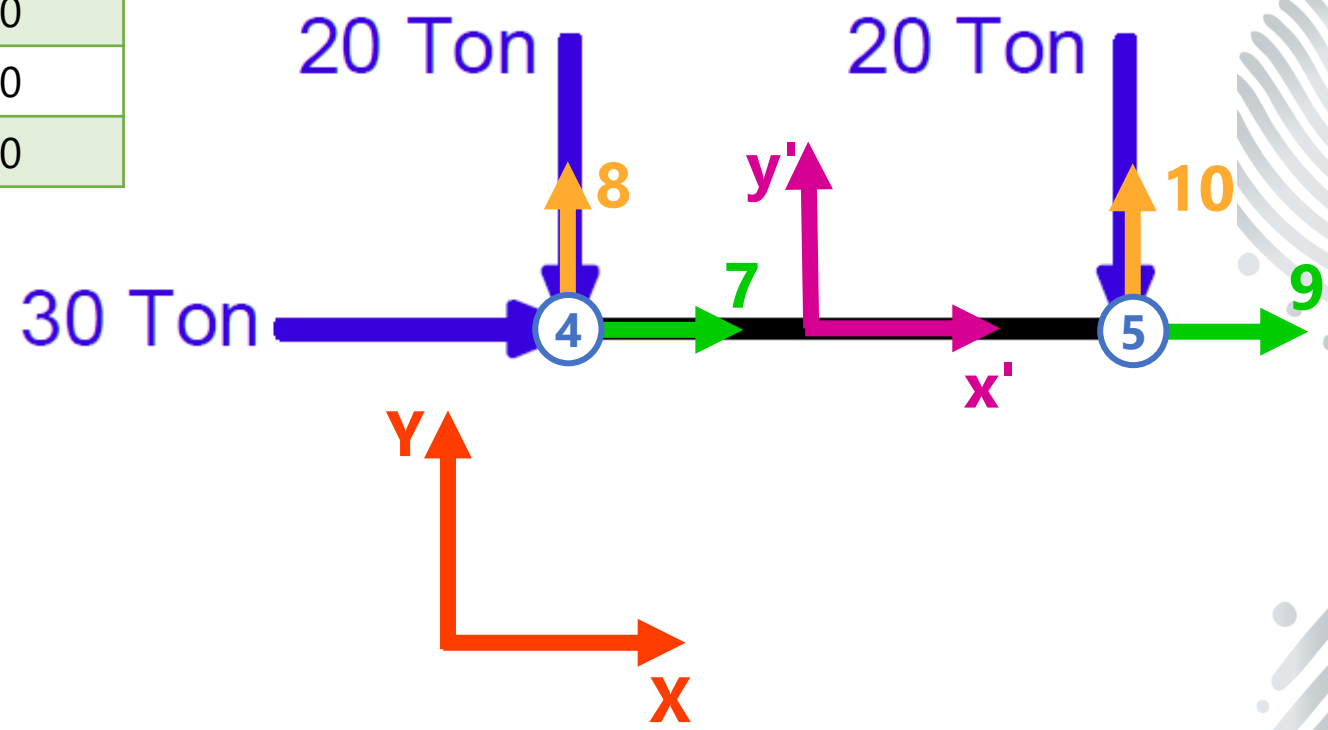


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 3

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0

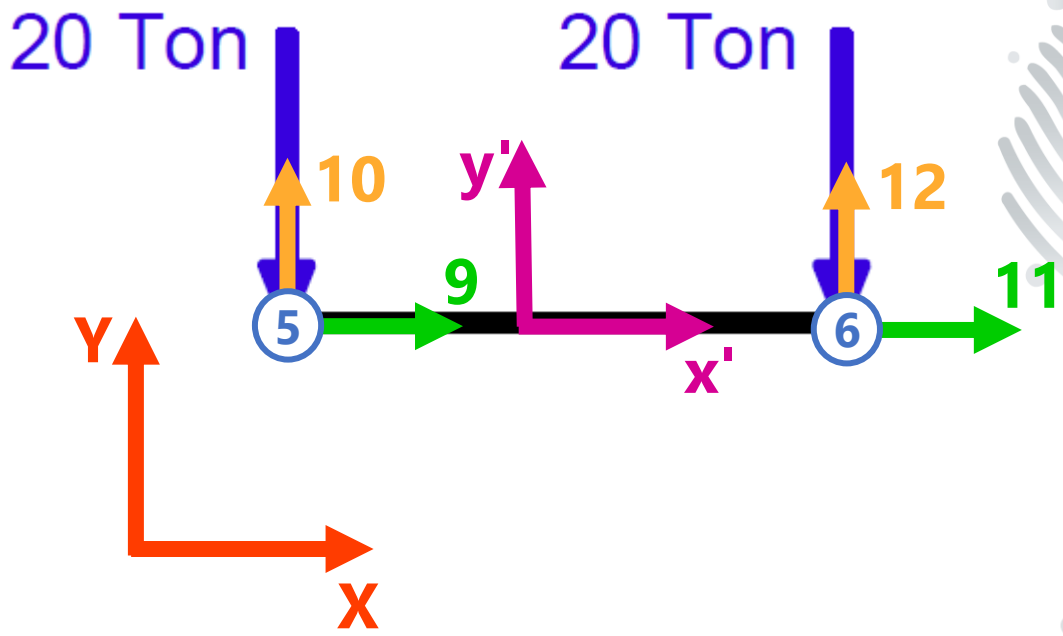


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 4

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0

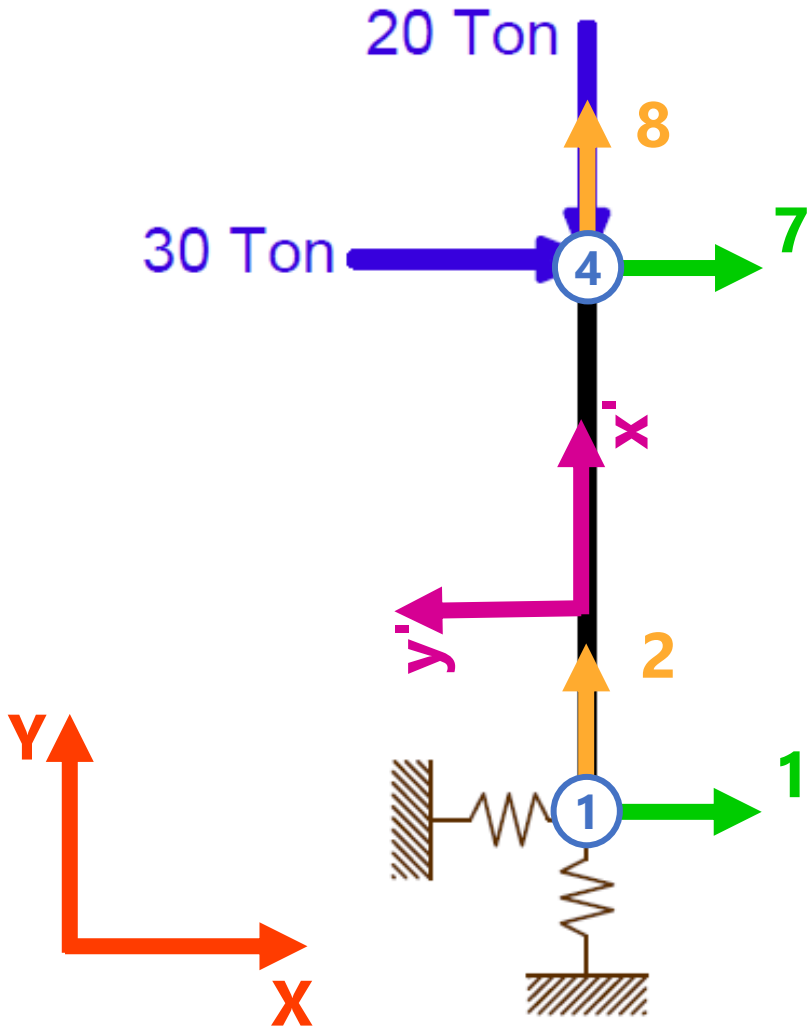


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 5

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90

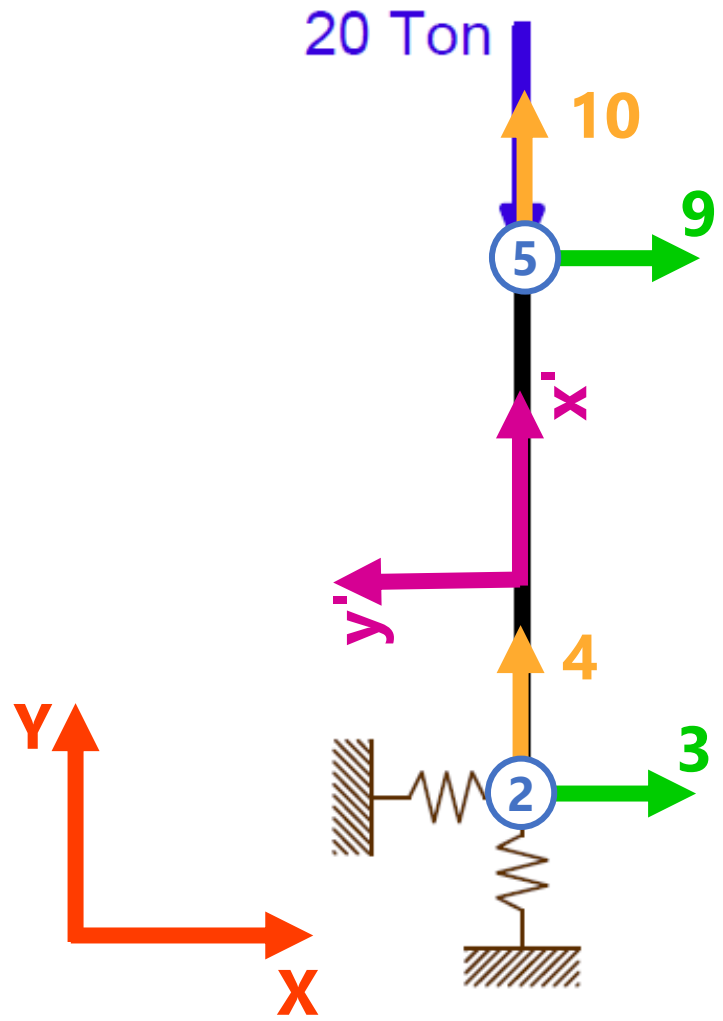


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 6

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90

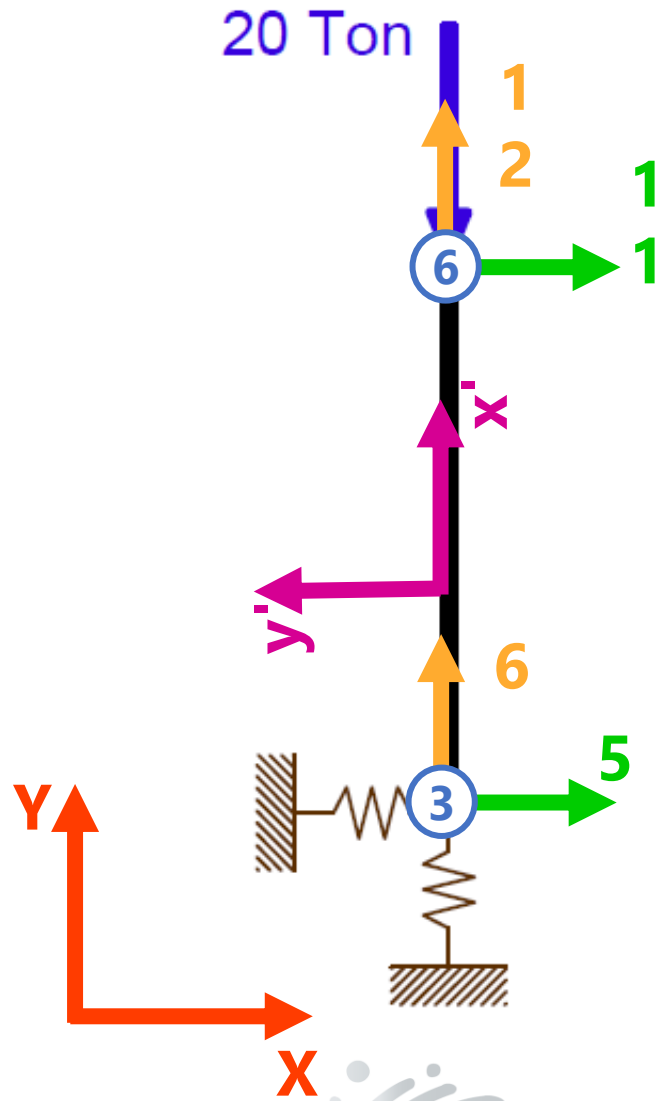


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 7

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90

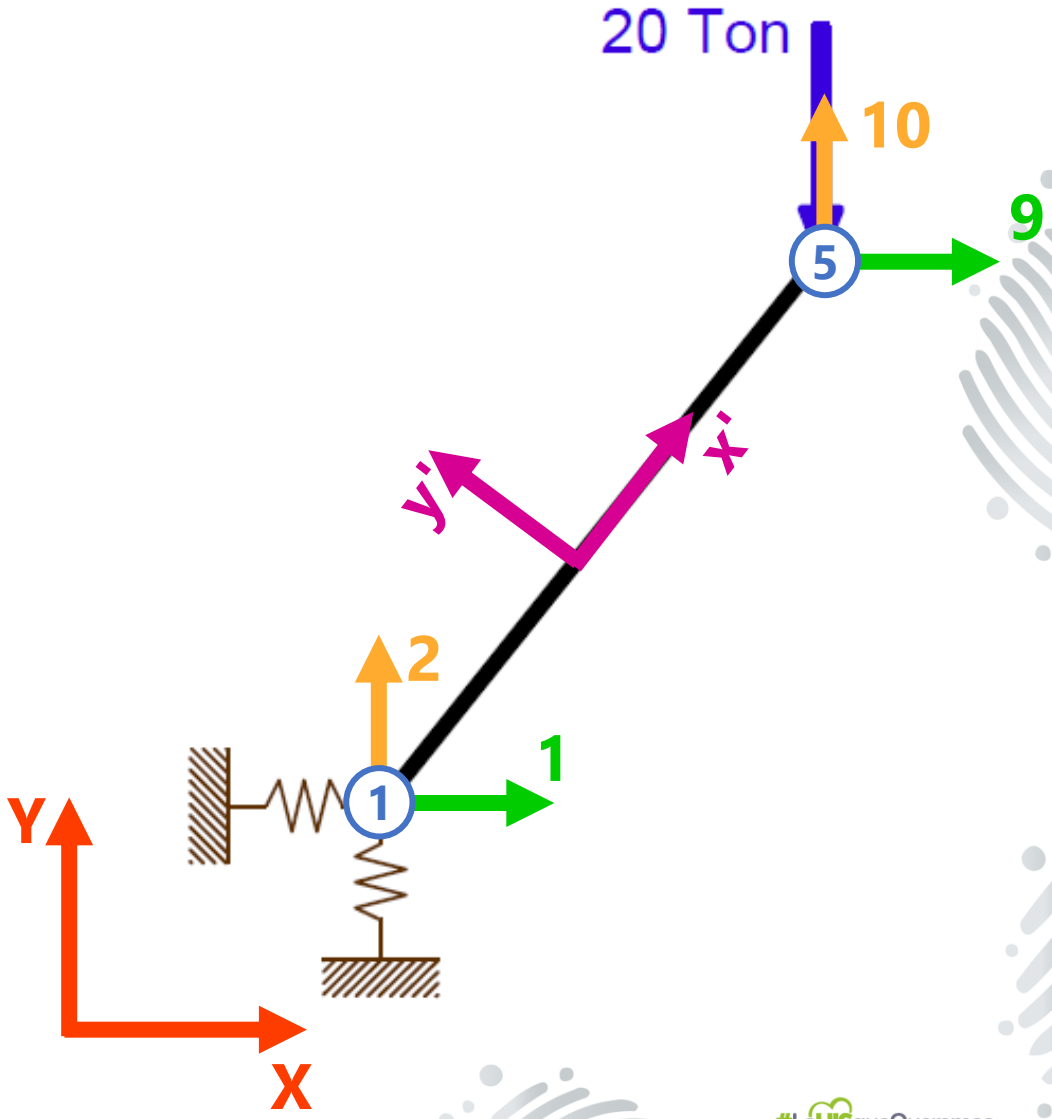


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 8

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34

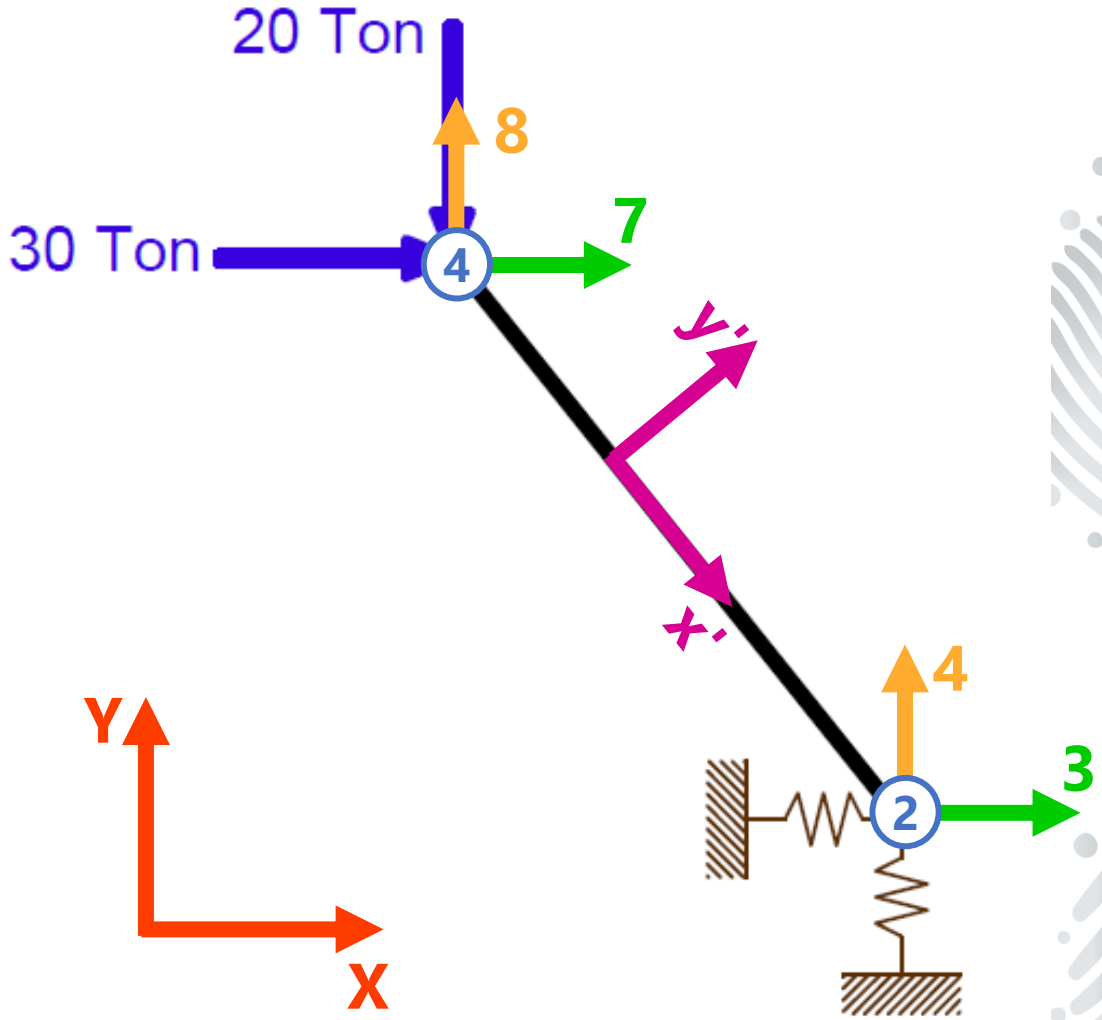


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 9

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34
9	4	2	1.28	-51.34

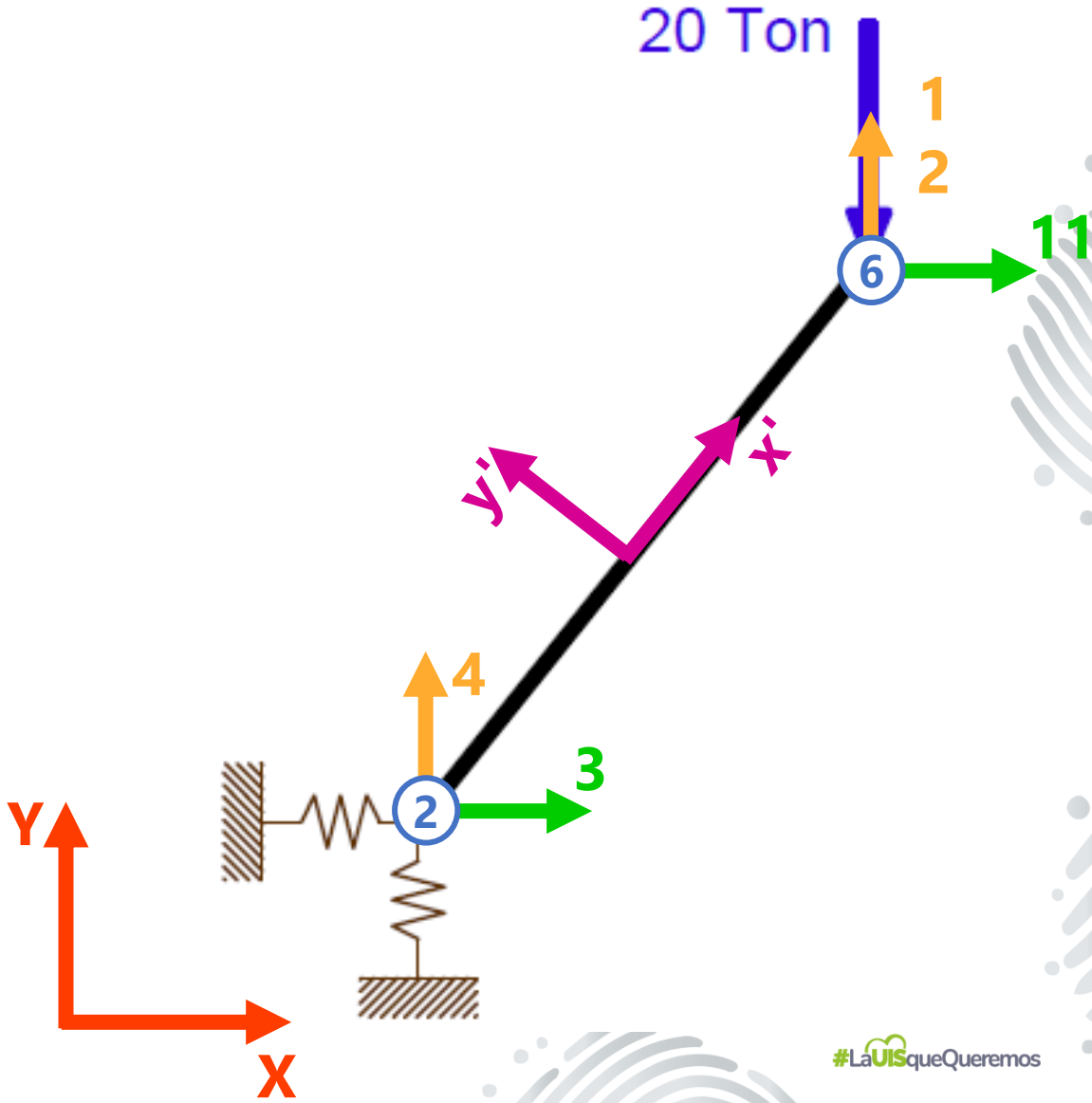


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 10

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34
9	4	2	1.28	-51.34
10	2	6	1.28	51.34

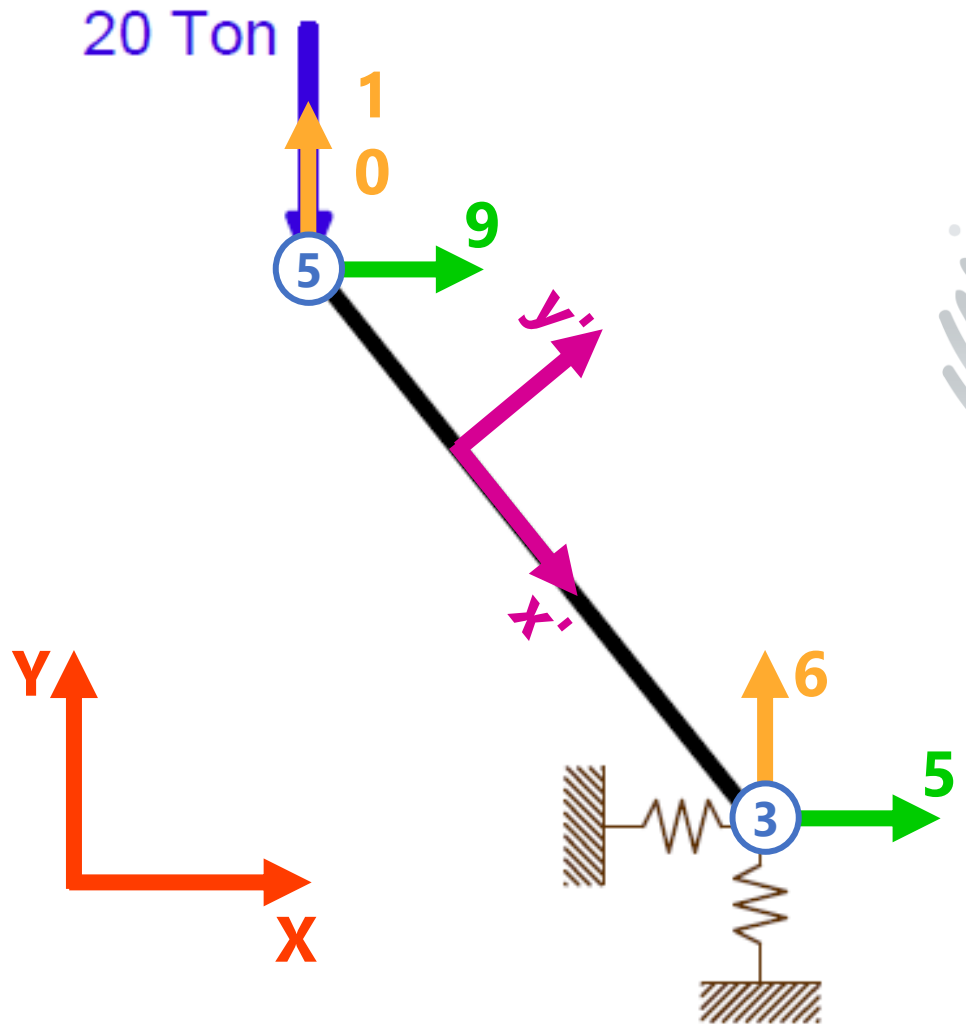


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 11

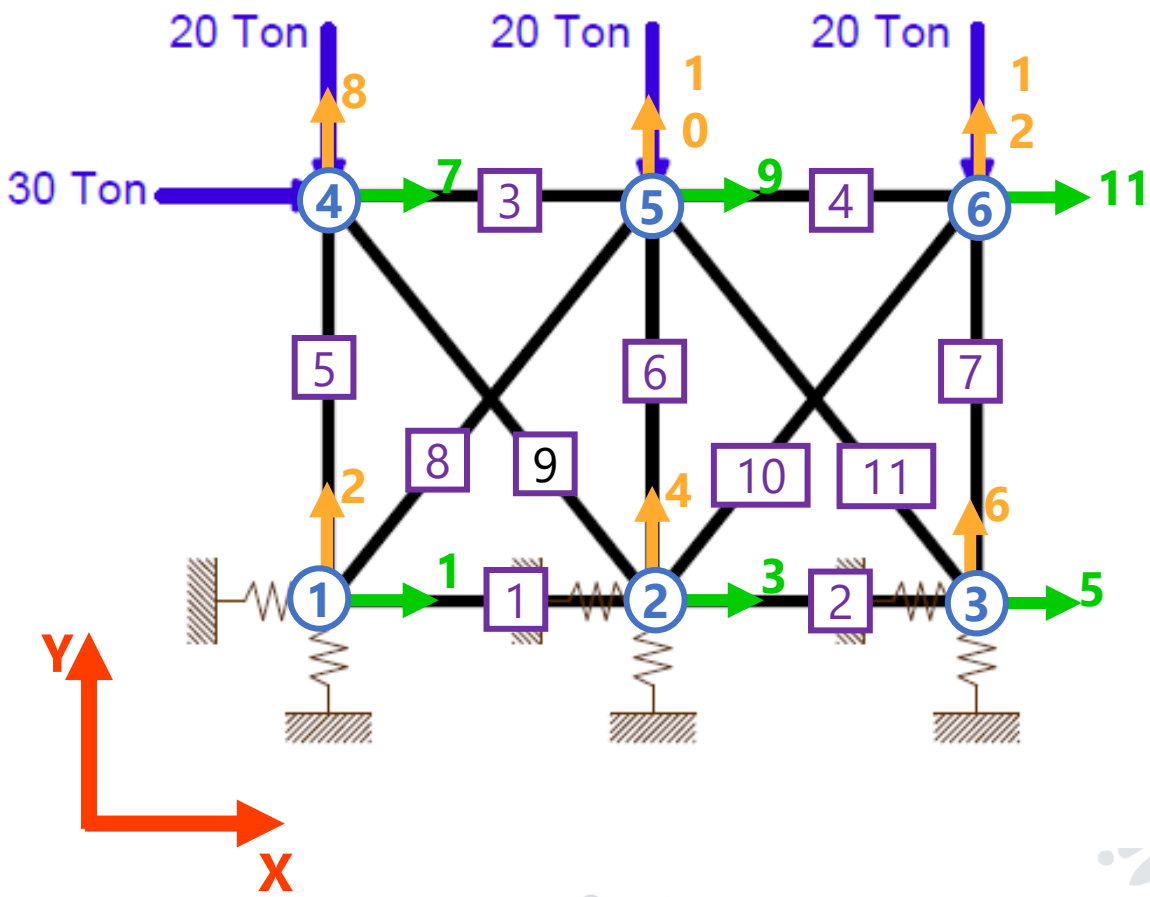
ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34
9	4	2	1.28	-51.34
10	2	6	1.28	51.34
11	5	3	1.28	-51.34



DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTOS

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34
9	4	2	1.28	-51.34
10	2	6	1.28	51.34
11	5	3	1.28	-51.34



#LaUISqueQueremos

ECUACIONES FUNDAMENTALES DEL MÉTODO MATRICIAL

Matriz de rigidez local: $[k]_L = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de transformación: $[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$

Matriz de rigidez global del elemento $[k]_G = [T]^T[k]_L[T] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\}$

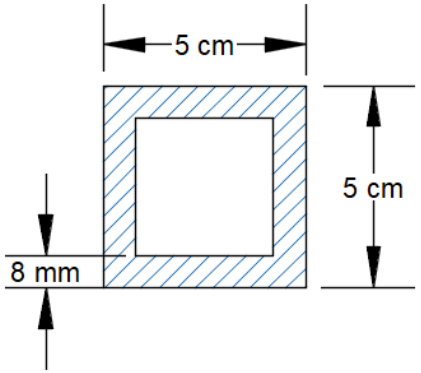
Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G$

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

ELEM	Ni	Nf	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34
9	4	2	1.28	-51.34
10	2	6	1.28	51.34
11	5	3	1.28	-51.34

NODO	X	Y
1	0.0	0.0
2	0.8	0.0
3	1.6	0.0
4	0.0	1.0
5	0.8	1.0
6	1.6	1.0

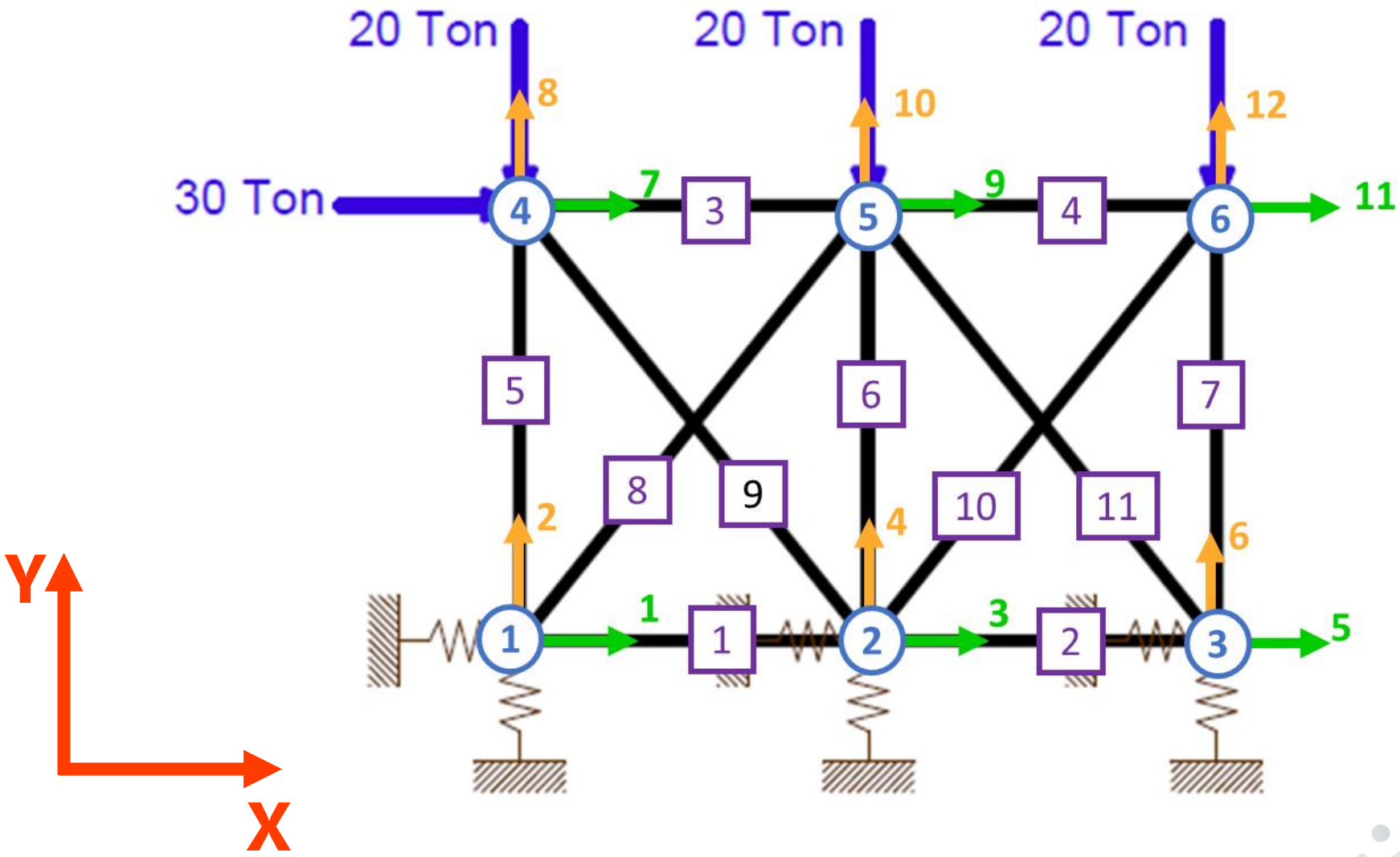


$$E = 2.1 \times 10^7 \, {Ton}/{m^2}$$

$$k_x = 8500 \, {Ton}/{m} \qquad k_y = 5000 \, {Ton}/{m}$$

#LaUISqueQueremos

CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS



#LaUISqueQueremos

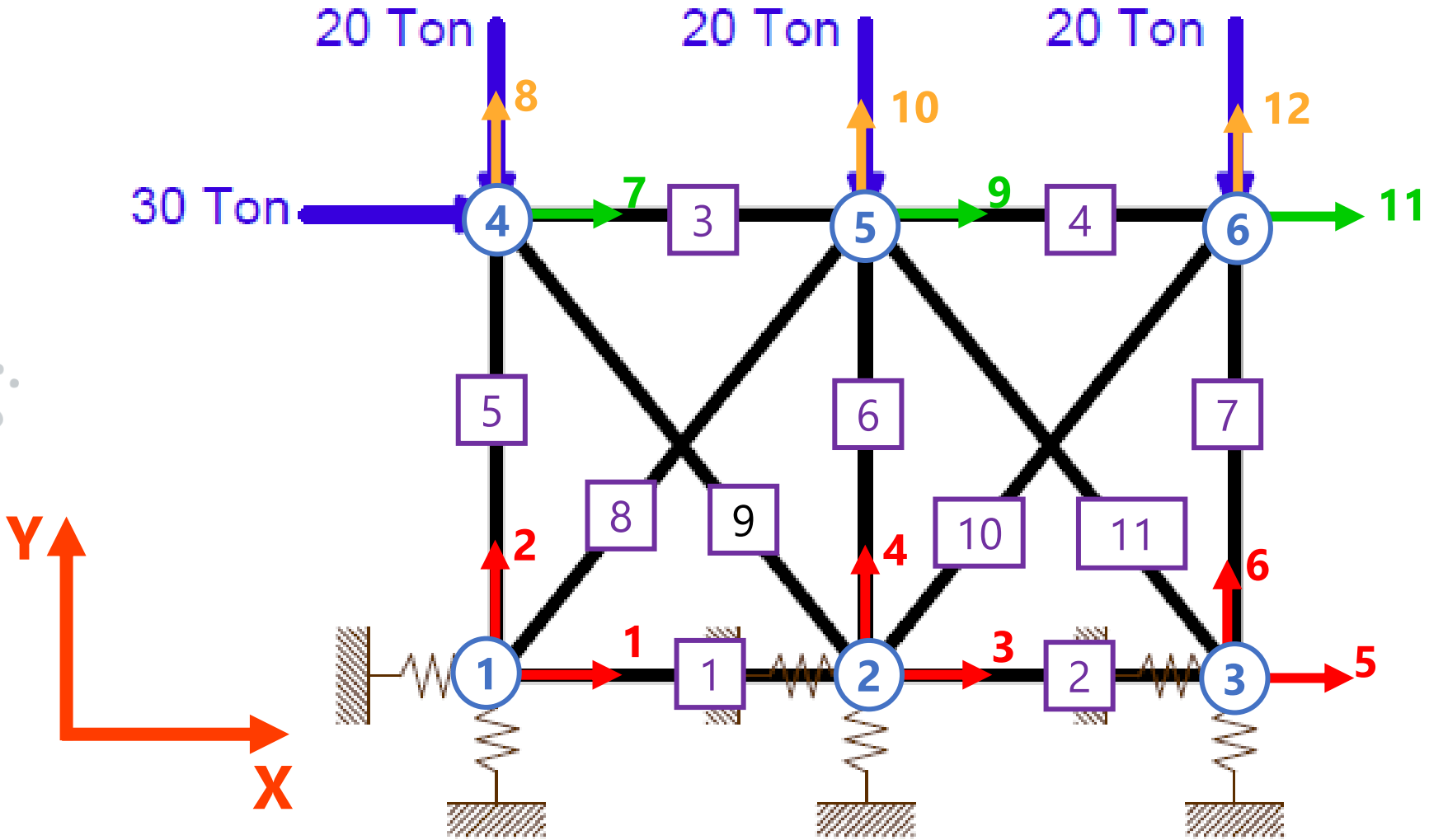
MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DEL ELEMENTO

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

$$[k]_G = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CONTORNO



Grado de libertad restringidos

$$k_x = 8500\ ^{Ton}/_{m}$$

$$k_y = 5000\ ^{Ton}/_{m}$$

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Reacciones: $\{R\} = [K]_G\{U\}_G$

Desplazamientos: $\{U\} = \left([k]_G + [k]_{ap}\right)^{-1}\{F_{ext}\}$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G$

Matriz de rigidez local: $[k]_L = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de transformación: $[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 3

Desplazamientos:

Nodo 4: Ux = 7.329×10^{-3} m, Uy = -3.573×10^{-4} m

Nodo 5: Ux = 6.812×10^{-3} m, Uy = -4.448×10^{-3} m

Nodo 6: Ux = 6.765×10^{-3} m, Uy = -8.452×10^{-3} m

Reacciones:

Nodo 1: Rx = -8.952 Ton, Ry = 0.851 Ton

Nodo 2: Rx = -10.255 Ton, Ry = 20.797 Ton

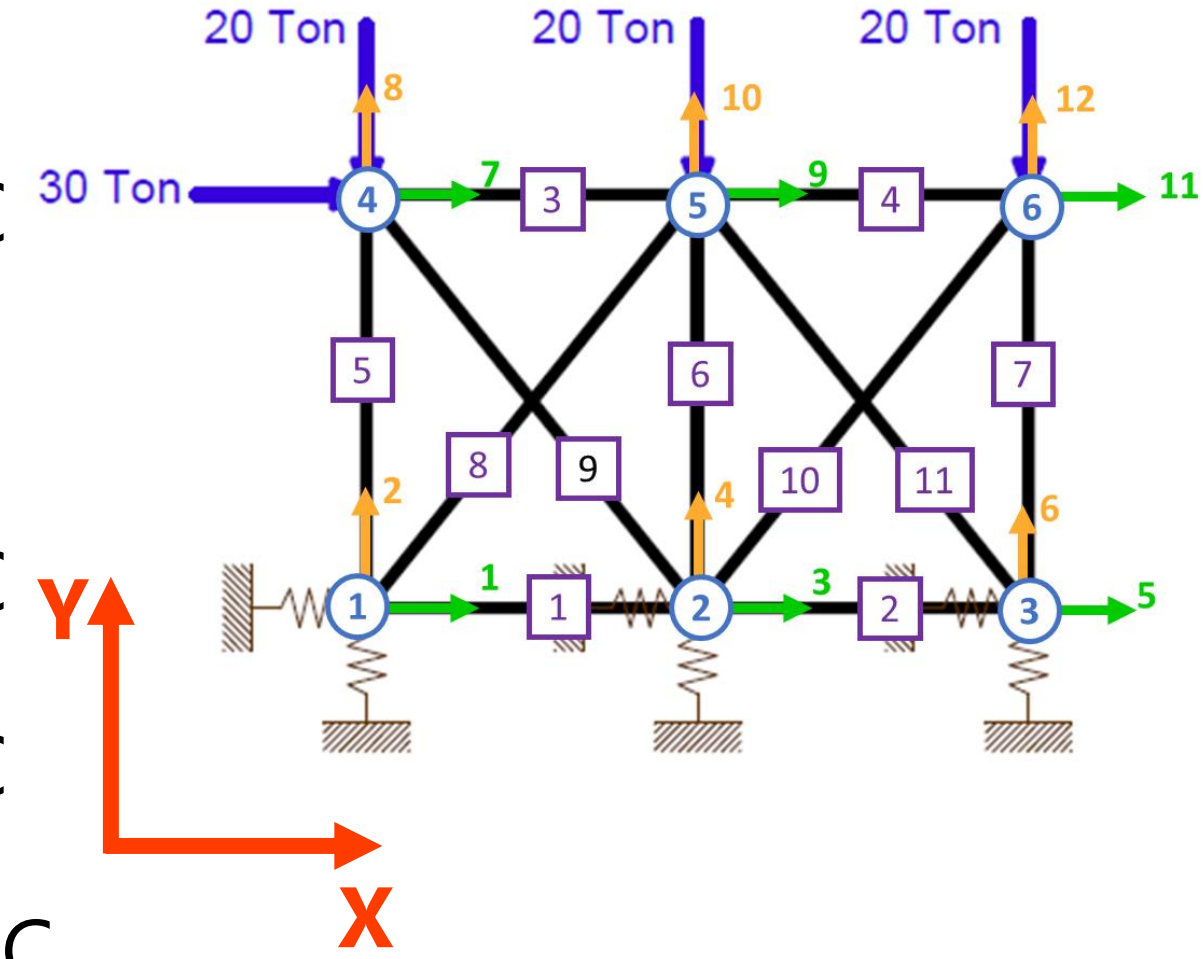
Nodo 3: Rx = -10.793 Ton, Ry = 38.351 Ton

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 3

Fuerzas axiales:

Elemento 1: 5.410 Ton - T
Elemento 2: 2.232 Ton – T
Elemento 3: -18.222 Ton – C
Elemento 4: -1.656 Ton – C
Elemento 5: -5.278 Ton – C
Elemento 6: -8.145 Ton – C
Elemento 7: -22.070 Ton – C
Elemento 8: 5.669 Ton – T
Elemento 9: -18.853 Ton – C
Elemento 10: 2.651 Ton – T
Elemento 11: -20.850 Ton – C



Universidad Industrial de Santander

UIS 1948 2025

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Armaduras
Ejercicio 3
Modelo OpenSees

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

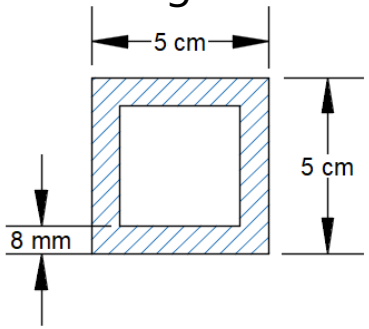
#LaUISqueQueremos

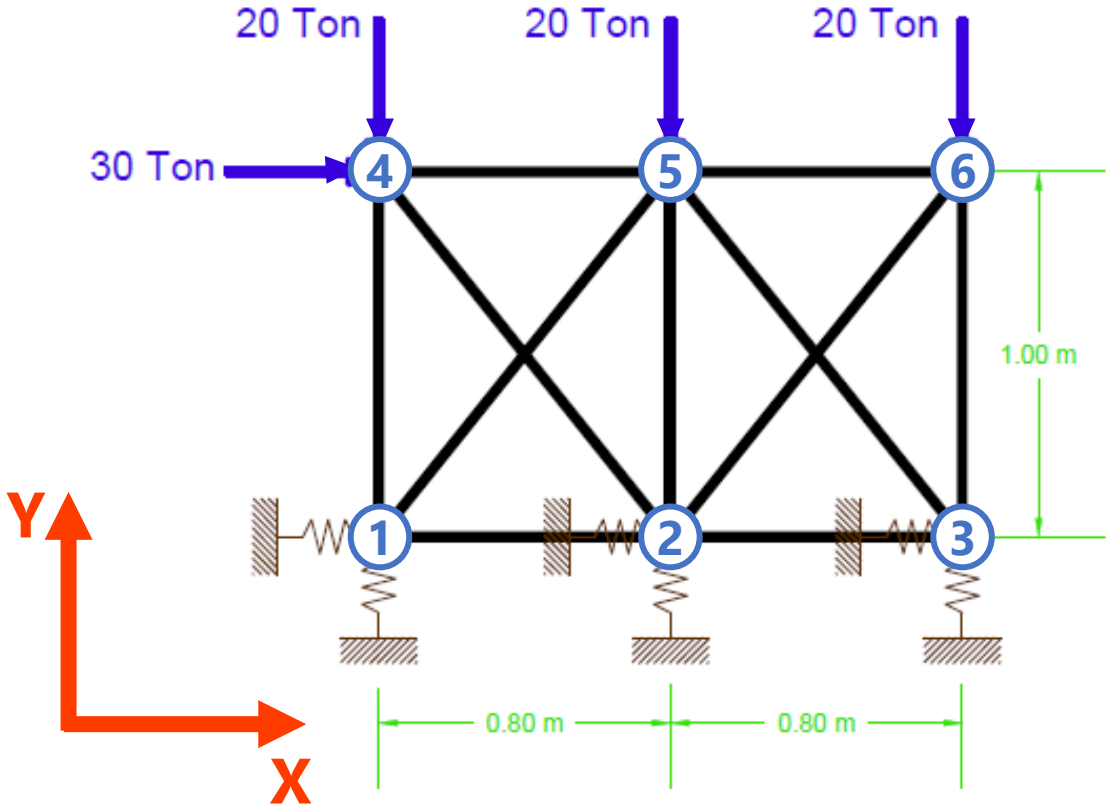
ARMADURAS: EJERCICIO 3

Se tiene una armadura plana dispuesta como se muestra en la figura, conformada por barras articuladas en sus extremos y organizada en módulos de 0.8 m de luz horizontal y 1 m de altura, con apoyos elásticos en los nodos 1, 2 y 3. Utilizando el método matricial de rigidez y con base en la información proporcionada, los ejes globales XY indicados y la nomenclatura establecida para los nodos, se solicita lo siguiente:

- Determinar los desplazamientos en los nodos 4, 5 y 6 de la estructura.
- Calcular las reacciones en los apoyos elásticos.
- Determinar las fuerzas internas en cada barra, indicando si se encuentran a tracción o compresión.

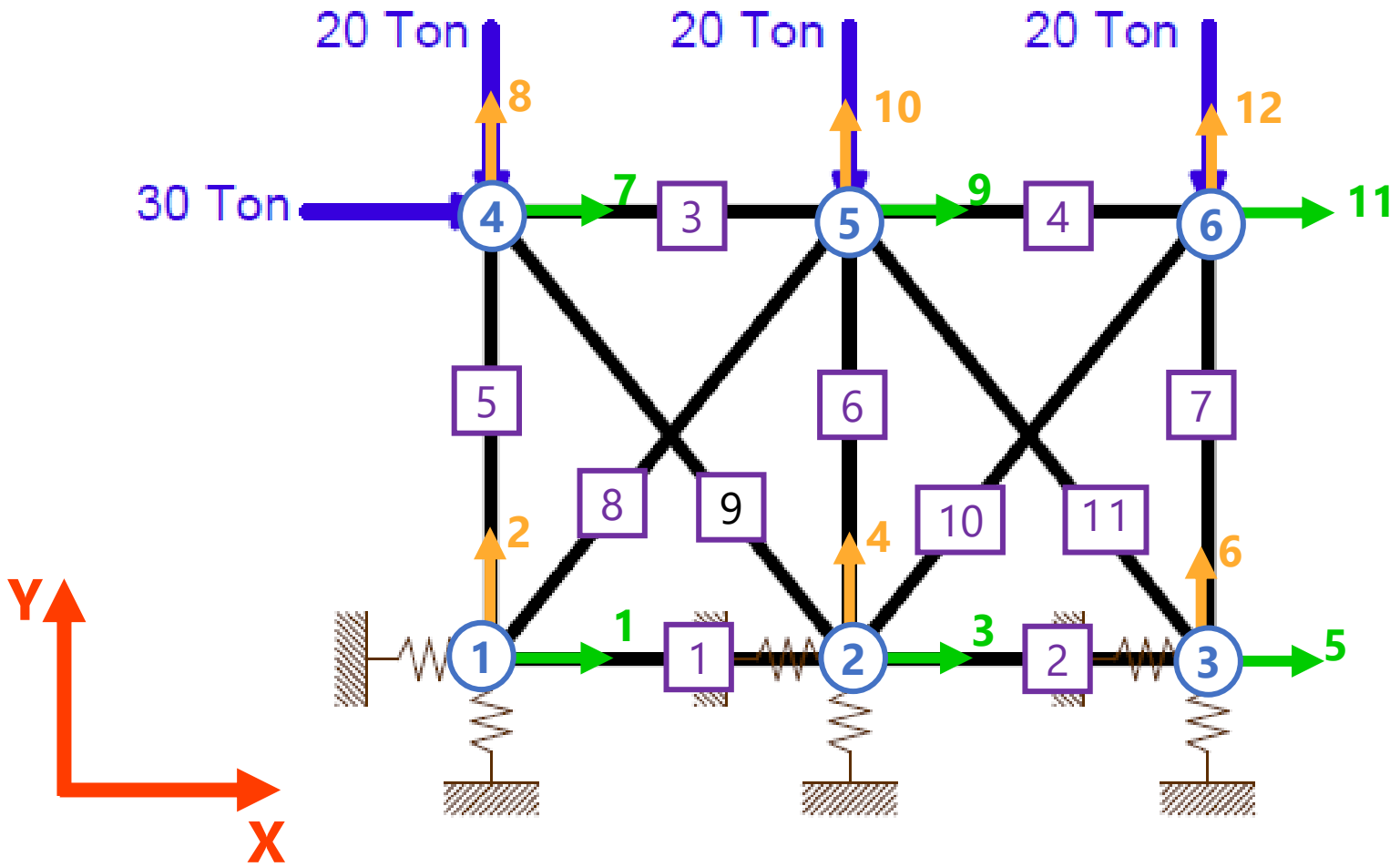
Desprecie el peso propio de los elementos y considere únicamente las cargas y apoyos indicados. La rigidez de los apoyos elásticos en kx=8500 Ton/m y ky=5000 Ton/m. Todas las barras poseen un módulo de elasticidad $E=2.1x10^7$ Ton/m^2 y una sección transversal tubular cuadrada como se indica en la figura.





#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA



Número de nodo: 6

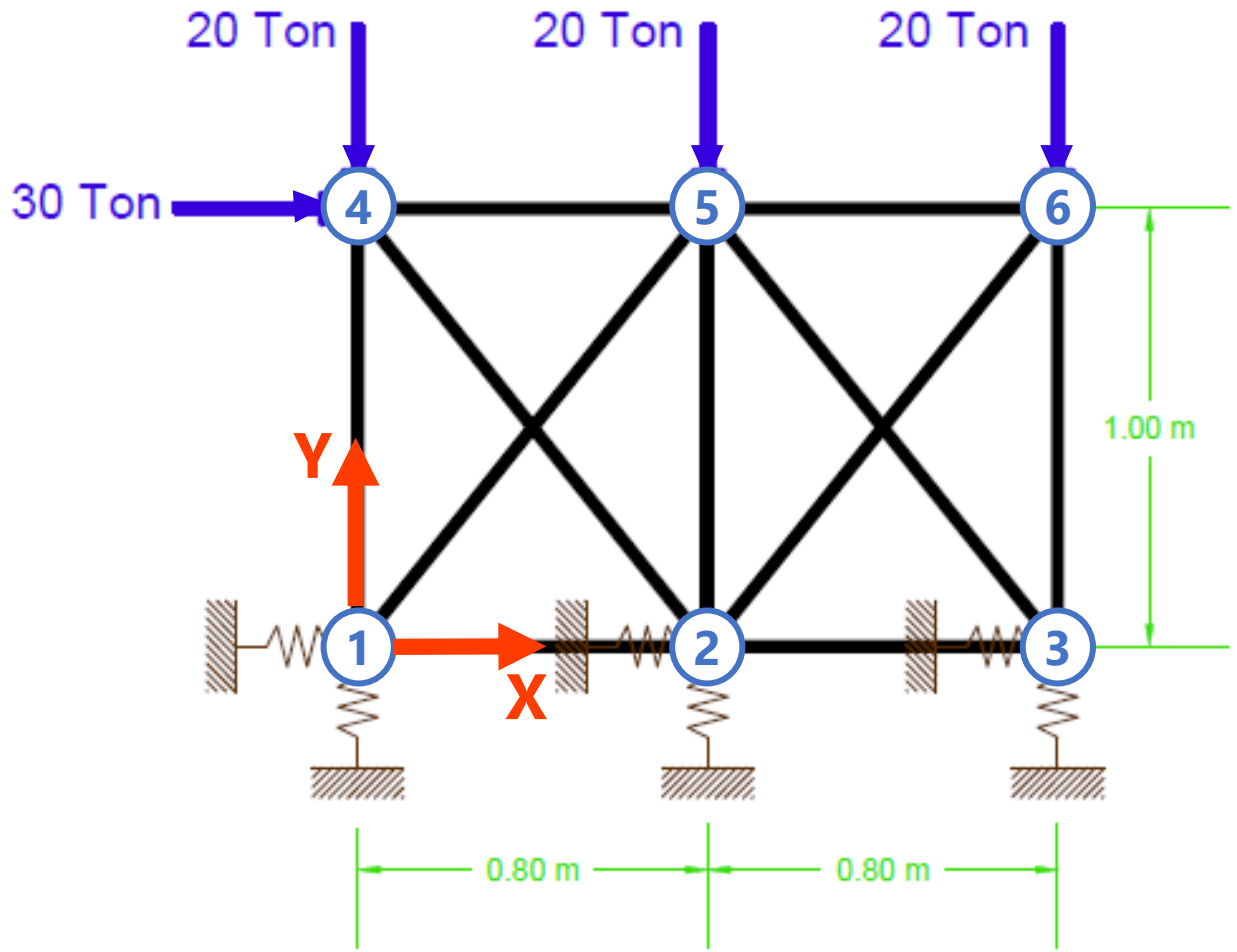
Número de elementos: 11

Número de grados de libertad: 12

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

COORDENADAS DE LOS NODOS



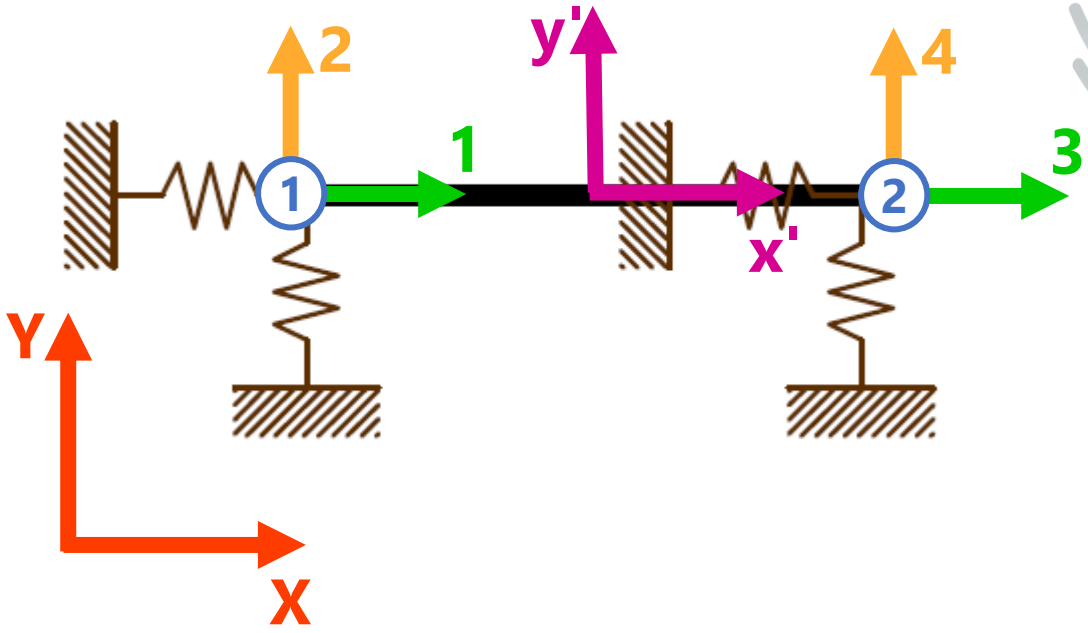
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.8	0.0
3	1.6	0.0
4	0.0	1.0
5	0.8	1.0
6	1.6	1.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0

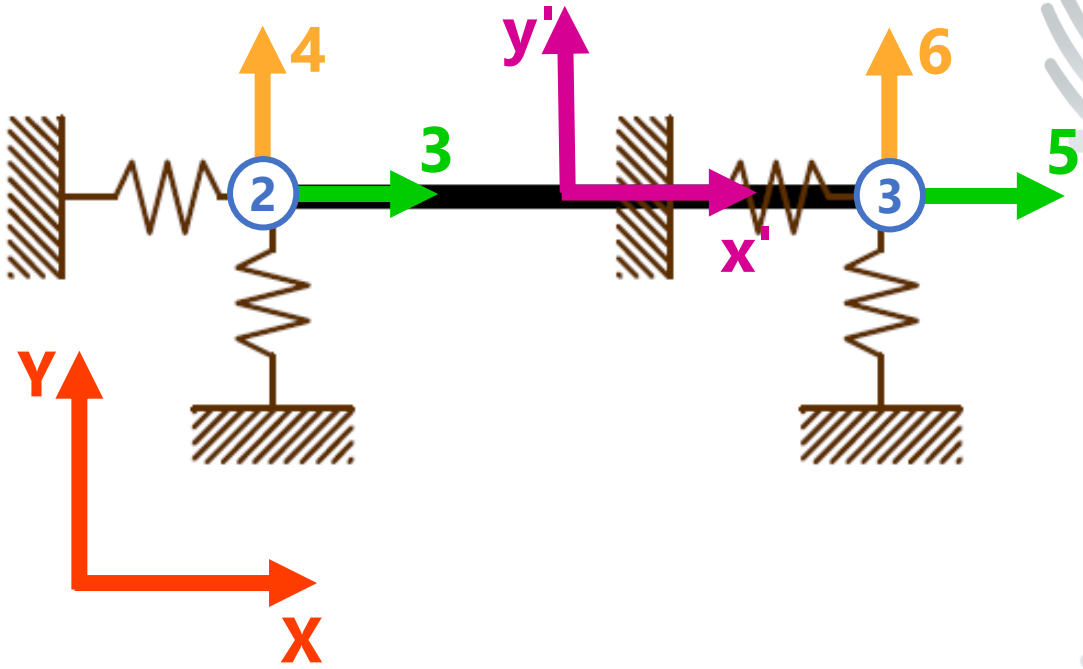


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0

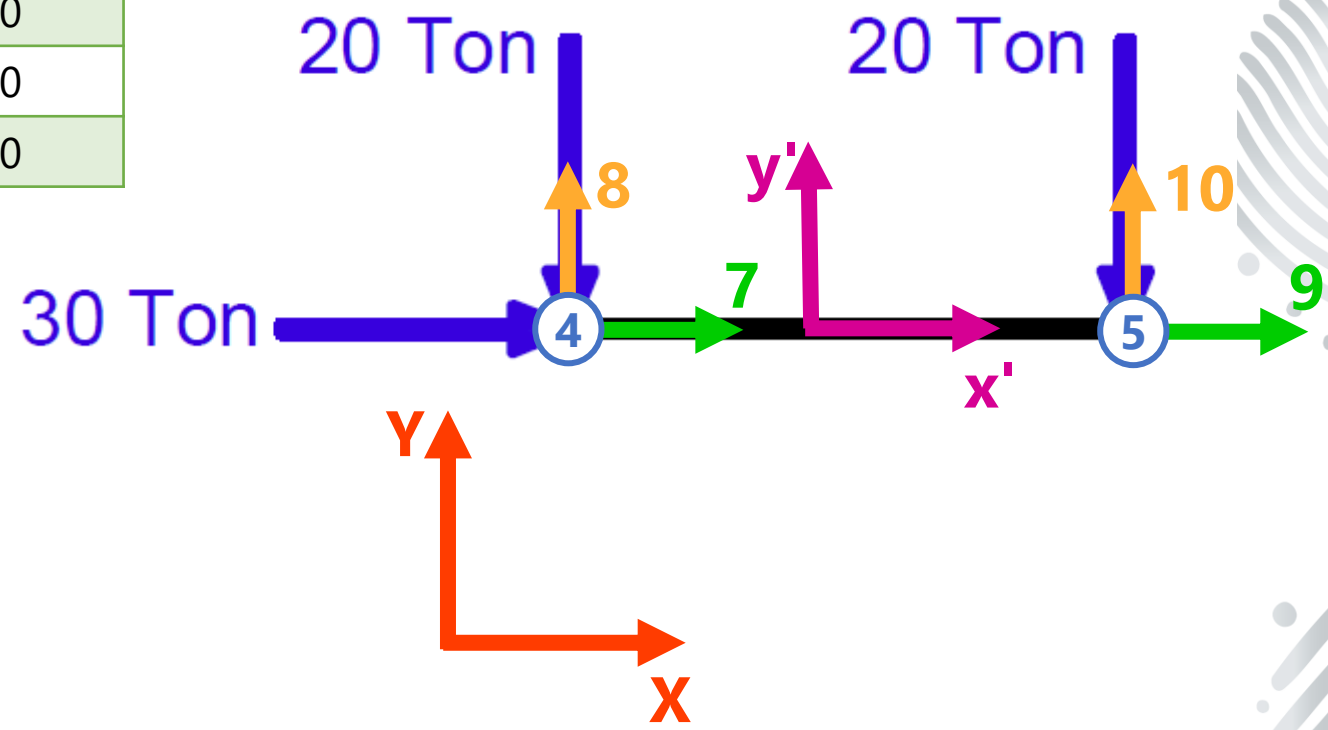


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 3

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0

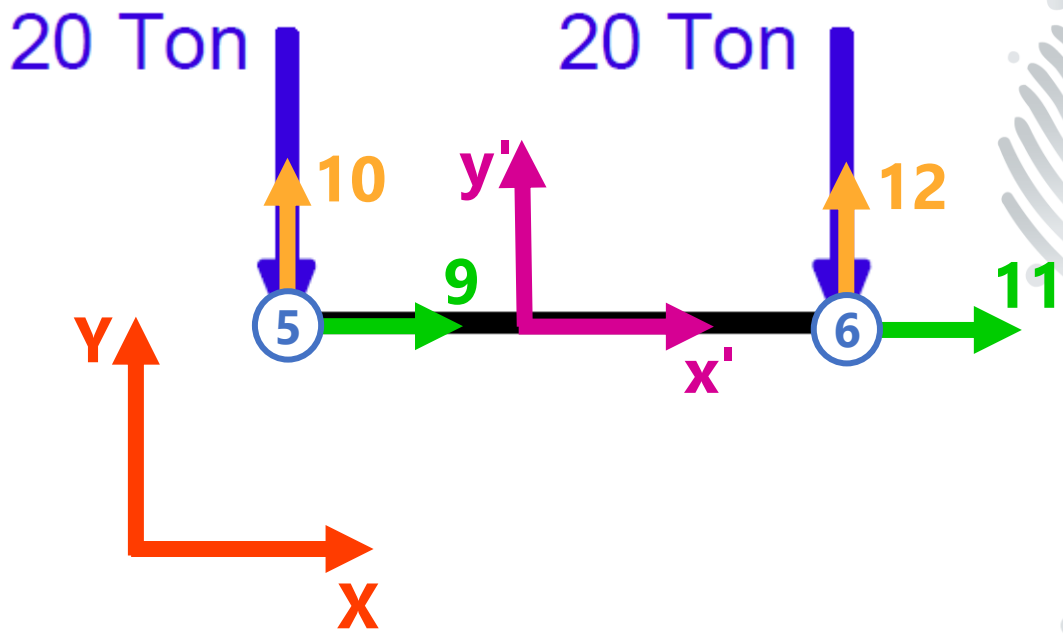


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 4

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0

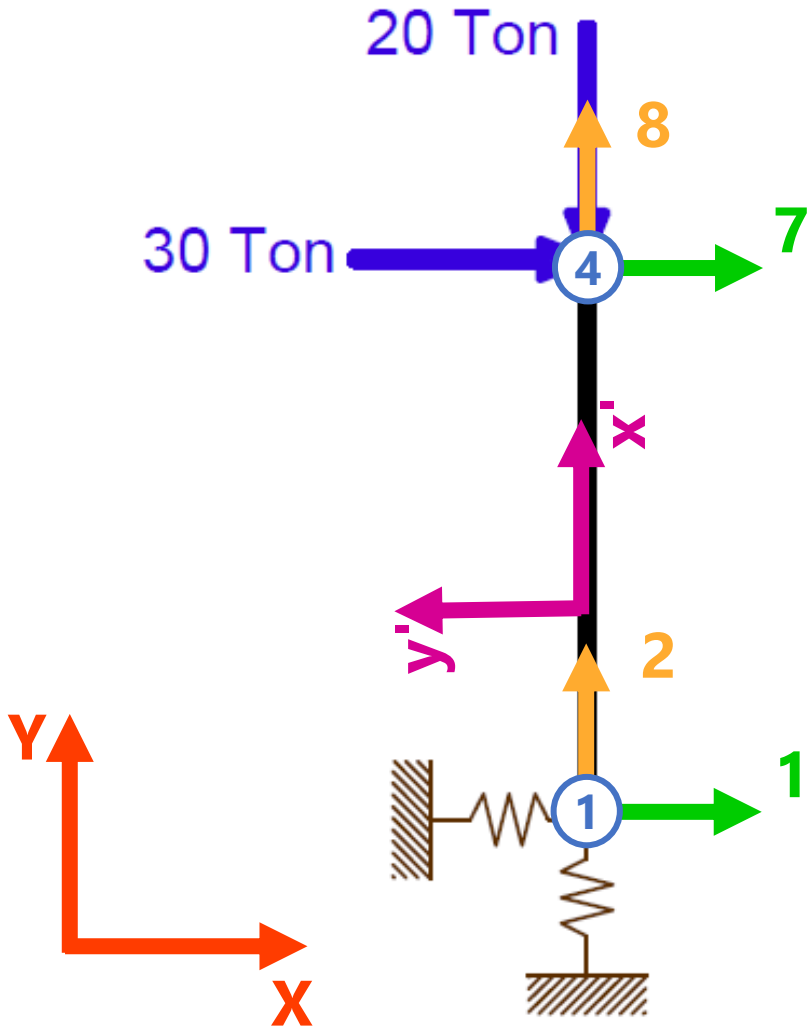


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 5

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90

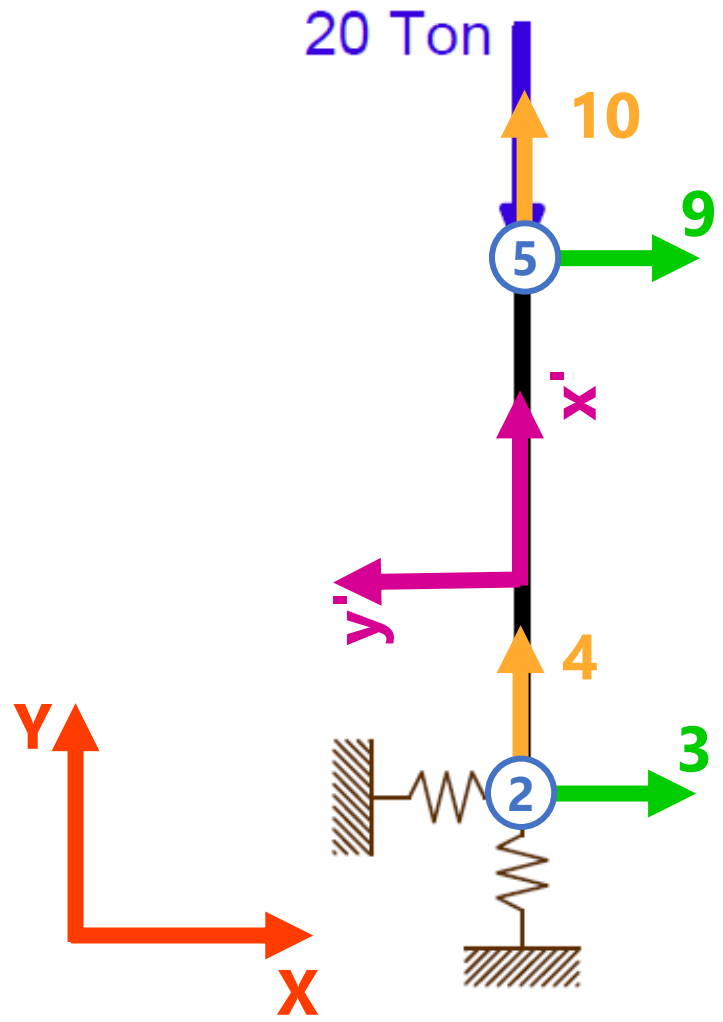


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 6

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90

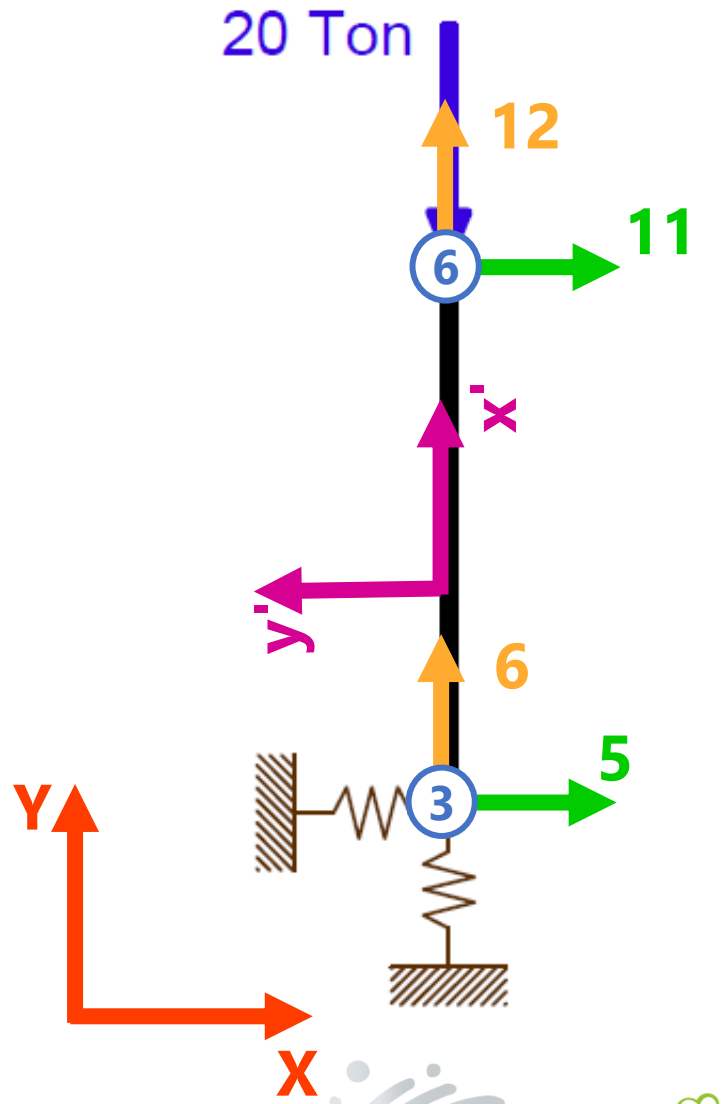


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 7

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90

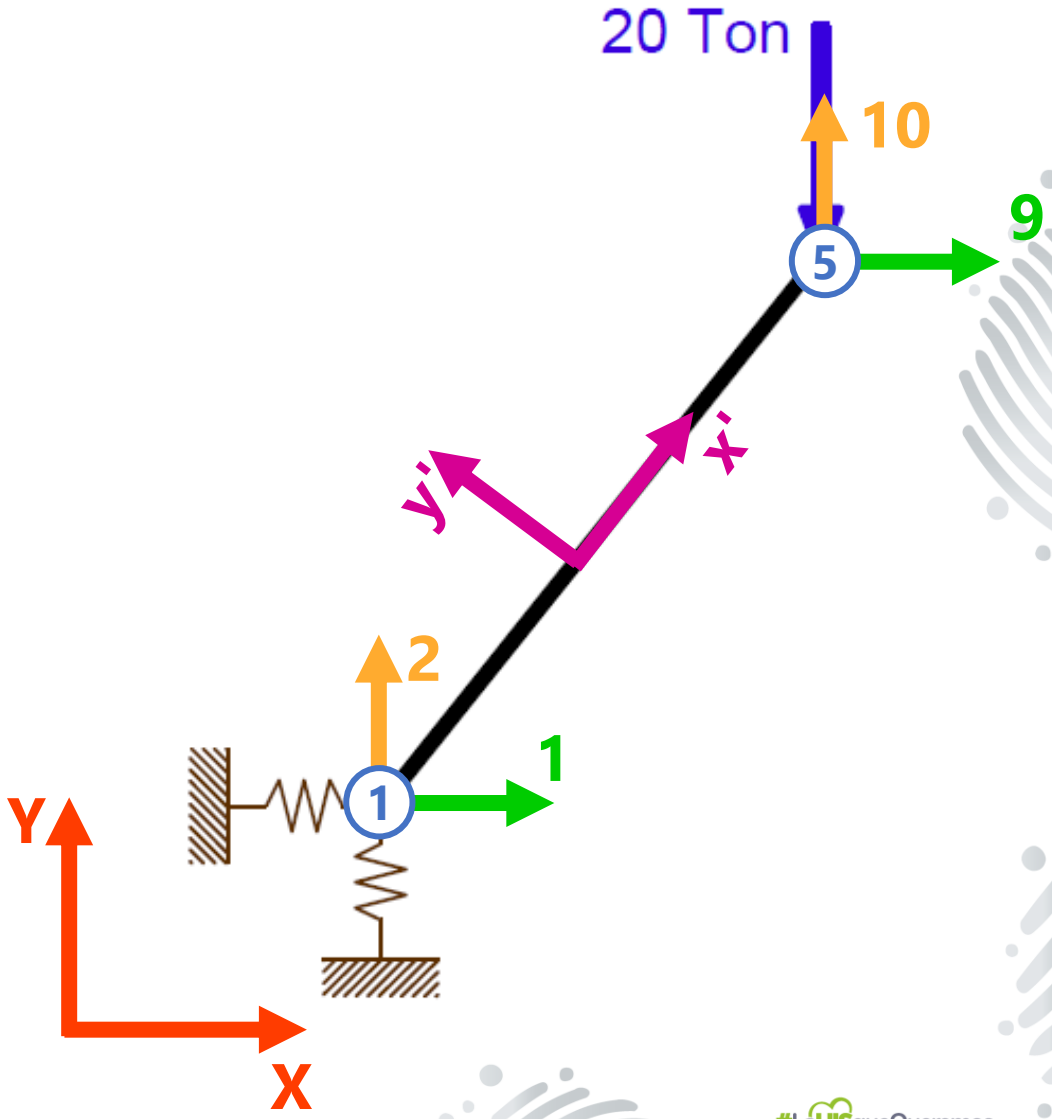


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 8

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34

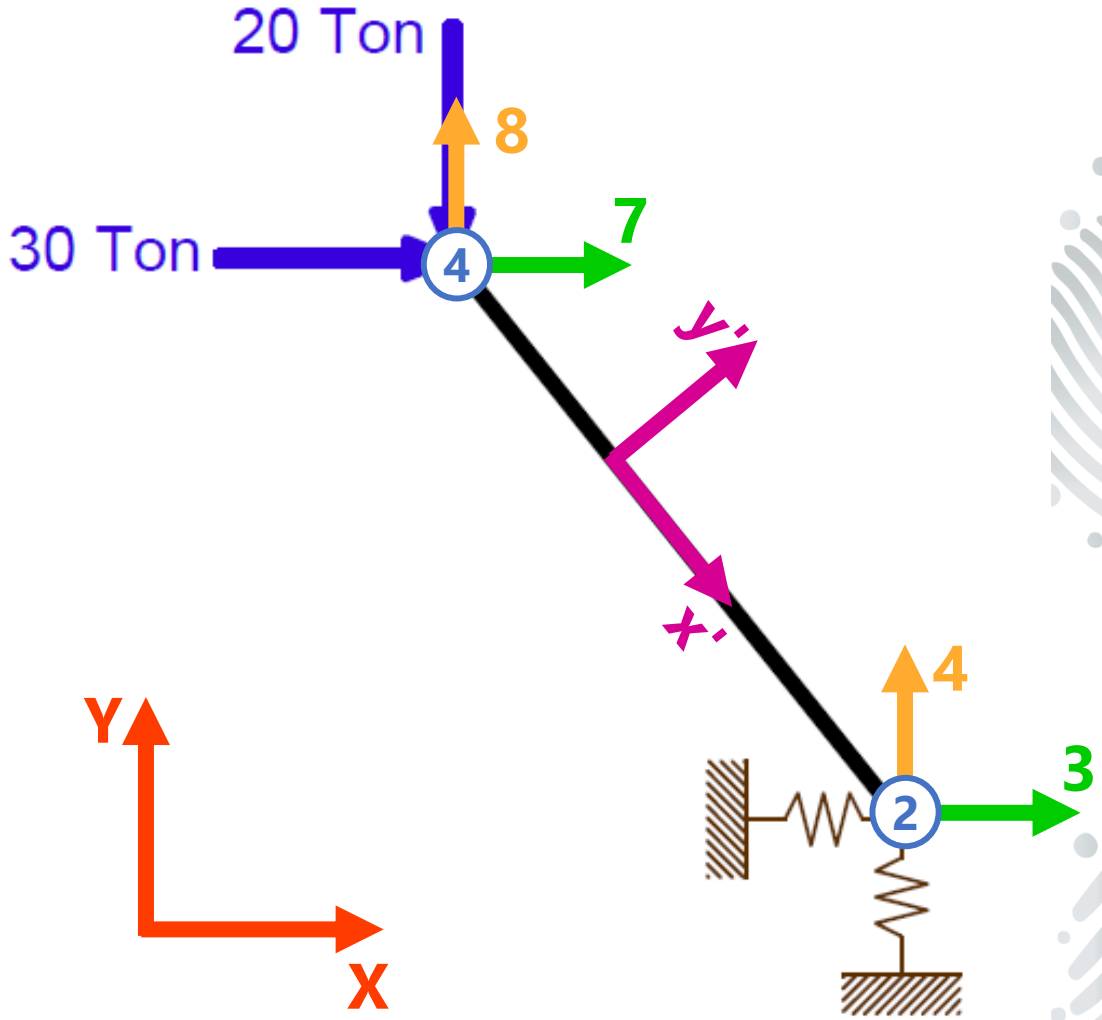


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 9

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34
9	4	2	1.28	-51.34

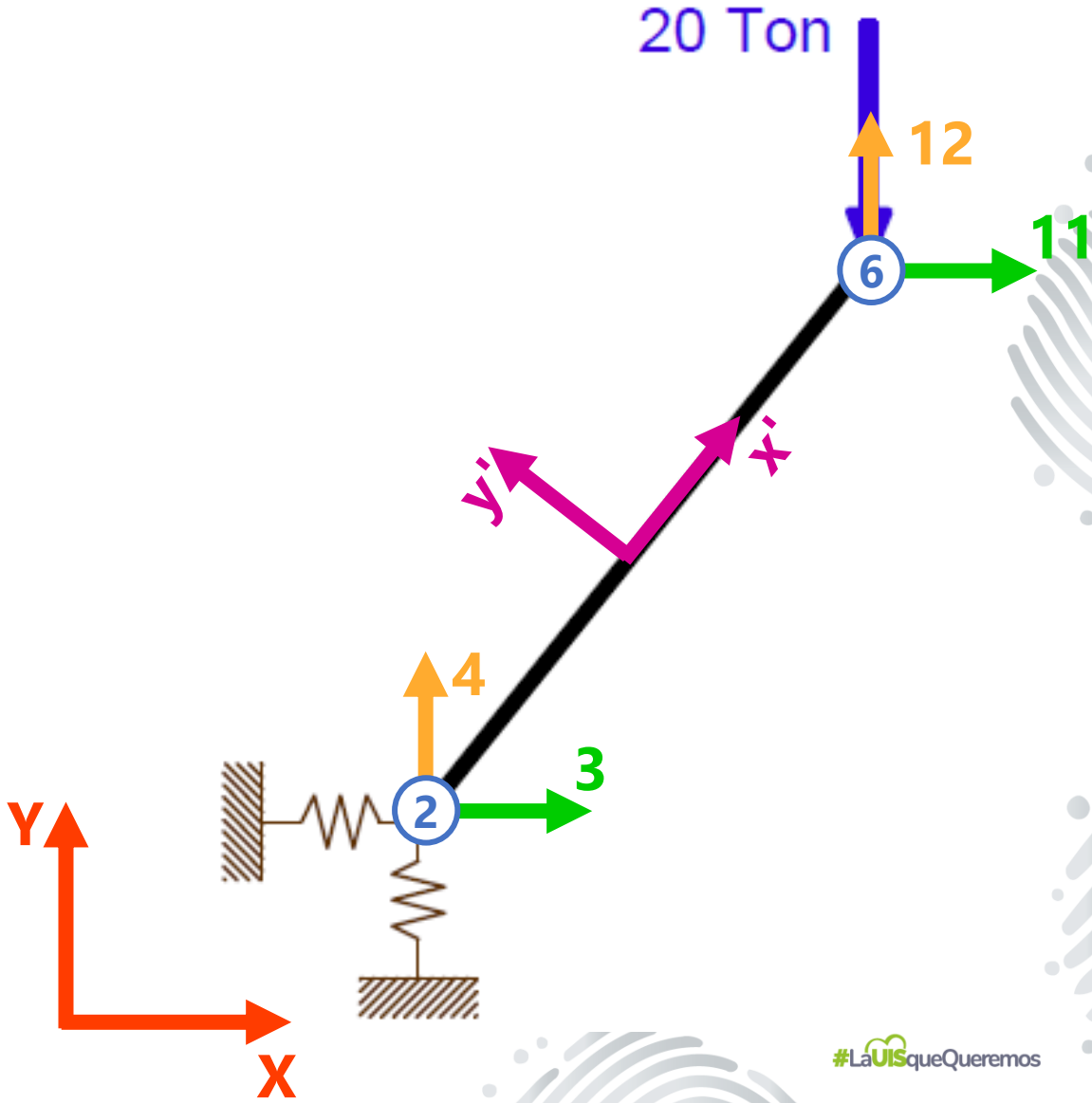


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 10

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34
9	4	2	1.28	-51.34
10	2	6	1.28	51.34

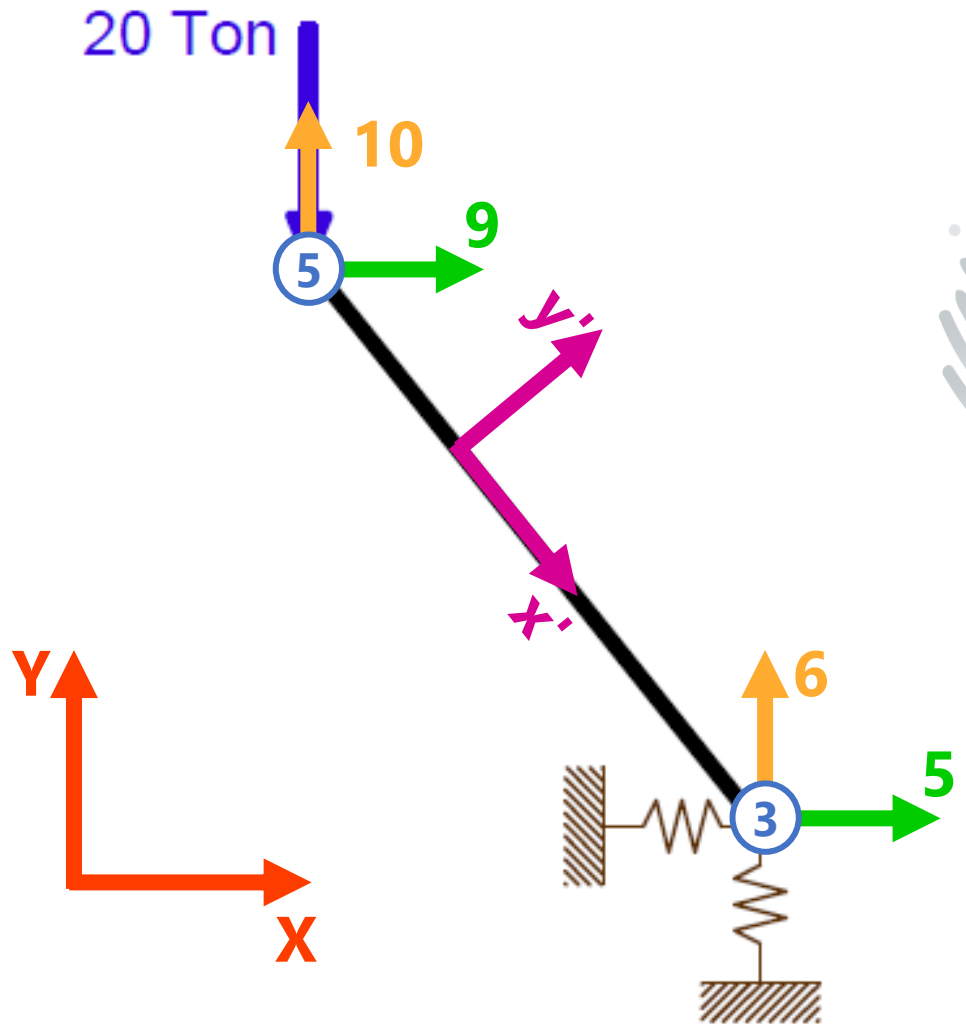


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LA ARMADURA

ELEMENTO 11

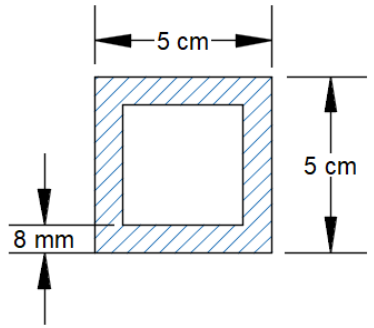
ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34
9	4	2	1.28	-51.34
10	2	6	1.28	51.34
11	5	3	1.28	-51.34



DATOS DE ENTRADA

ELEM	Ni	Nf	L [m]	θ [°]
1	1	2	0.8	0
2	2	3	0.8	0
3	4	5	0.8	0
4	5	6	0.8	0
5	1	4	1.0	90
6	2	5	1.0	90
7	3	6	1.0	90
8	1	5	1.28	51.34
9	4	2	1.28	-51.34
10	2	6	1.28	51.34
11	5	3	1.28	-51.34

NODO	X	Y
1	0.0	0.0
2	0.8	0.0
3	1.6	0.0
4	0.0	1.0
5	0.8	1.0
6	1.6	1.0

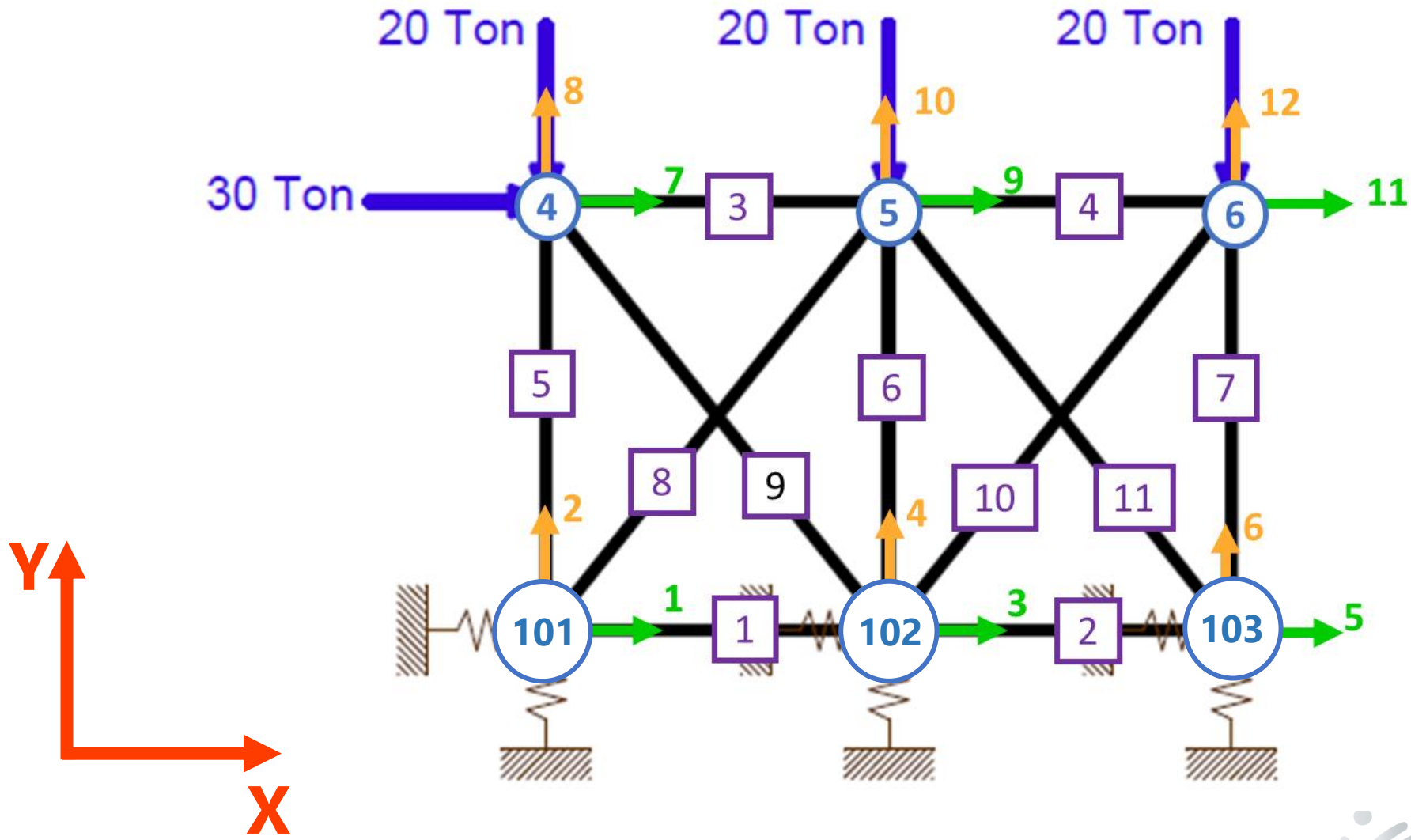


$$E = 2.1 \times 10^7 \, Ton/m^2$$

$$K_x = 8500 \, Ton/m \qquad K_y = 5000 \, Ton/m$$

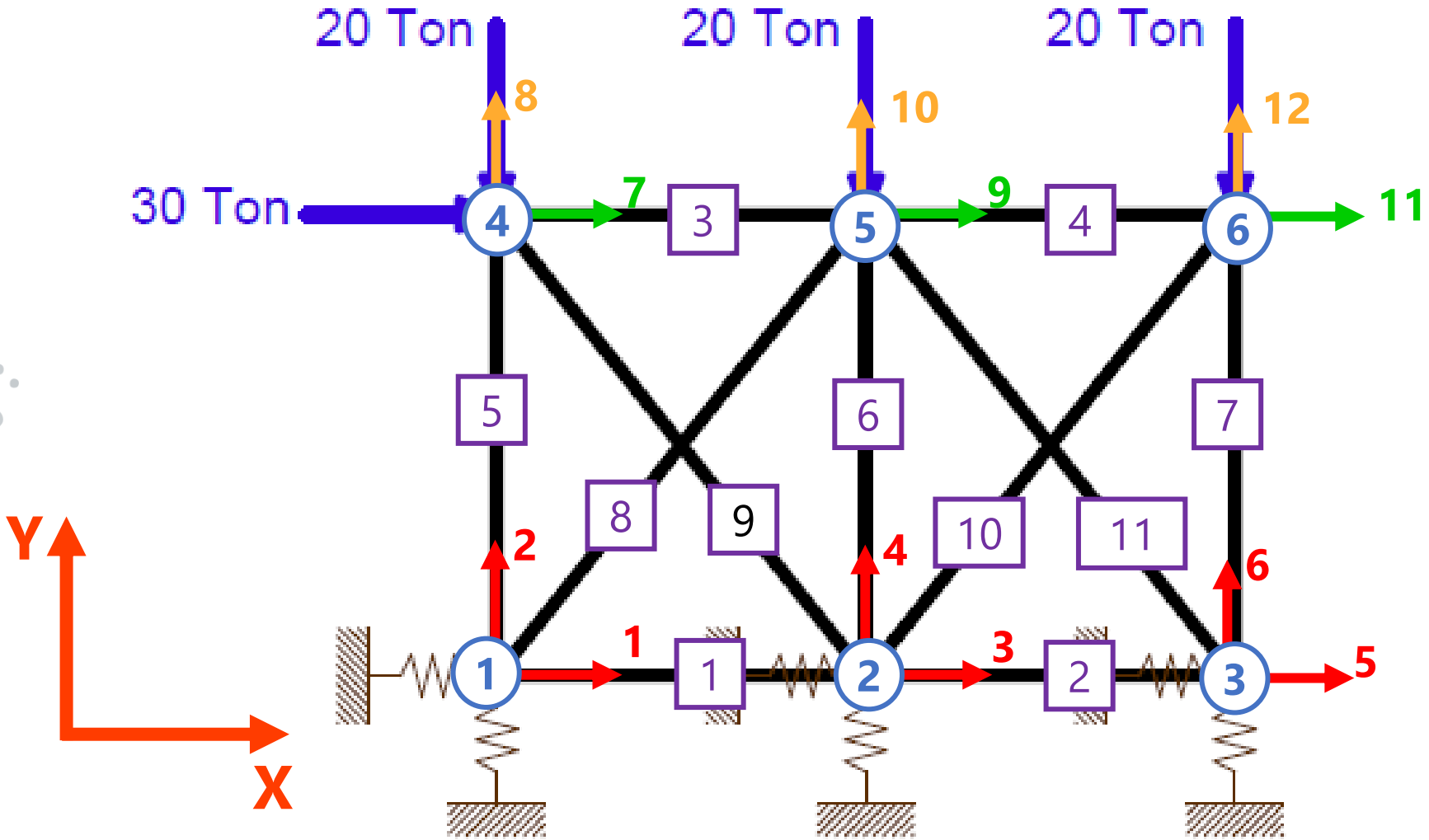
#LaUISqueQueremos

CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS



#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CONTORNO



Grado de libertad restringidos

$$k_x = 8500\ ^{Ton}/_{m}$$

$$k_y = 5000\ ^{Ton}/_{m}$$

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 3

Desplazamientos:

Nodo 4: Ux = 7.329×10^{-3} m, Uy = -3.573×10^{-4} m

Nodo 5: Ux = 6.812×10^{-3} m, Uy = -4.448×10^{-3} m

Nodo 6: Ux = 6.765×10^{-3} m, Uy = -8.452×10^{-3} m

Reacciones:

Nodo 1: Rx = -8.952 Ton, Ry = 0.851 Ton

Nodo 2: Rx = -10.255 Ton, Ry = 20.797 Ton

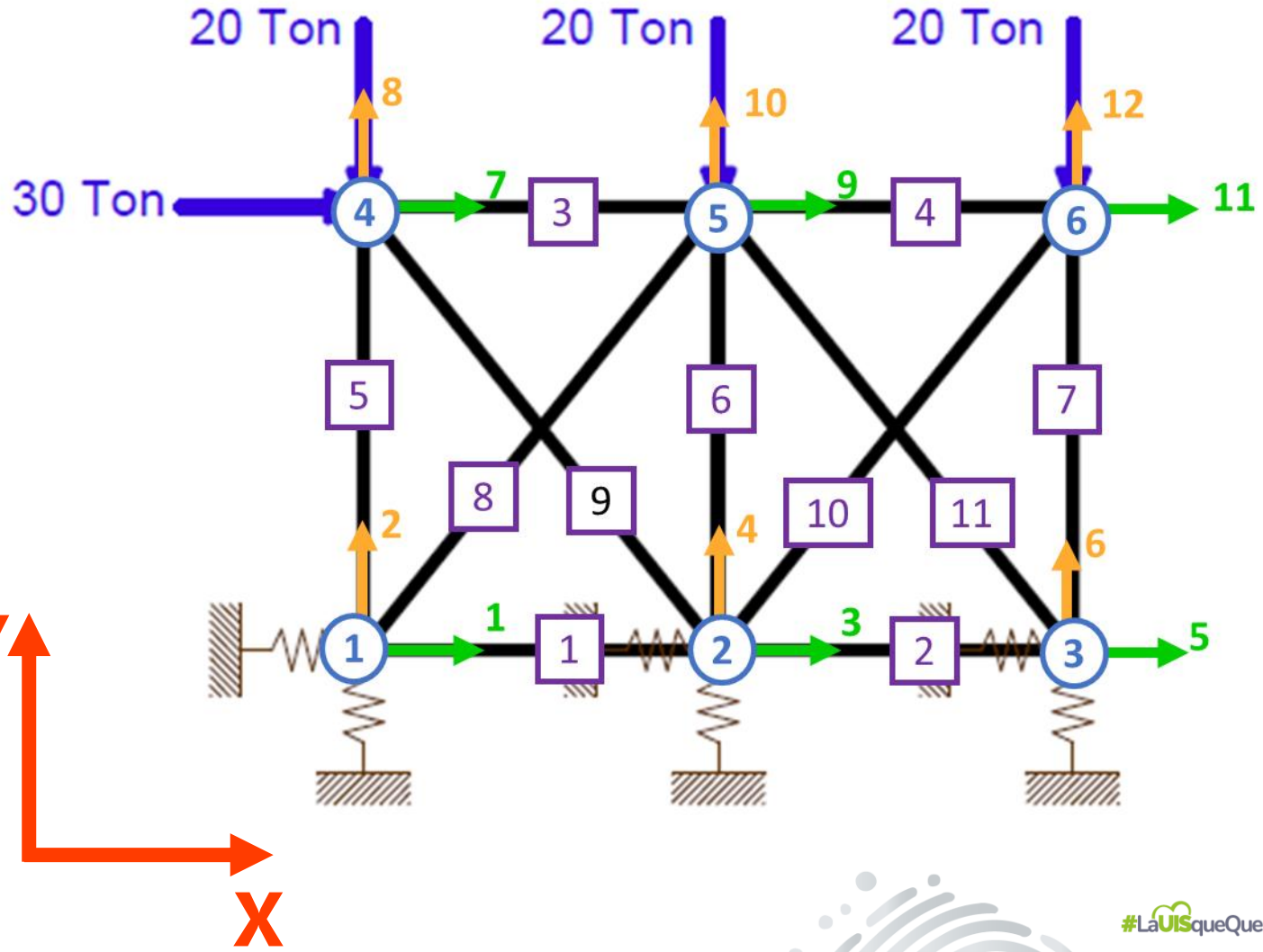
Nodo 3: Rx = -10.793 Ton, Ry = 38.351 Ton

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN EJERCICIO 3

Fuerzas axiales:

E1: -5.410 Ton - T
E2: -2.232 Ton – T
E3: 18.222 Ton – C
E4: 1.656 Ton – C
E5: 5.278 Ton – C
E6: 8.145 Ton – C
E7: 22.070 Ton – C
E8: -5.669 Ton – T
E9: 18.853 Ton – C
E10: -2.651 Ton – T
E11: 20.850 Ton – C



#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

UIS 1948 2025

¡Gracias!

Pórticos

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Pórticos
Ejercicio 1
Método Matricial de rigidez en Python

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

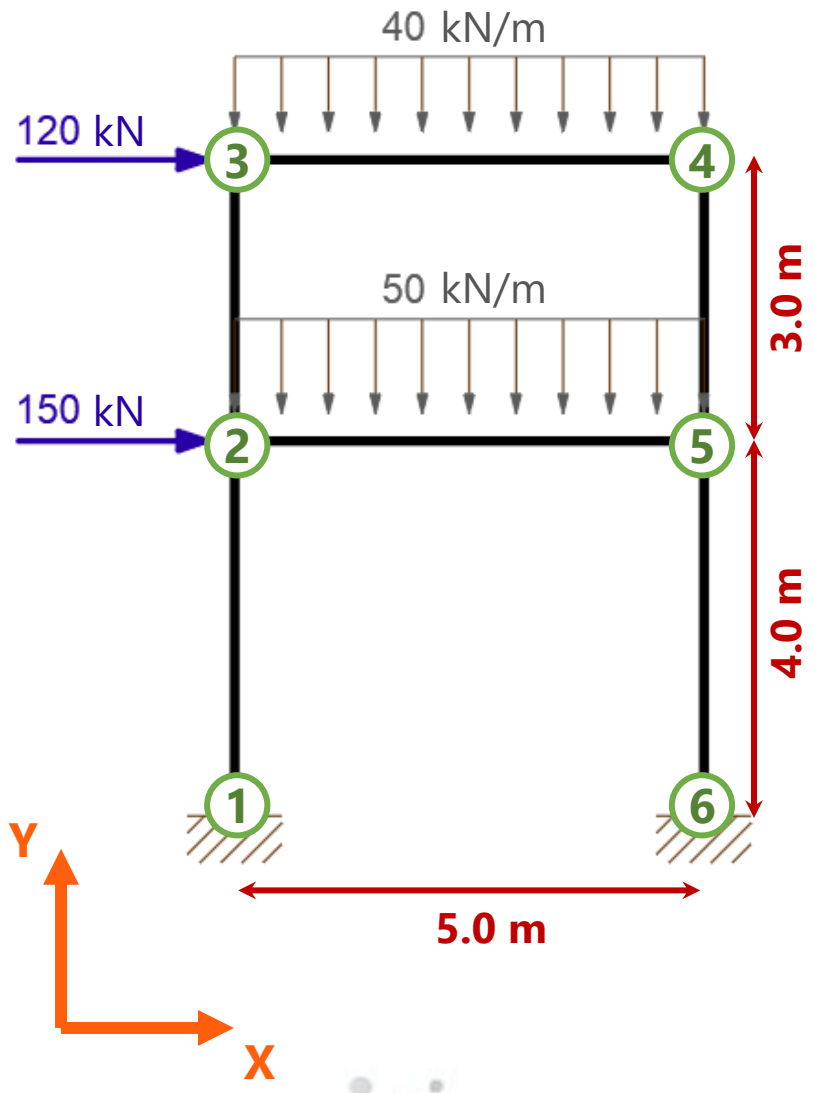
#LaUISqueQueremos

PÓRTICOS: EJERCICIO 1

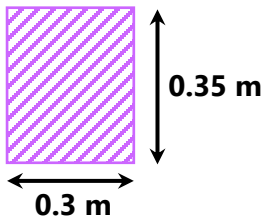
Se tiene un **pórtico plano de dos niveles**, con apoyos empotrados en la base, sometido a cargas horizontales concentradas y cargas distribuidas verticales en las vigas, tal como se muestra en la figura.
Utilizando el **método matricial de rigidez** y considerando los ejes globales XY indicados, se solicita:

- Determinar los desplazamientos horizontales y verticales en los nodos del nivel superior (3 y 4).
- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Calcular fuerza axial, fuerza cortante y momento flector en cada elemento.

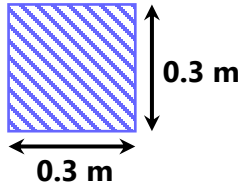
Desprecie el peso propio de los elementos. Considere únicamente las cargas indicadas en la figura. Todos los elementos están hechos de concreto de f'c=28 MPa y las secciones transversales como se indica a continuación:



Vigas



Columnas



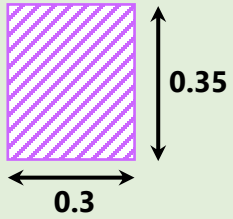
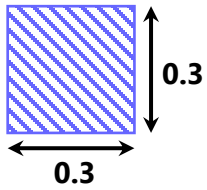
#LaUISqueQueremos

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

Módulo de elasticidad: $E = 4700\sqrt{f'c}\ (MPa)$

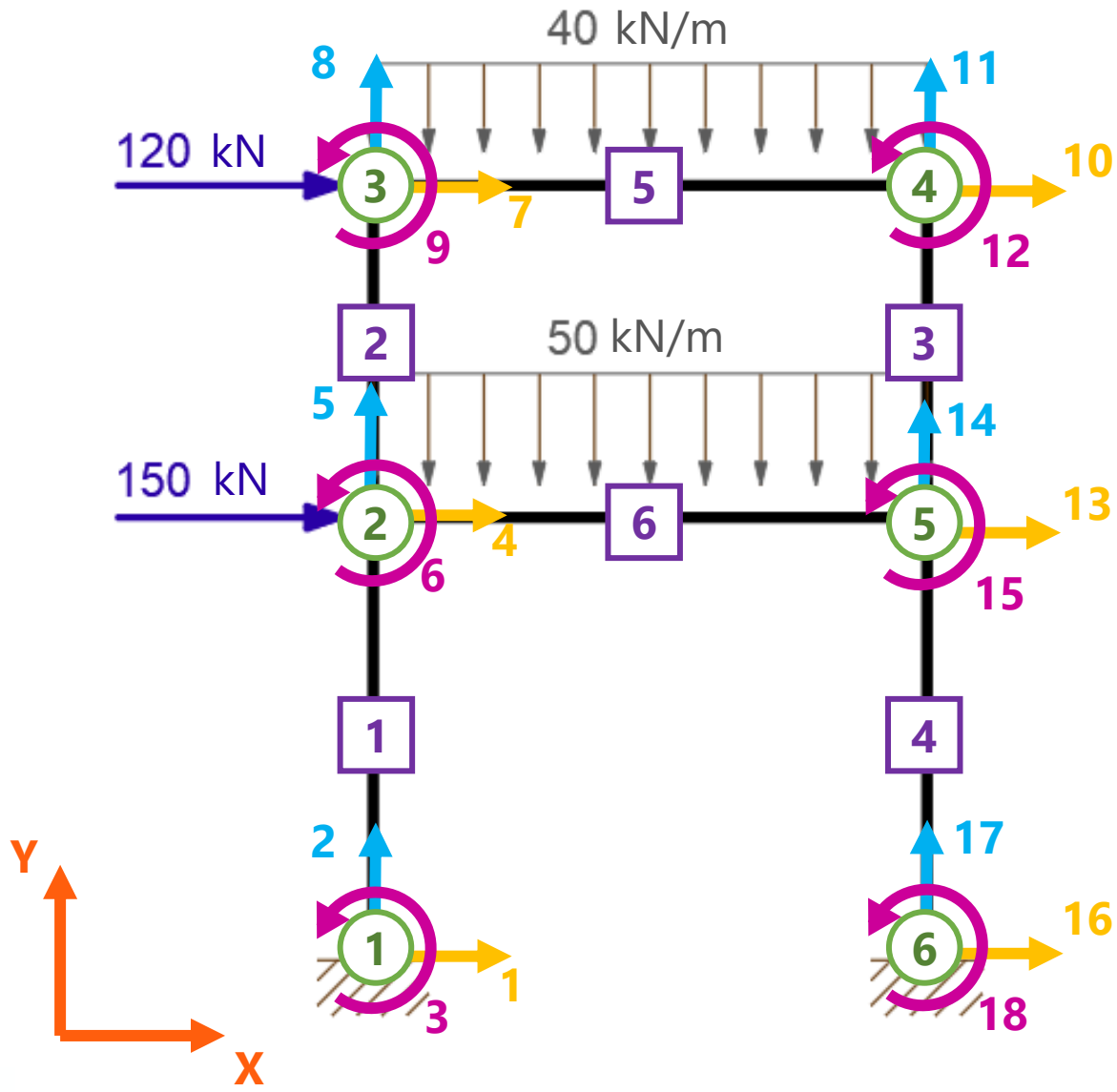
Para $f'c = 28\ MPa$: $E = 4700\sqrt{28}\ MPa = 24870.06232\ MPa$

$$\boldsymbol{E = 24870062.32\ \frac{kN}{m^2}}$$

Tipo	Dimensiones [m]	Área transversal [m²]		Momento de inercia [m⁴]	
Vigas		$b \cdot h$	$\mathbf{0.105}$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\mathbf{1.071875x10^{-3}}$
Columnas		$b \cdot h$	$\mathbf{0.09}$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\mathbf{6.75x10^{-4}}$

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS



Número de nodos: 6

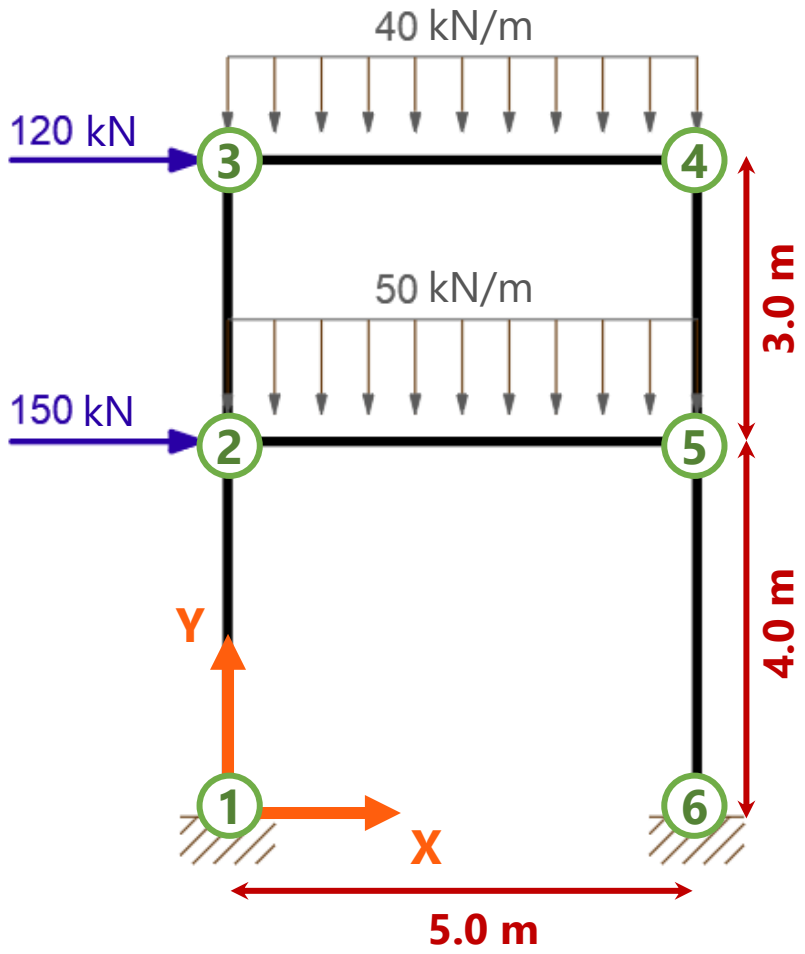
Número de elementos: 6

Número de grados de libertad: 18

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



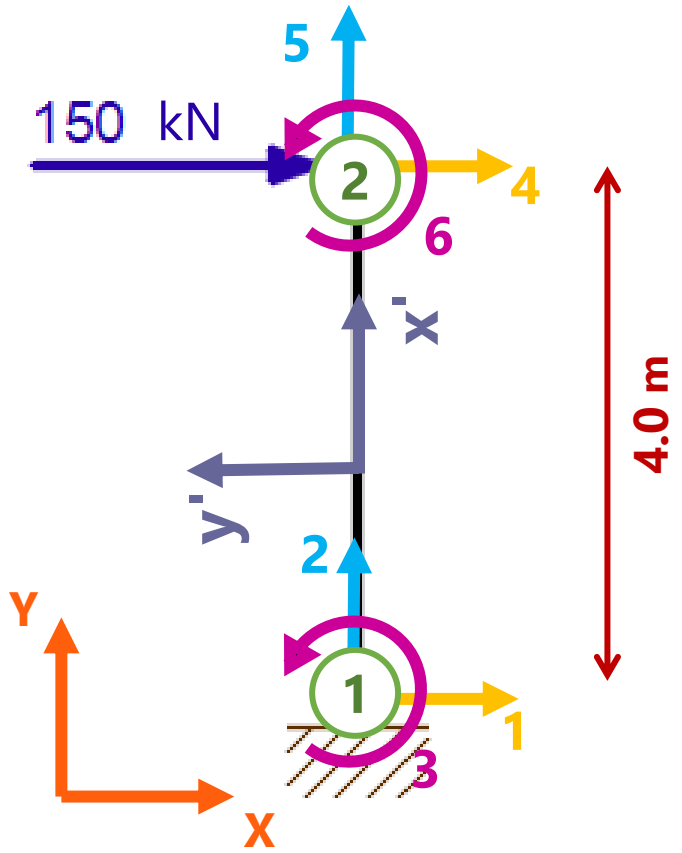
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	4.0
3	0.0	7.0
4	5.0	7.0
5	5.0	4.0
6	5.0	0.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90

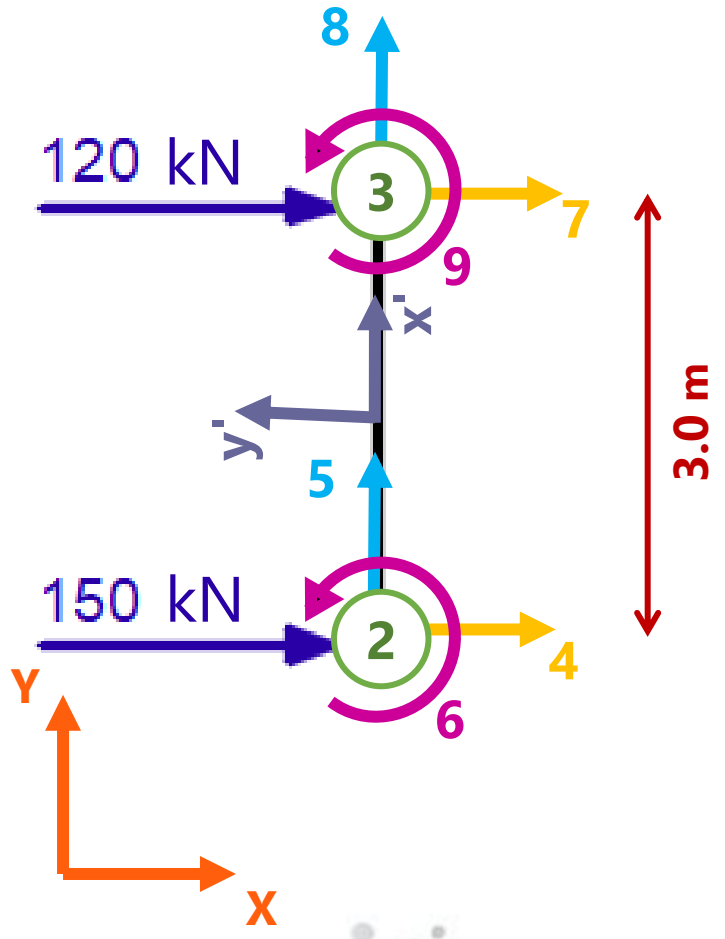


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90
2	2	3	3.0	90

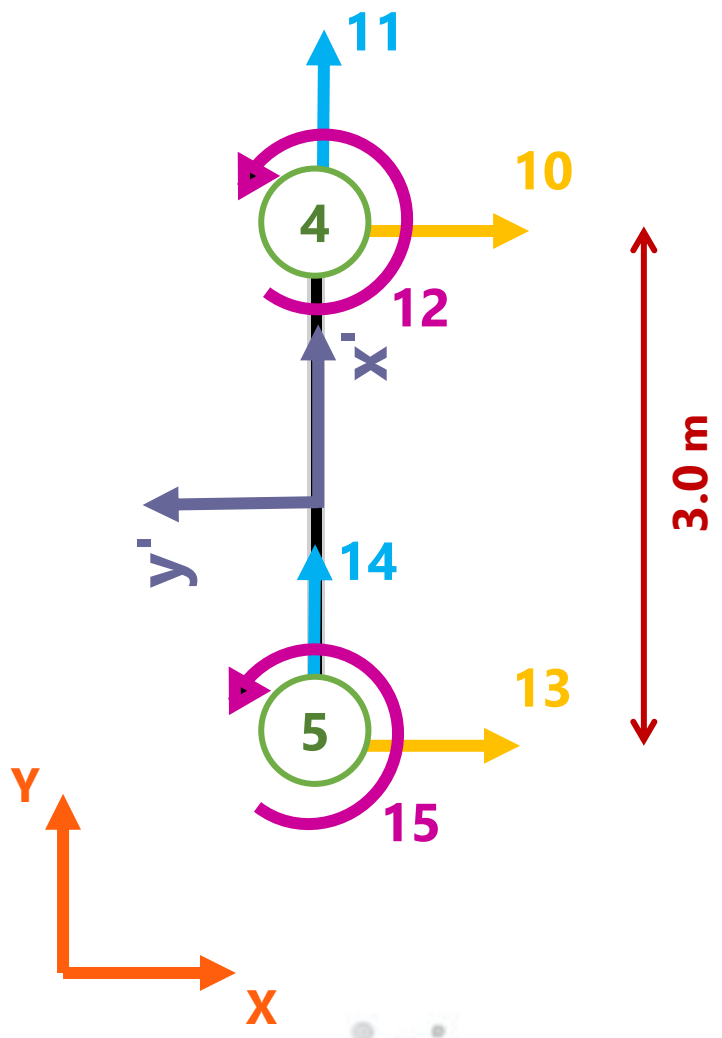


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90
2	2	3	3.0	90
3	5	4	3.0	90

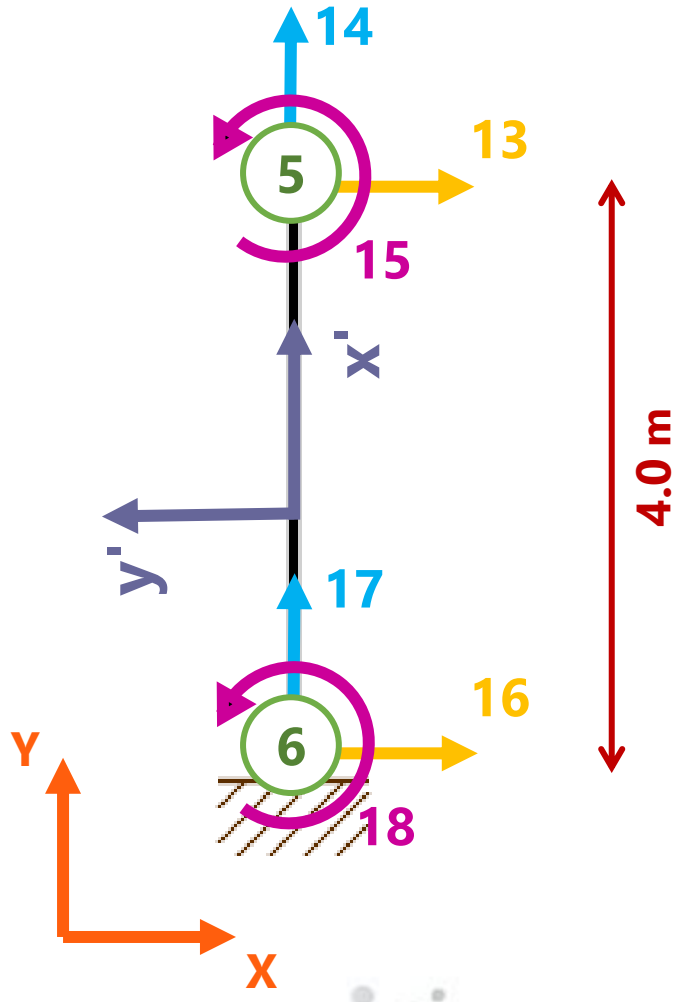


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 4

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90
2	2	3	3.0	90
3	5	4	3.0	90
4	6	5	4.0	90

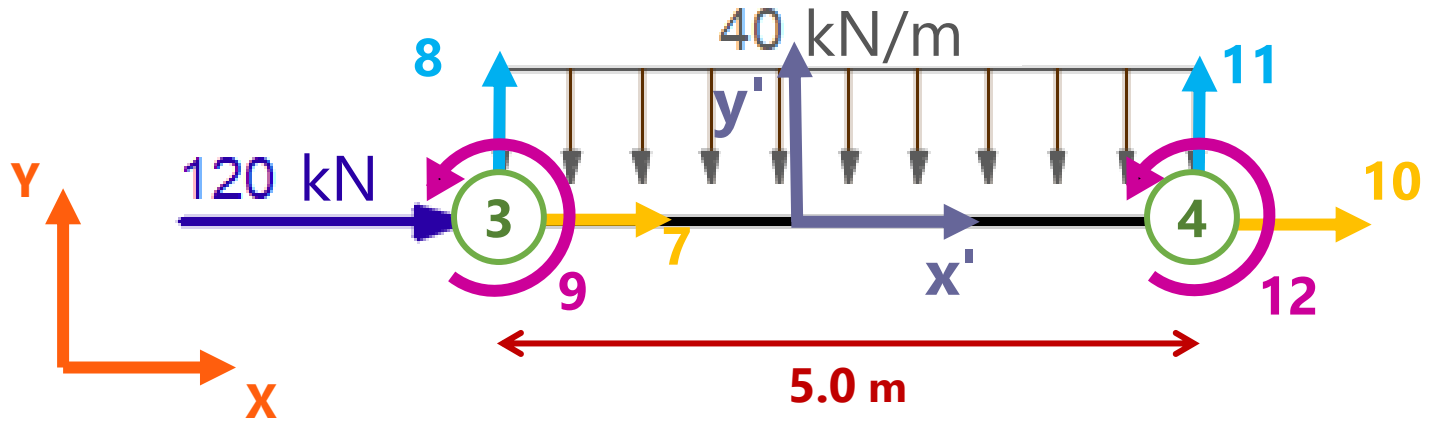


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 5

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90
2	2	3	3.0	90
3	5	4	3.0	90
4	6	5	4.0	90
5	3	4	5.0	0

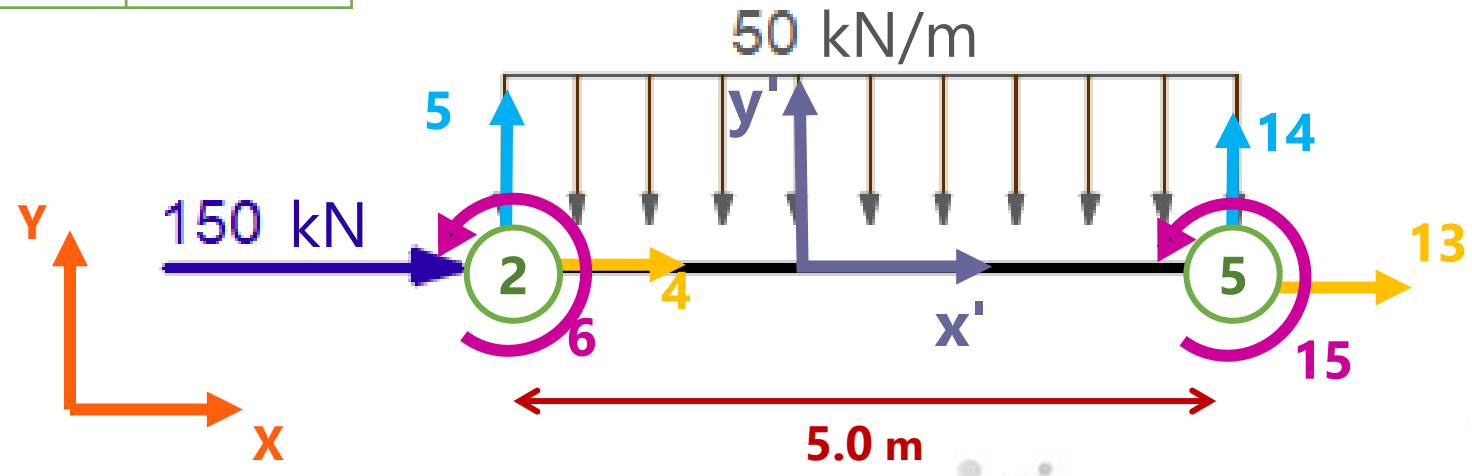


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 6

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90
2	2	3	3.0	90
3	5	4	3.0	90
4	6	5	4.0	90
5	3	4	5.0	0
6	2	5	5.0	0



#LaUISqueQueremos

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Matriz de rigidez local:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

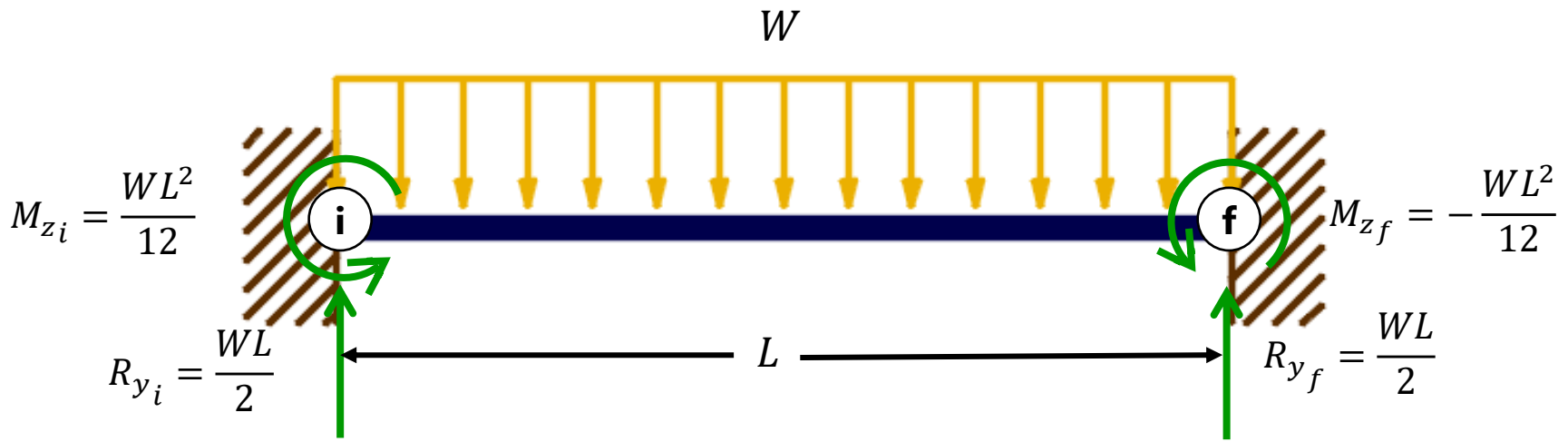
Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_L$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} \cancel{R_{x_i}} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ \cancel{R_{x_f}} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix}$ Ø Ø

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

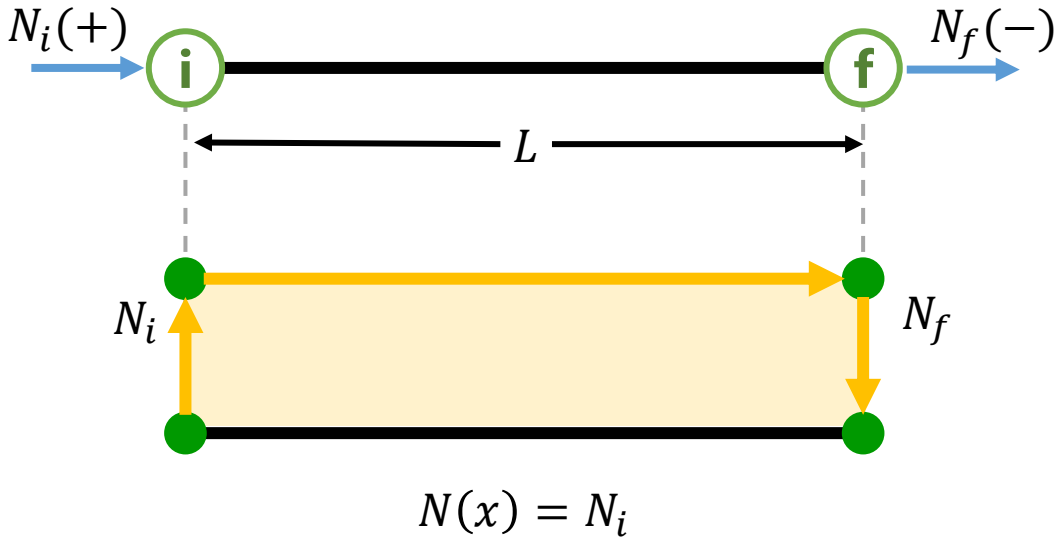
DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA AXIAL (N)

Ecuación: $N(x) = \int W(x)\,dx + N_i$

Convención de signos:
Nf > 0 → Tracción (el elemento se estira)
Nf < 0 → Compresión (el elemento se acorta)

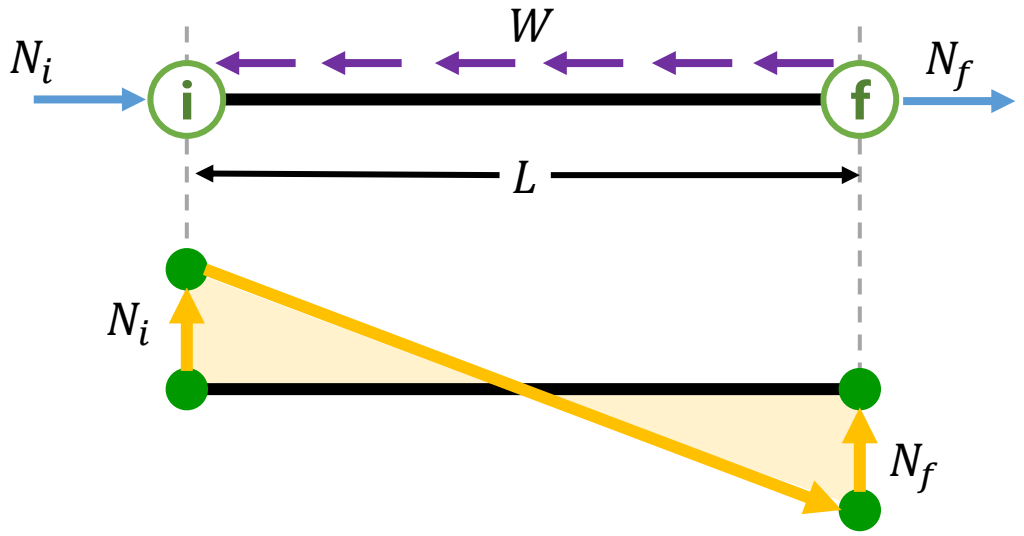
CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$N(x) = N_i$$

Se cumple: |Ni| = |Nf| (mismo valor y distinto signo)

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



$$N(x) = W \cdot x + N_i$$

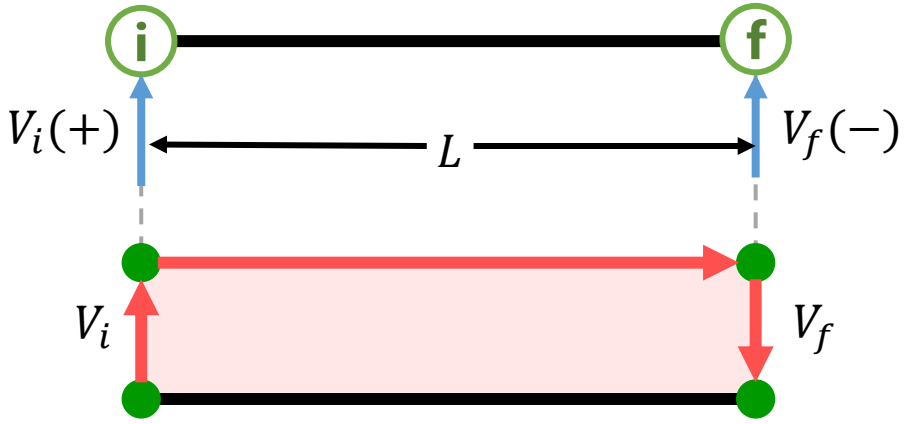
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

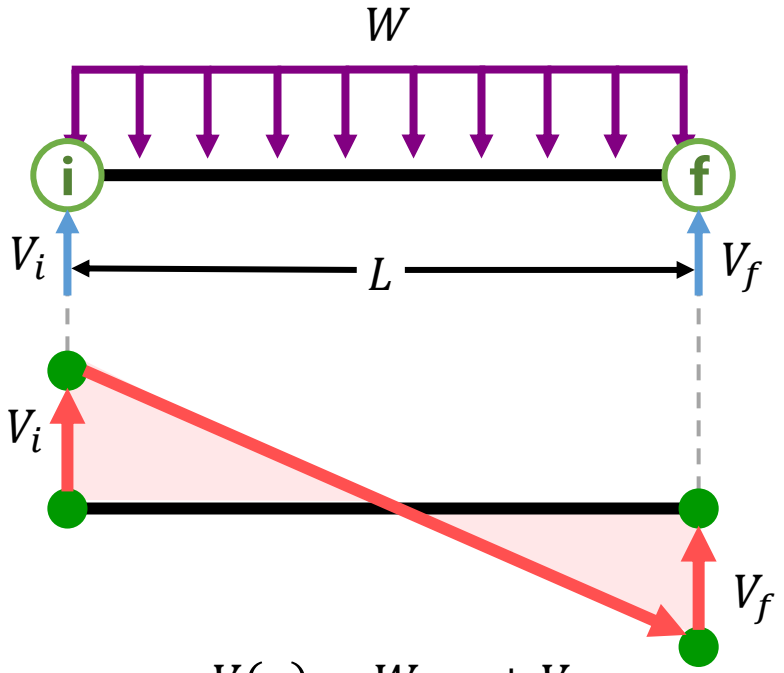
CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$V(x) = V_i$$

Se cumple: |Vi| = |Vf| (mismo valor y distinto signo)

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



$$V(x) = W \cdot x + V_i$$

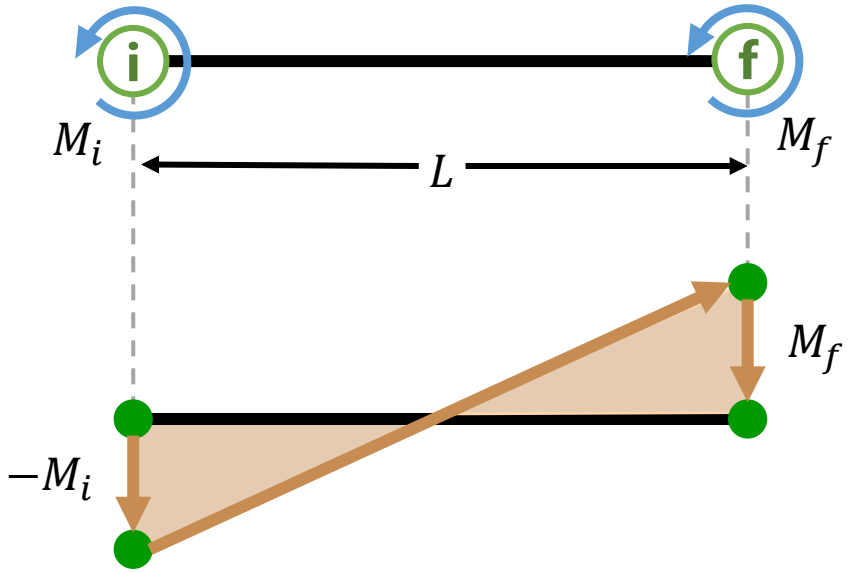
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

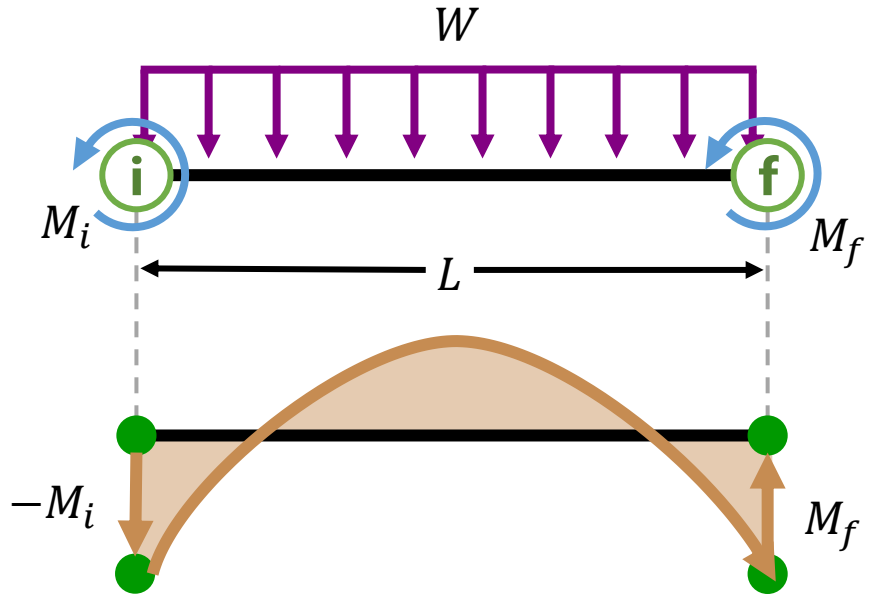
Ecuación: $M(x) = \int V(x)\,dx - M_i$

CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$M(x) = V_i \cdot x - M_i$$

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



$$M(x) = \frac{W}{2}x^2 + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

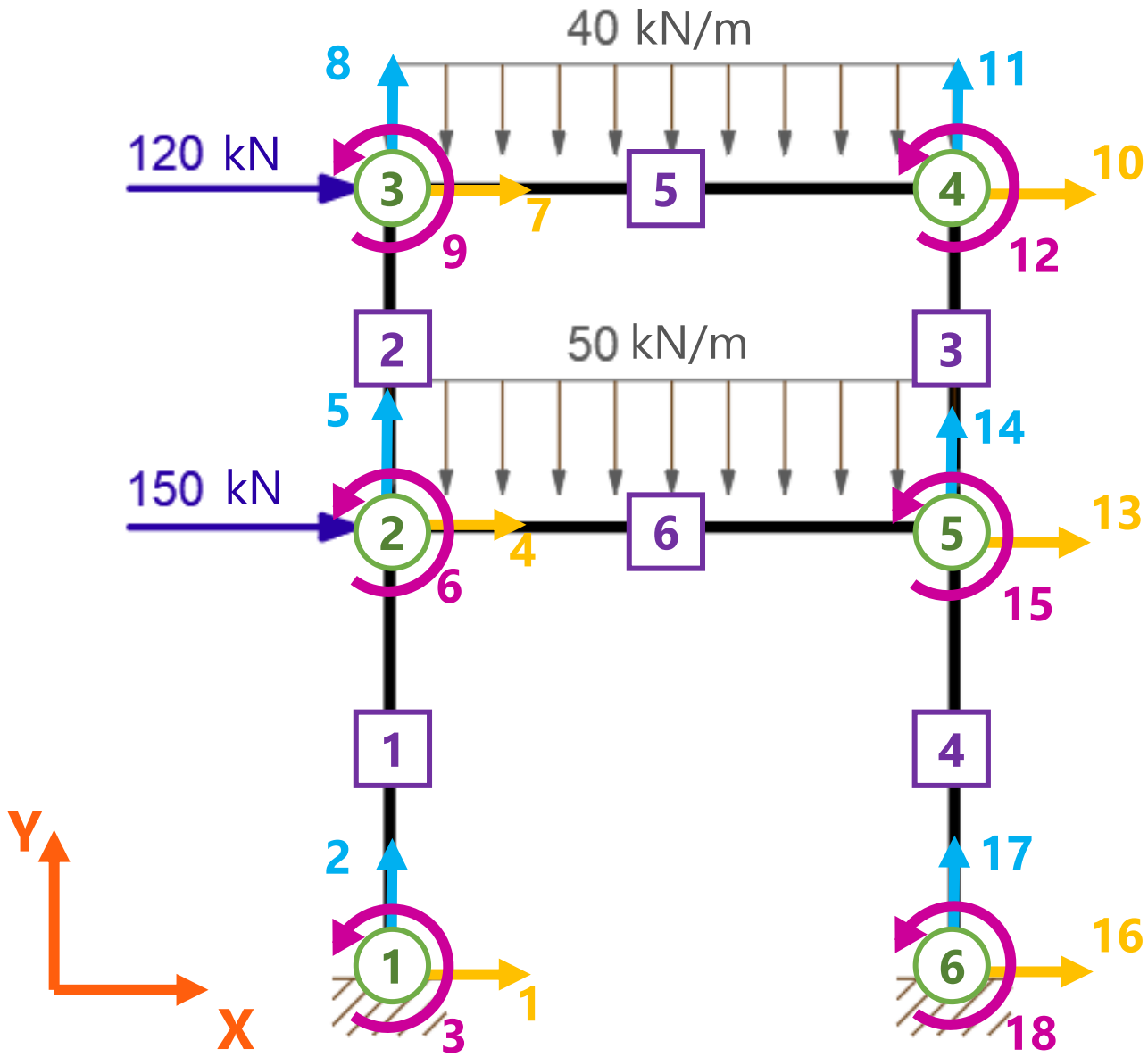
$$E = 24870062.32 \ \frac{kN}{m^2}$$

ELM	Ni	Nf	L [m]	α [°]	A [m^2]	I [m^4]
1	1	2	4.0	90	0.09	$6.75x10^{-4}$
2	2	3	3.0	90	0.09	$6.75x10^{-4}$
3	5	4	3.0	90	0.09	$6.75x10^{-4}$
4	6	5	4.0	90	0.09	$6.75x10^{-4}$
5	3	4	5.0	0	0.105	$1.071875x10^{-3}$
6	2	5	5.0	0	0.105	$1.071875x10^{-3}$

NODO	X	Y
1	0.0	0.0
2	0.0	4.0
3	0.0	7.0
4	5.0	7.0
5	5.0	4.0
6	5.0	0.0

#LaUISqueQueremos

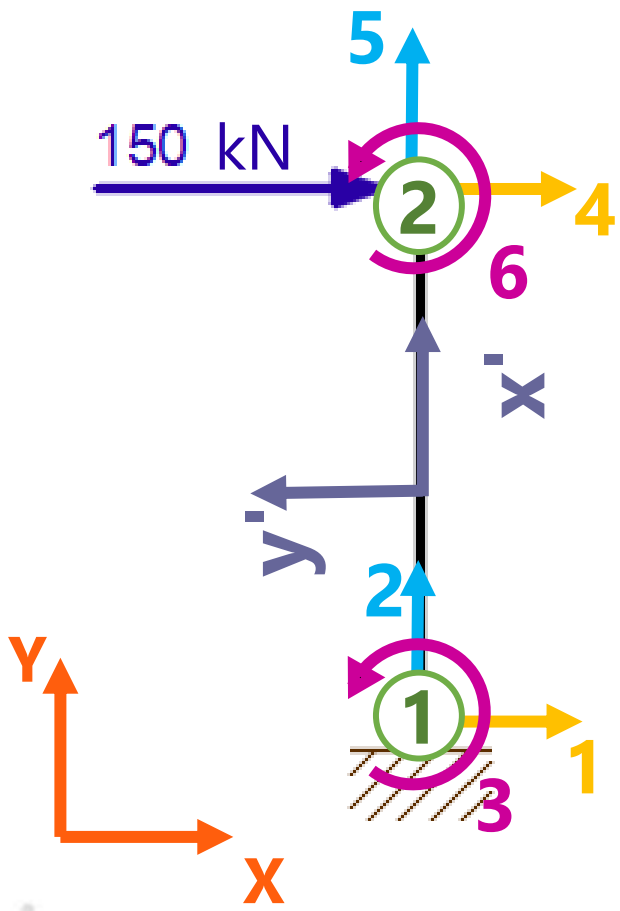
GRADOS DE LIBERTAD



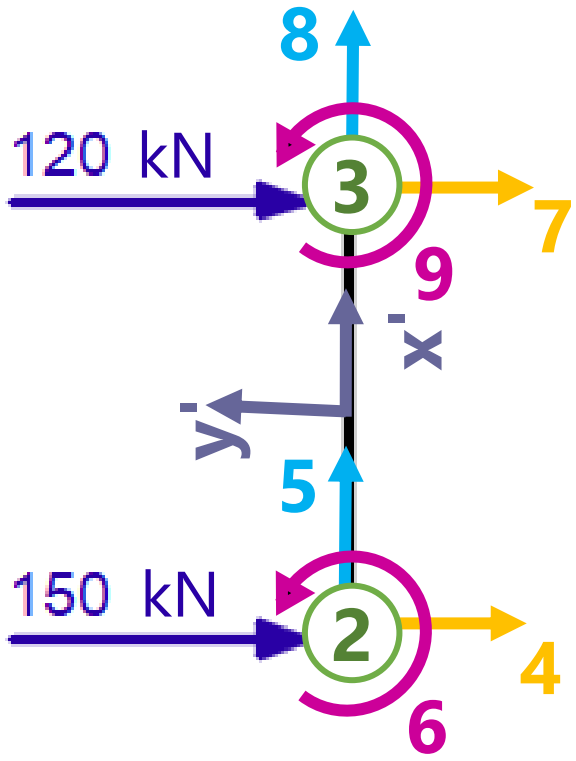
#LaUISqueQueremos

GRADOS DE LIBERTAD

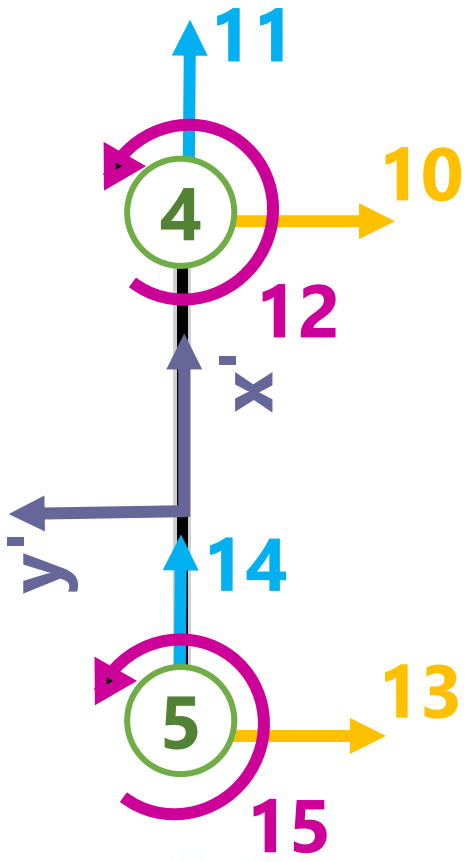
ELEMENTO 1



ELEMENTO 2



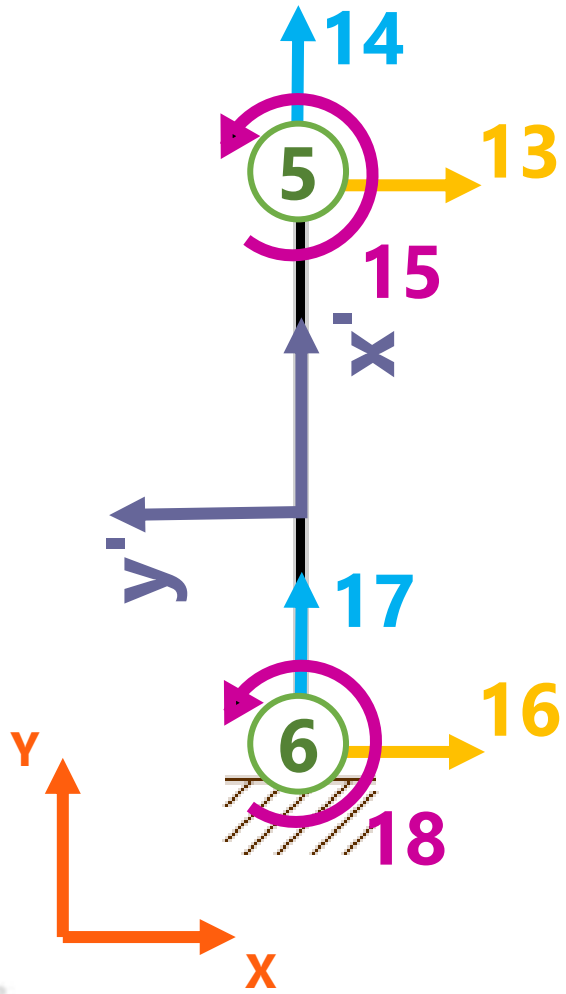
ELEMENTO 3



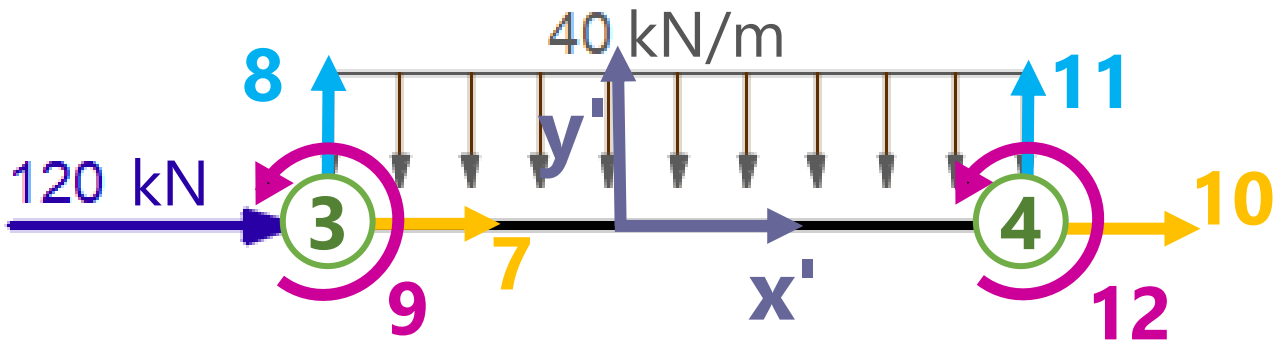
#LaUISqueQueremos

GRADOS DE LIBERTAD

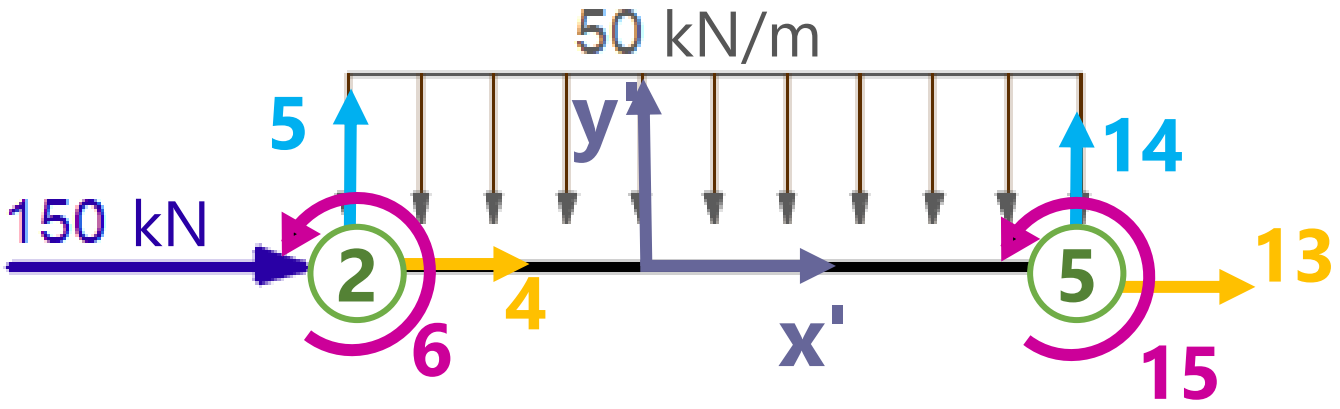
ELEMENTO 4



ELEMENTO 5

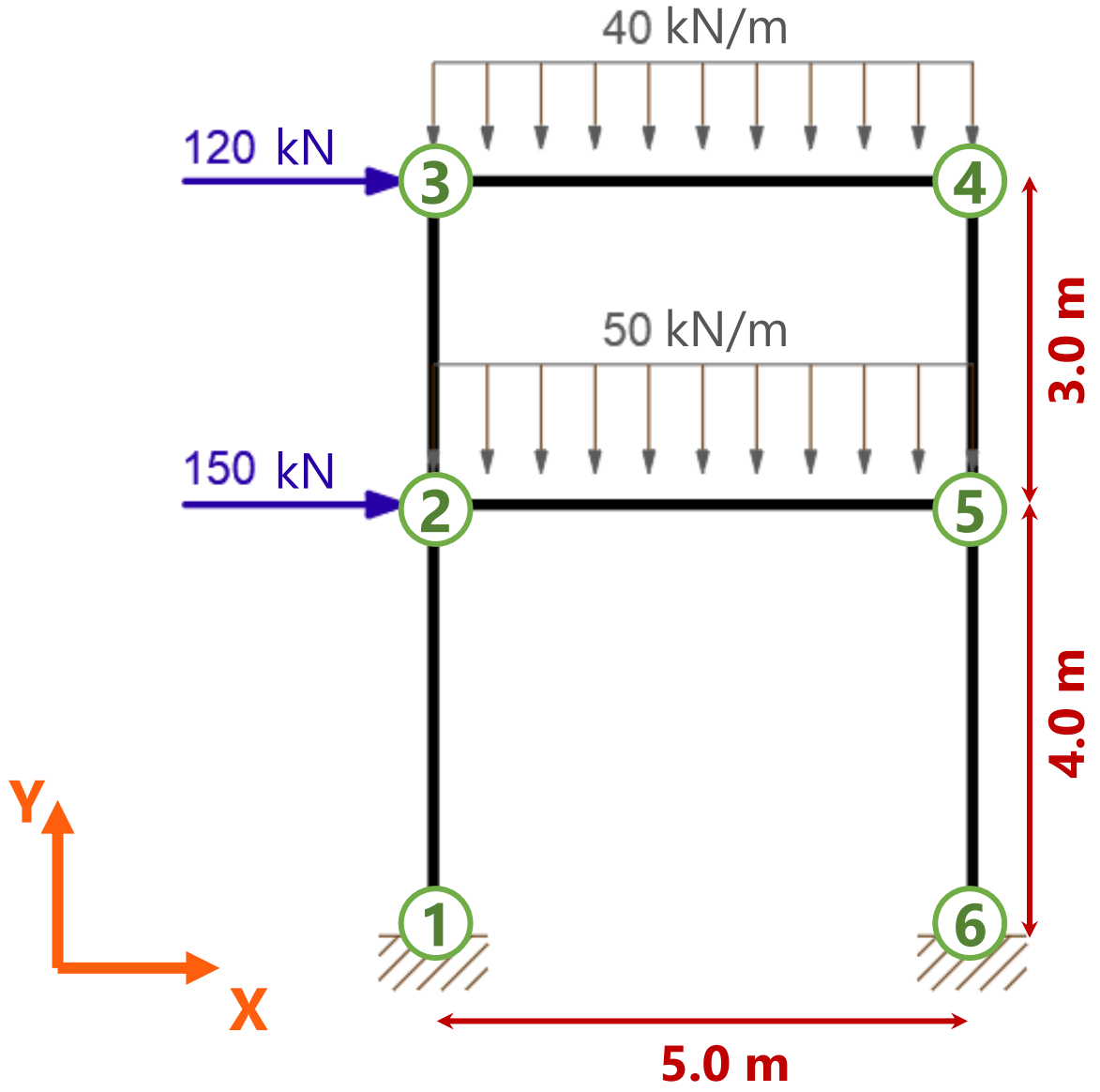


ELEMENTO 6



#LaUISqueQueremos

GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



#LaUISqueQueremos

ENSAMBLE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Matriz de rigidez local:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

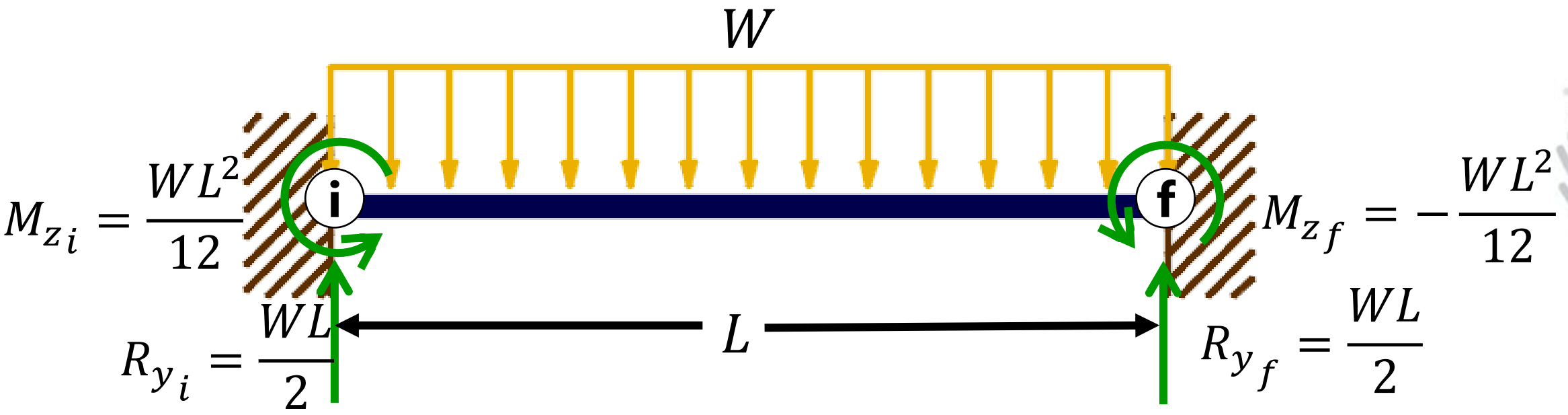
$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

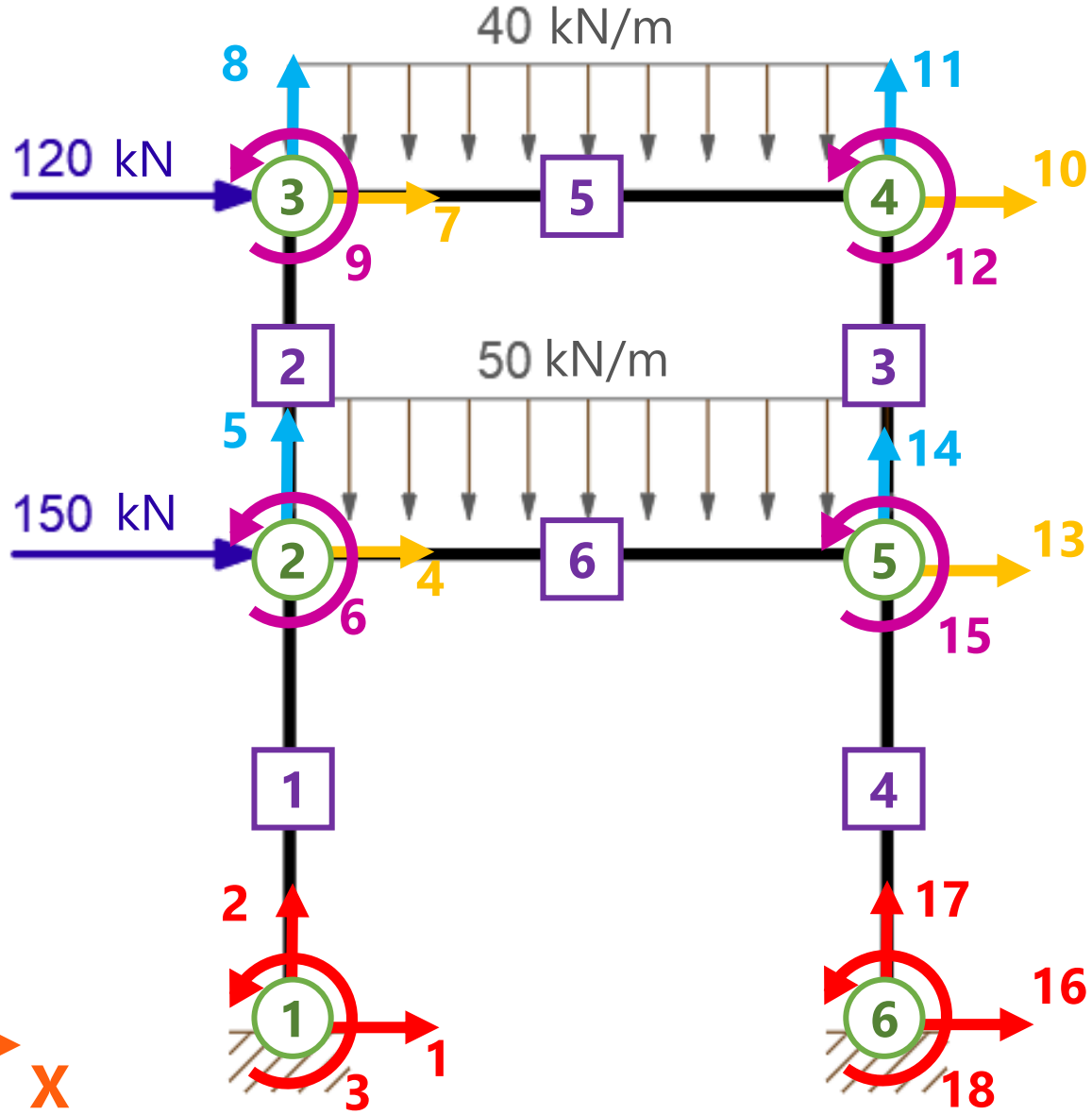
#LaUISqueQueremos

VECTOR FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO



Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

CONDICIONES DE CONTORNO



Grados de libertad restringidos

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Desplazamientos: $\{U\}_G = (\{F_{ext}\}_G - \{F^{FEM}\}_G) * [K]_G^{-1}$

Reacciones: $\{R\} = [k]_G\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_G$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_L$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

Fuerza axial: $N(x) = W \cdot x + N_i$

Fuerza cortante: $V(x) = W \cdot x + V_i$

Momento flector: $M(x) = \frac{W}{2} x^2 + V_i \cdot x - M_i$

Si hay cargas distribuidas W > 0

Si NO hay cargas distribuidas W = 0 (La ecuación se simplifica)

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 1

REACCIONES

Nodo 1: Rx = -124.66 kN, Ry = 60.49 kN, Mz = 295.03 kN-m

Nodo 6: Rx = -145.34 kN, Ry = 389.51 kN, Mz = 322.42 kN-m

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
2	6.14E-02	-1.08E-04	-1.09E-02
3	8.92E-02	-1.78E-04	-5.87E-03
4	8.90E-02	-8.94E-04	-1.91E-03
5	6.13E-02	-6.96E-04	-7.56E-03
6	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 1

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N (kN)**	**Tipo**	**Ni**	**Nf**	**Ni**	**Nf**
1	-60.49	Compresión	124.661	-124.661	295.031	203.615
2	-52.054	Compresión	19.658	-19.658	1.371	57.603
3	-147.946	Compresión	100.342	-100.342	118.901	182.125
4	-389.51	Compresión	145.339	-145.339	322.42	258.935
5	-100.342	Compresión	52.054	147.946	-57.603	-182.125
6	-44.996	Compresión	8.436	241.564	-204.985	-377.836

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Pórticos
Ejercicio 1
Modelo OpenSees

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

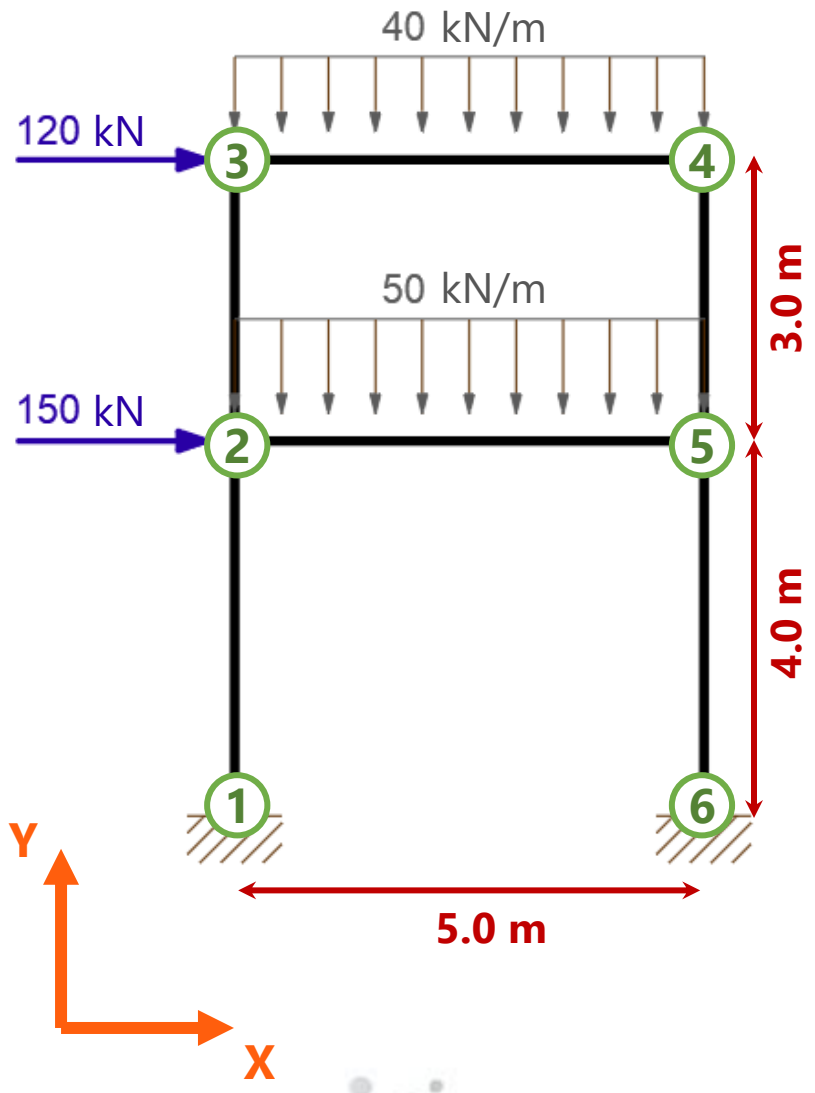
#LaUISqueQueremos

PÓRTICOS: EJERCICIO 1

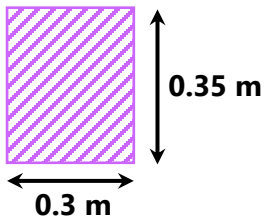
Se tiene un **pórtico plano de dos niveles**, con apoyos empotrados en la base, sometido a cargas horizontales concentradas y cargas distribuidas verticales en las vigas, tal como se muestra en la figura.
Utilizando el **método matricial de rigidez** y considerando los ejes globales XY indicados, se solicita:

- Determinar los desplazamientos horizontales y verticales en los nodos del nivel superior (3 y 4).
- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Calcular fuerza axial, fuerza cortante y momento flector en cada elemento.

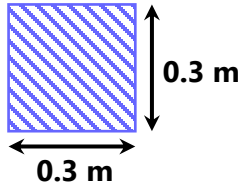
Desprecie el peso propio de los elementos. Considere únicamente las cargas indicadas en la figura. Todos los elementos están hechos de concreto de f'c=28 MPa y las secciones transversales como se indica a continuación:



Vigas



Columnas



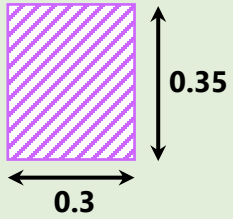
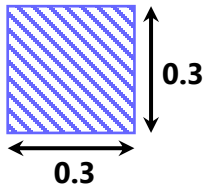
#LaUISqueQueremos

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

Módulo de elasticidad: $E = 4700\sqrt{f'c}\ (MPa)$

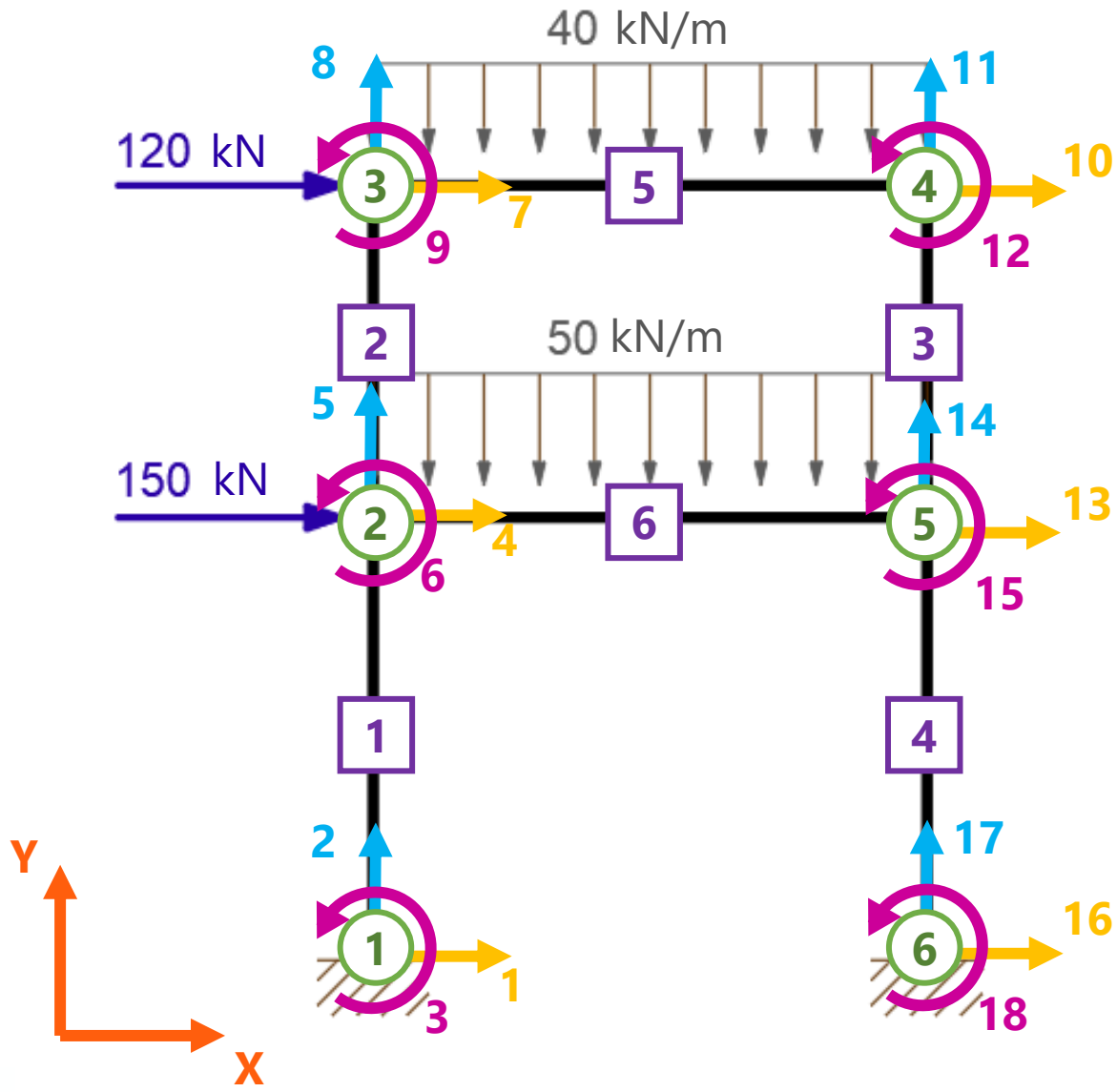
Para $f'c = 28\ MPa$: $E = 4700\sqrt{28}\ MPa = 24870.06232\ MPa$

$$\boldsymbol{E = 24870062.32\ \frac{kN}{m^2}}$$

Tipo	Dimensiones [m]	Área transversal [m²]		Momento de inercia [m⁴]	
Vigas		$b \cdot h$	$\mathbf{0.105}$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\mathbf{1.071875x10^{-3}}$
Columnas		$b \cdot h$	$\mathbf{0.09}$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\mathbf{6.75x10^{-4}}$

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS



Número de nodos: 6

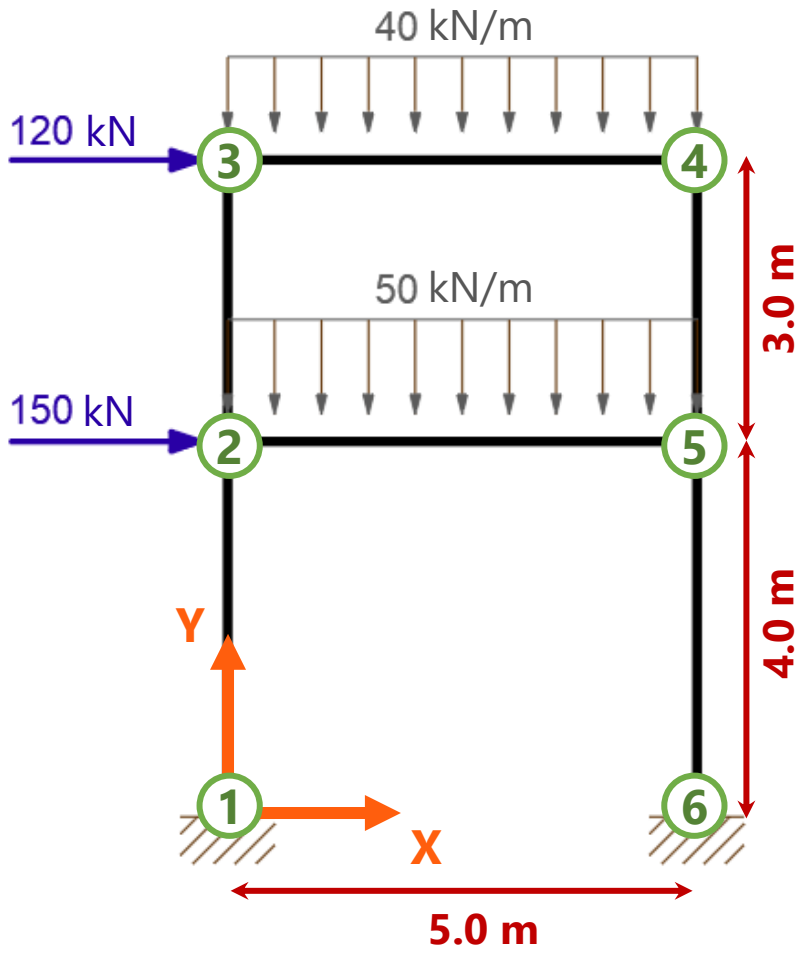
Número de elementos: 6

Número de grados de libertad: 18

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



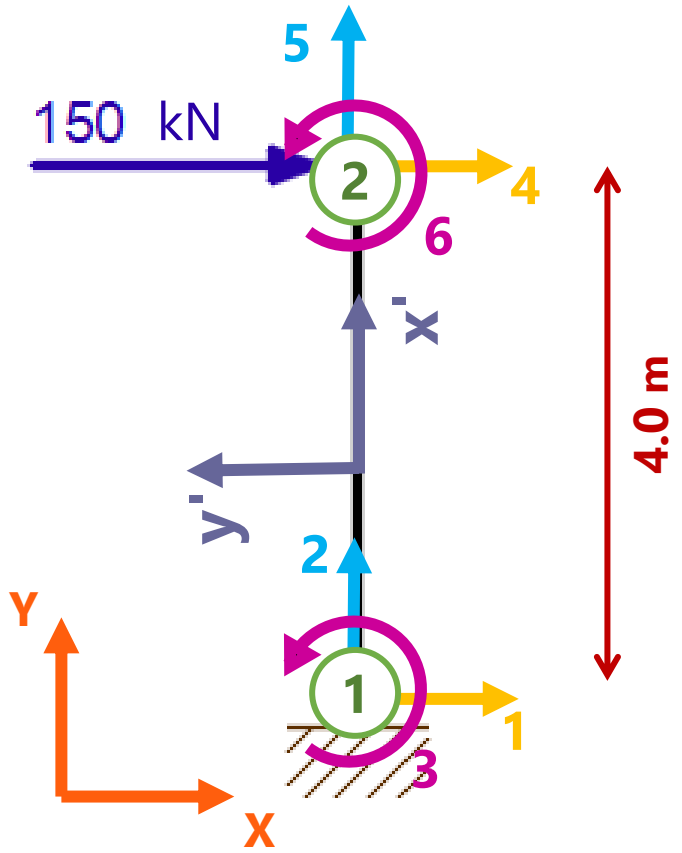
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	4.0
3	0.0	7.0
4	5.0	7.0
5	5.0	4.0
6	5.0	0.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90

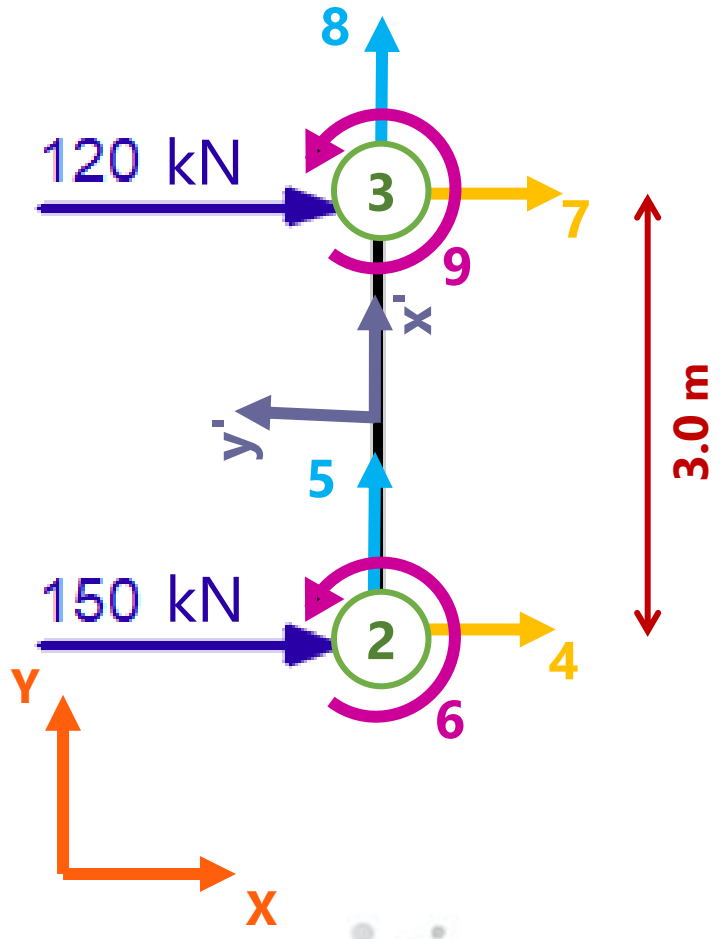


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90
2	2	3	3.0	90

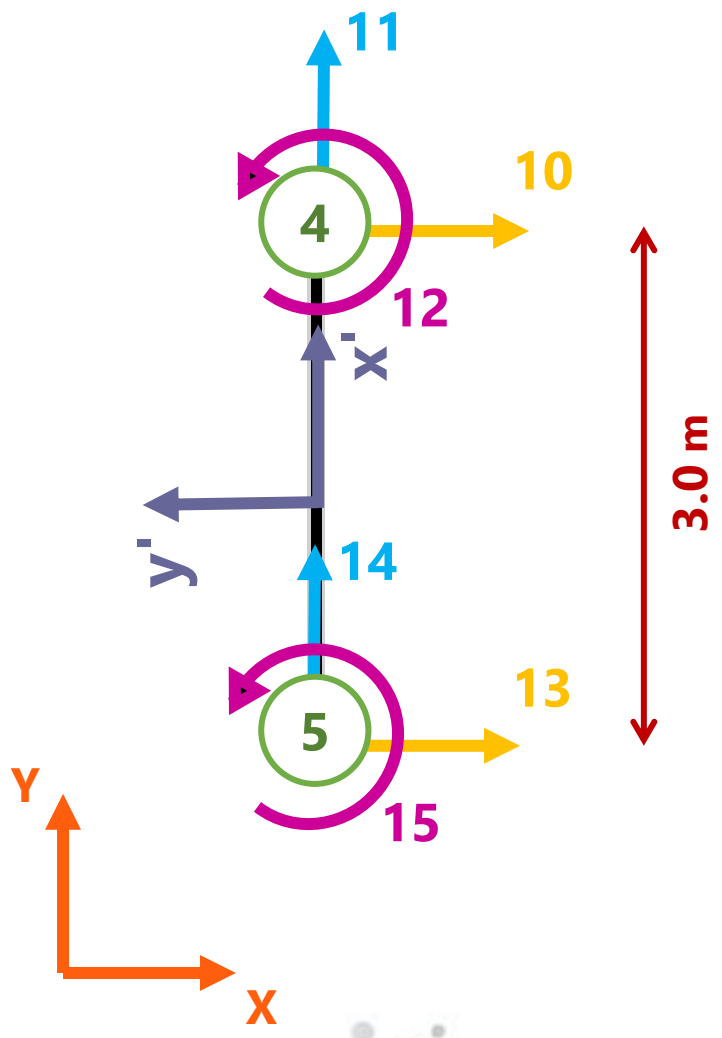


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90
2	2	3	3.0	90
3	5	4	3.0	90

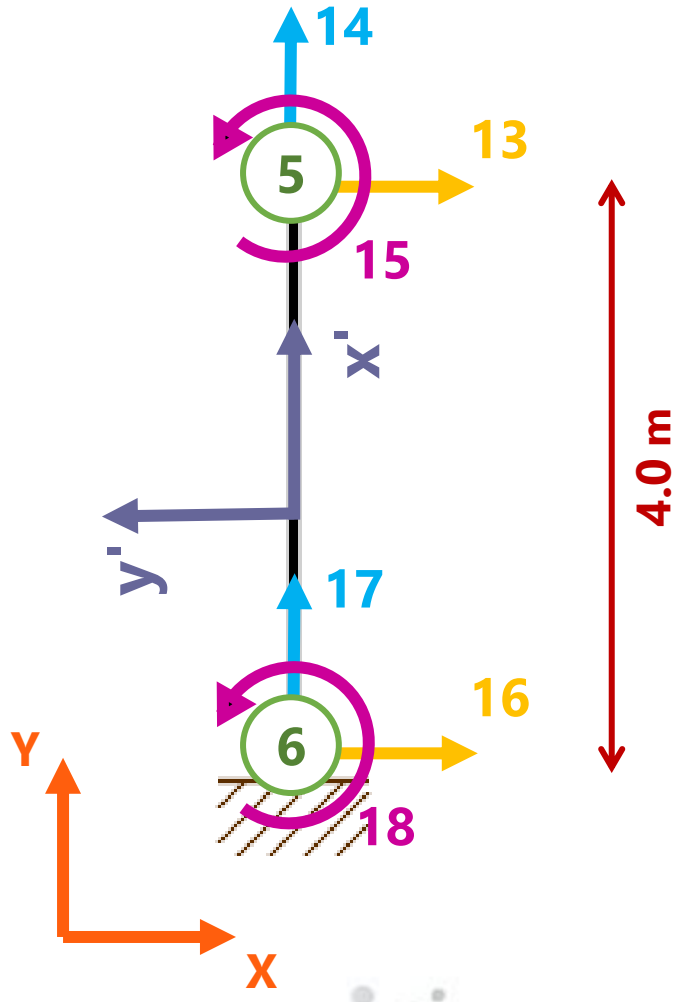


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 4

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90
2	2	3	3.0	90
3	5	4	3.0	90
4	6	5	4.0	90

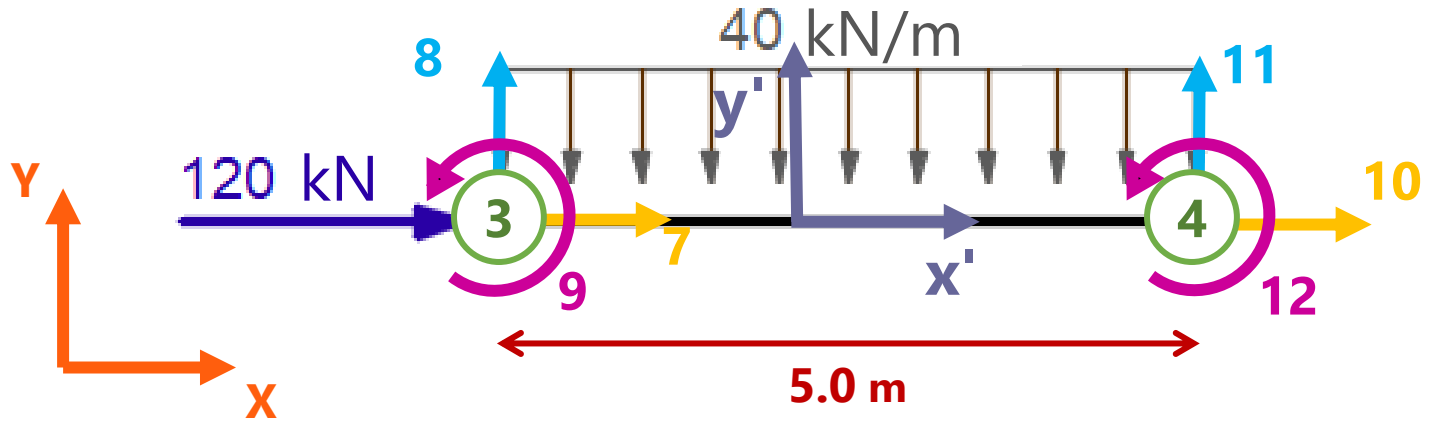


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 5

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90
2	2	3	3.0	90
3	5	4	3.0	90
4	6	5	4.0	90
5	3	4	5.0	0

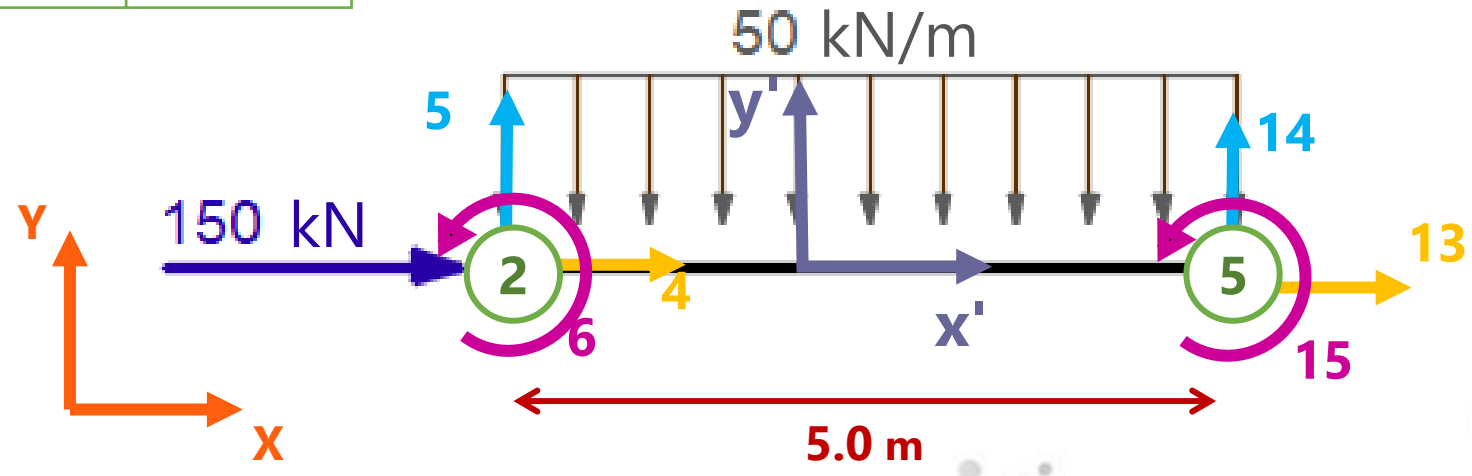


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 6

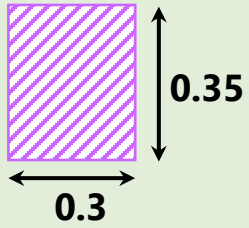
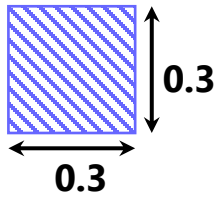
ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	4.0	90
2	2	3	3.0	90
3	5	4	3.0	90
4	6	5	4.0	90
5	3	4	5.0	0
6	2	5	5.0	0



#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

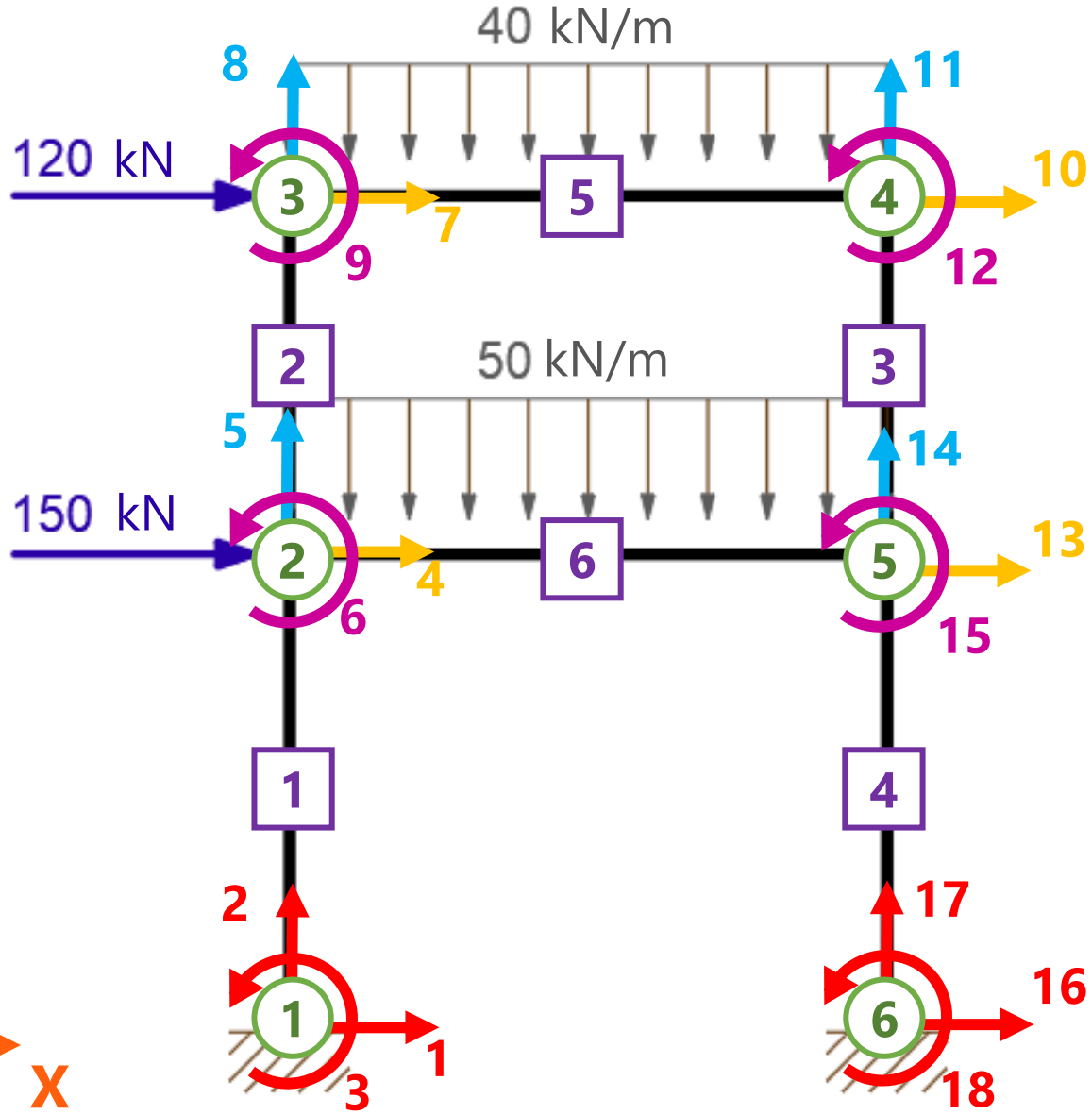
$$E = 24870062.32 \ \frac{kN}{m^2}$$

Tipo	Dimensiones [m]	Área transversal [m^2]	Momento de inercia [m^4]
Vigas		$b \cdot h$	$\frac{1}{12} bh^3$
Columnas		$b \cdot h$	$\frac{1}{12} bh^3$

NODO	X	Y
1	0.0	0.0
2	0.0	4.0
3	0.0	7.0
4	5.0	7.0
5	5.0	4.0
6	5.0	0.0

#LaUISqueQueremos

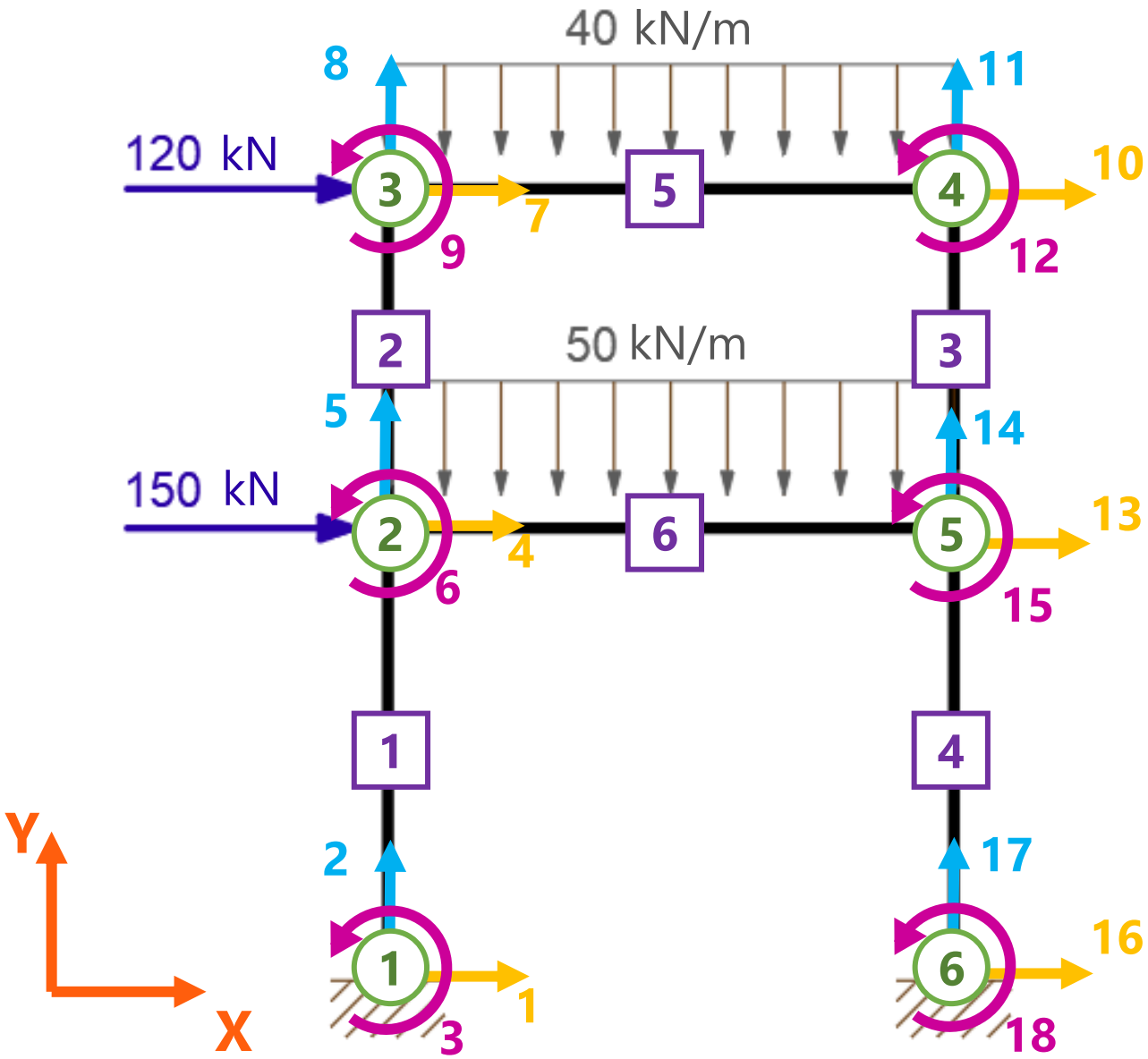
CONDICIONES DE CONTORNO



- Grados de libertad restringidos

#LaUISqueQueremos

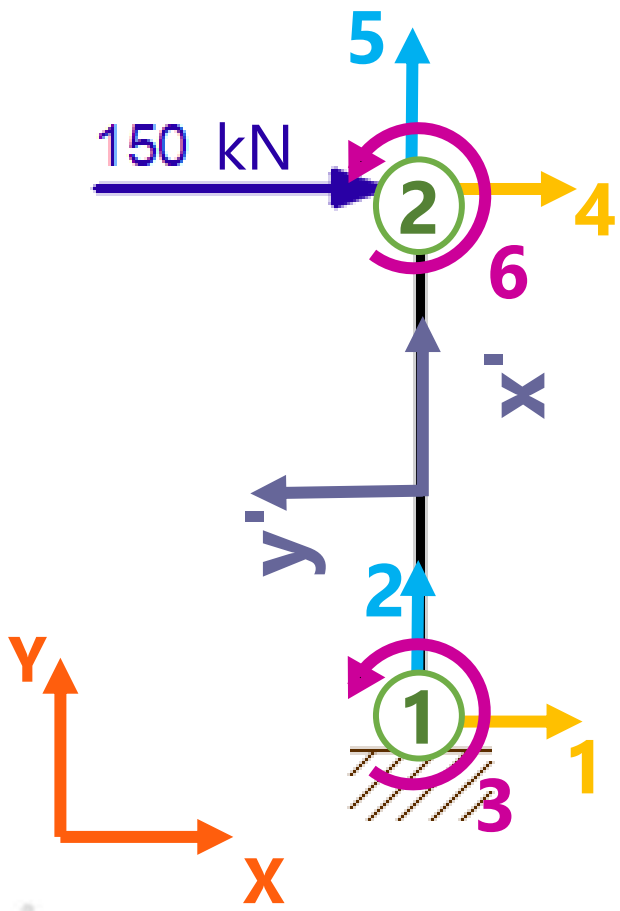
CONECTIVIDAD ELEMENTOS



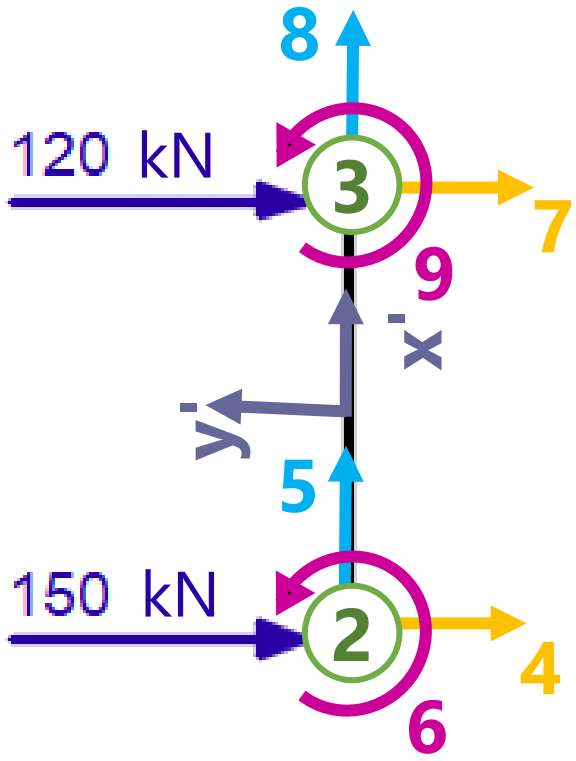
#LaUISqueQueremos

CONECTIVIDAD ELEMENTOS

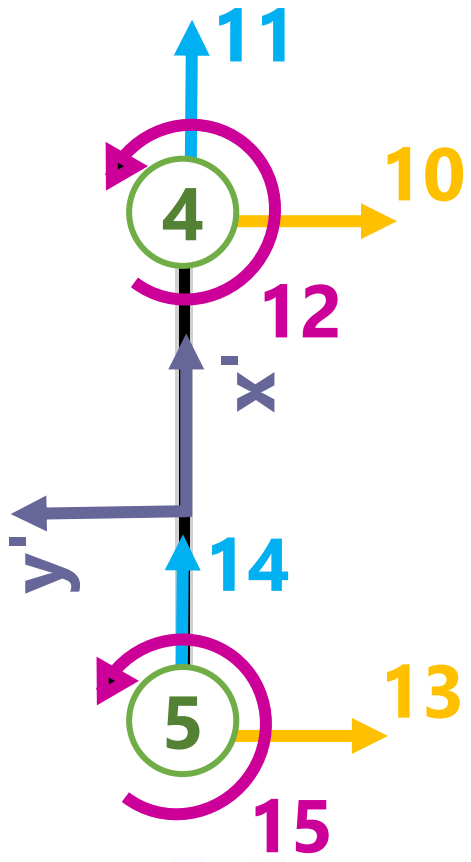
ELEMENTO 1



ELEMENTO 2



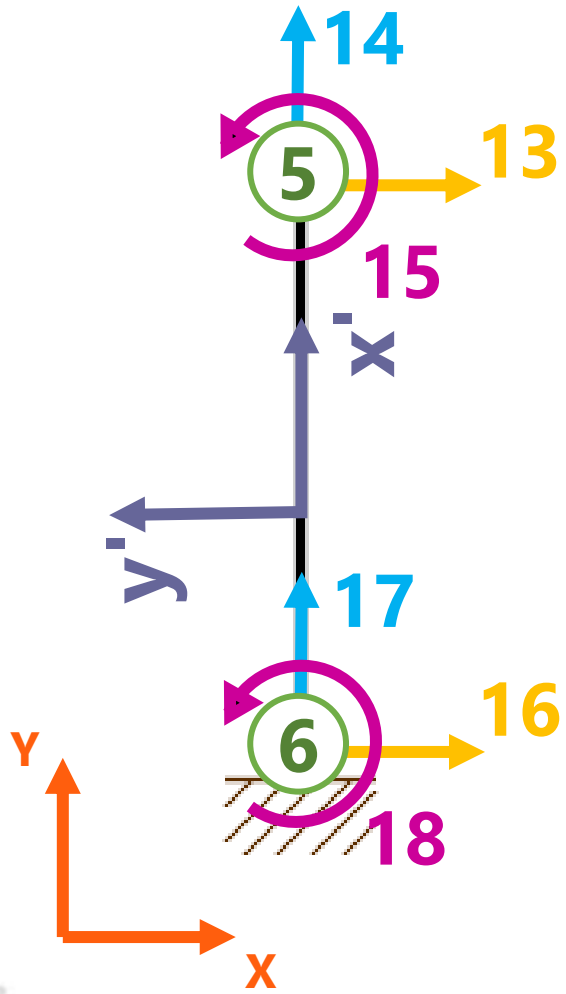
ELEMENTO 3



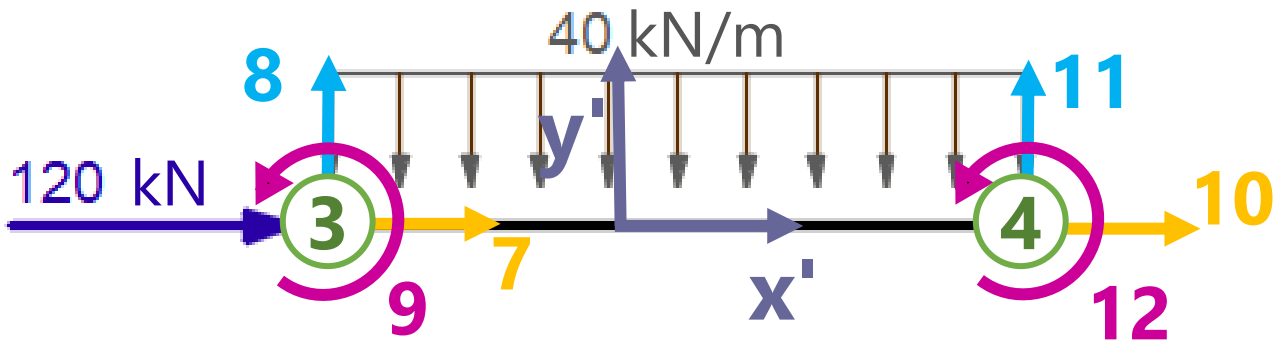
#LaUISqueQueremos

CONECTIVIDAD ELEMENTOS

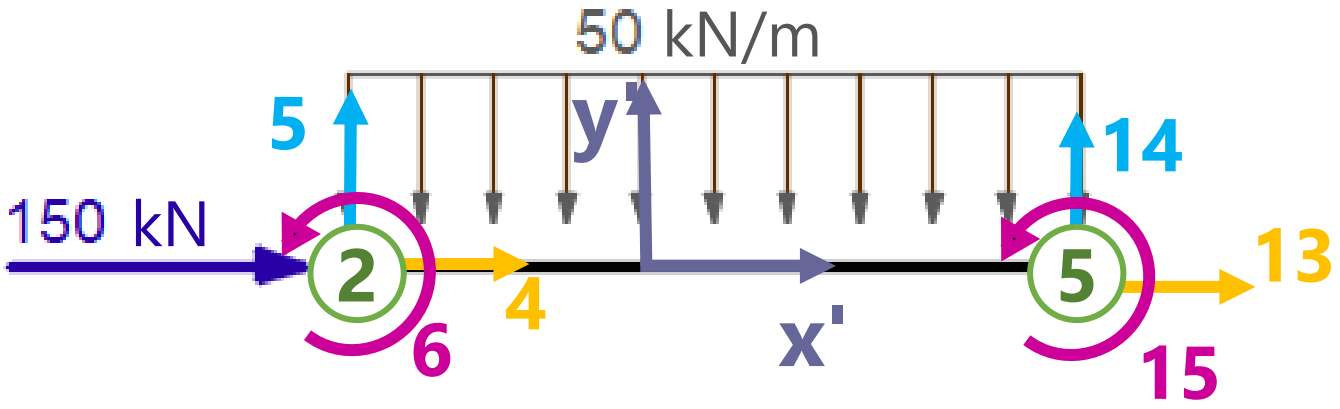
ELEMENTO 4



ELEMENTO 5

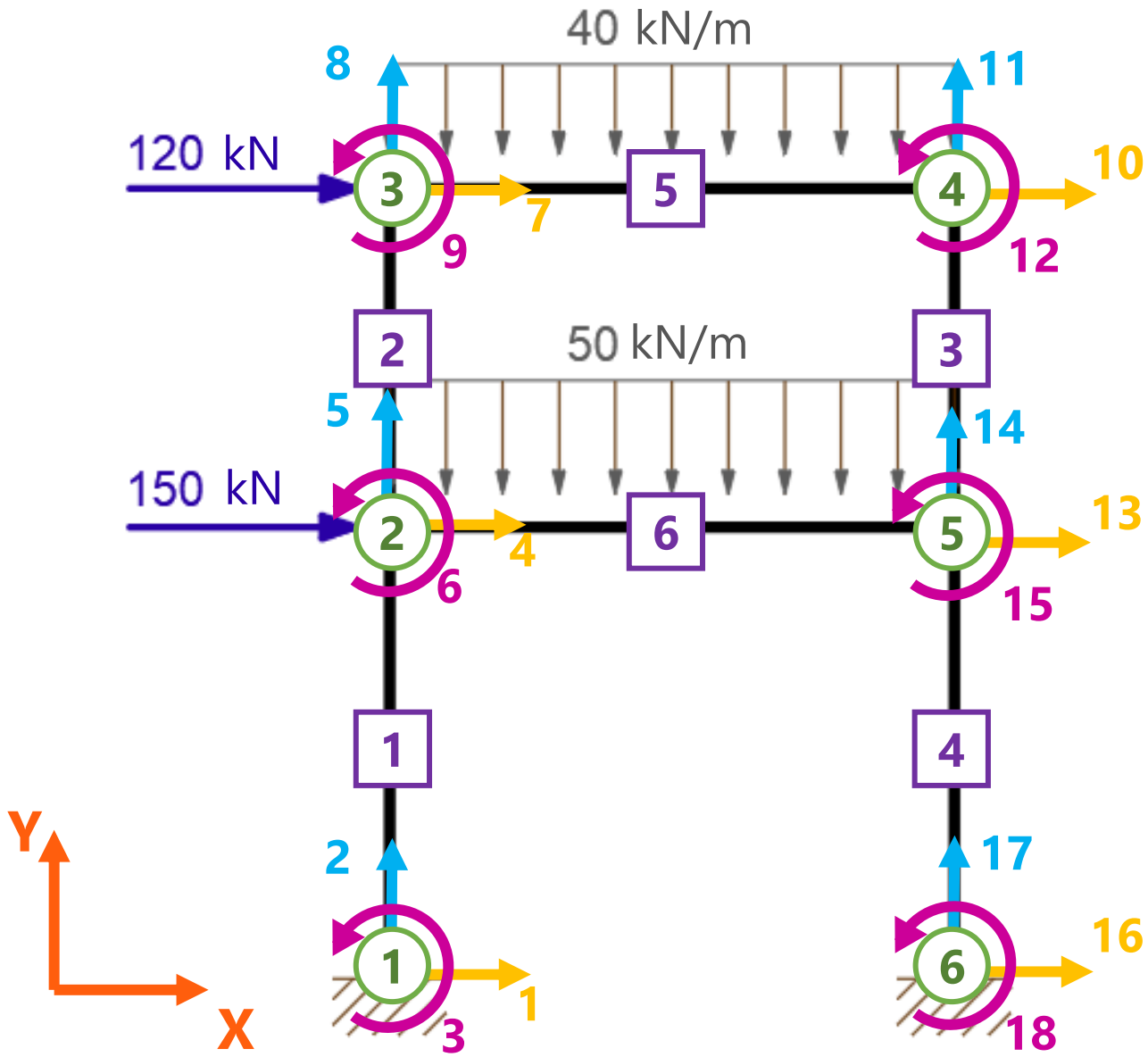


ELEMENTO 6



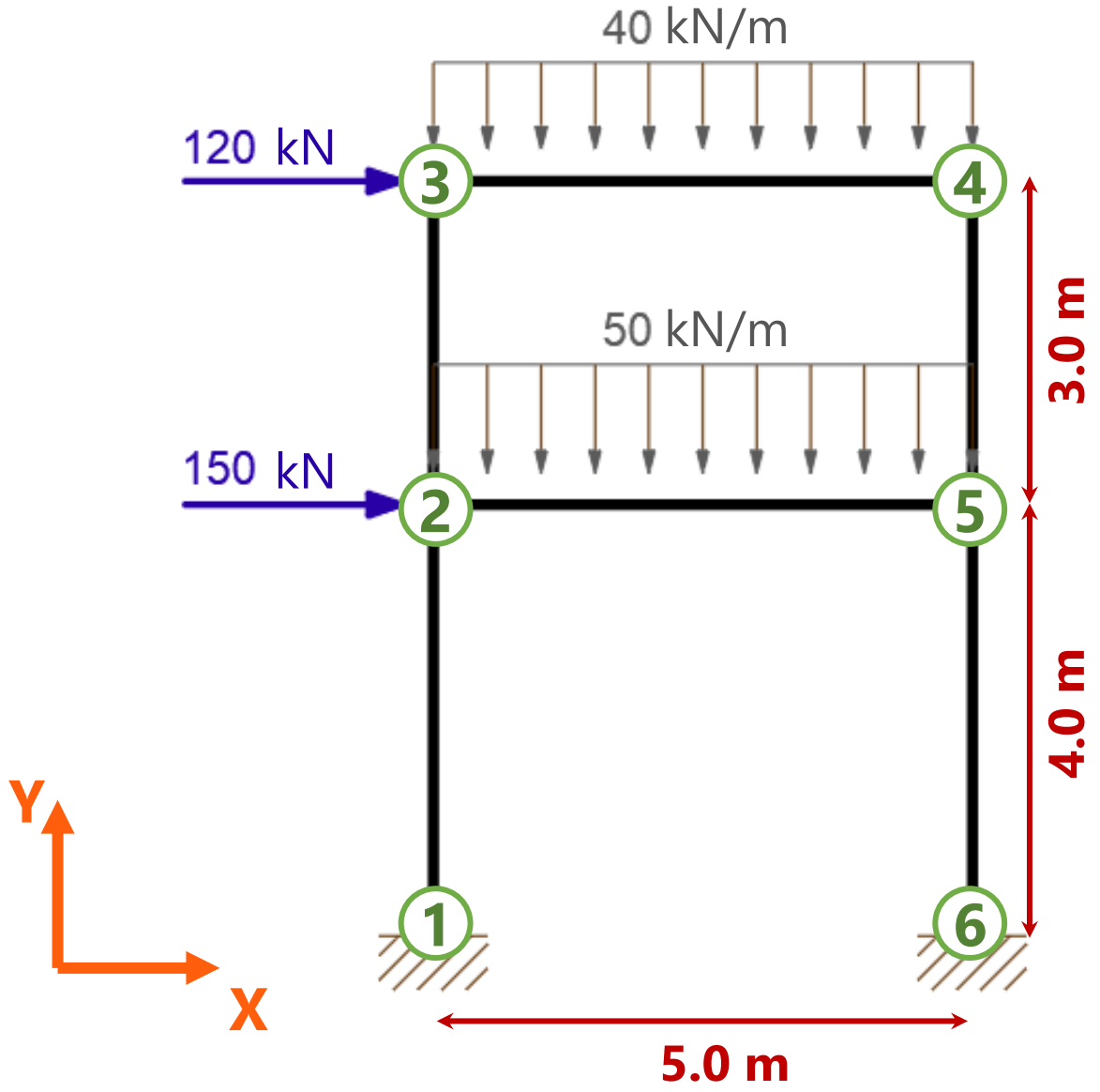
#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CARGA



#LaUISqueQueremos

GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 1

REACCIONES

Nodo 1: Rx=-124.66 kN, Ry=60.49 kN, Mz=295.03 kN-m

Nodo 6: Rx=-145.34 kN, Ry=389.51 kN, Mz=322.42 kN-m

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
2	6.14E-02	-1.08E-04	-1.09E-02
3	8.92E-02	-1.78E-04	-5.87E-03
4	8.90E-02	-8.94E-04	-1.91E-03
5	6.13E-02	-6.96E-04	-7.56E-03
6	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 1

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N (kN)**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
1	60.490	Compresión	124.661	-124.661	295.031	203.615
2	52.054	Compresión	19.658	-19.658	1.371	57.603
3	147.946	Compresión	100.342	-100.342	118.901	182.125
4	389.51	Compresión	145.339	-145.339	322.42	258.935
5	100.342	Compresión	52.054	147.946	-57.603	-182.125
6	44.996	Compresión	8.436	241.564	-204.985	-377.836

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Pórticos
Ejercicio 2
Método Matricial de rigidez en Python

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

#LaUISqueQueremos

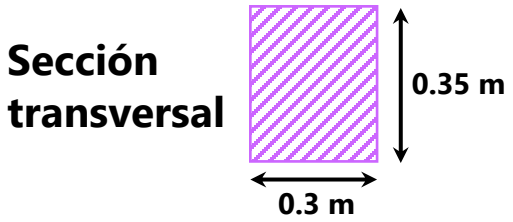
PÓRTICOS: EJERCICIO 2

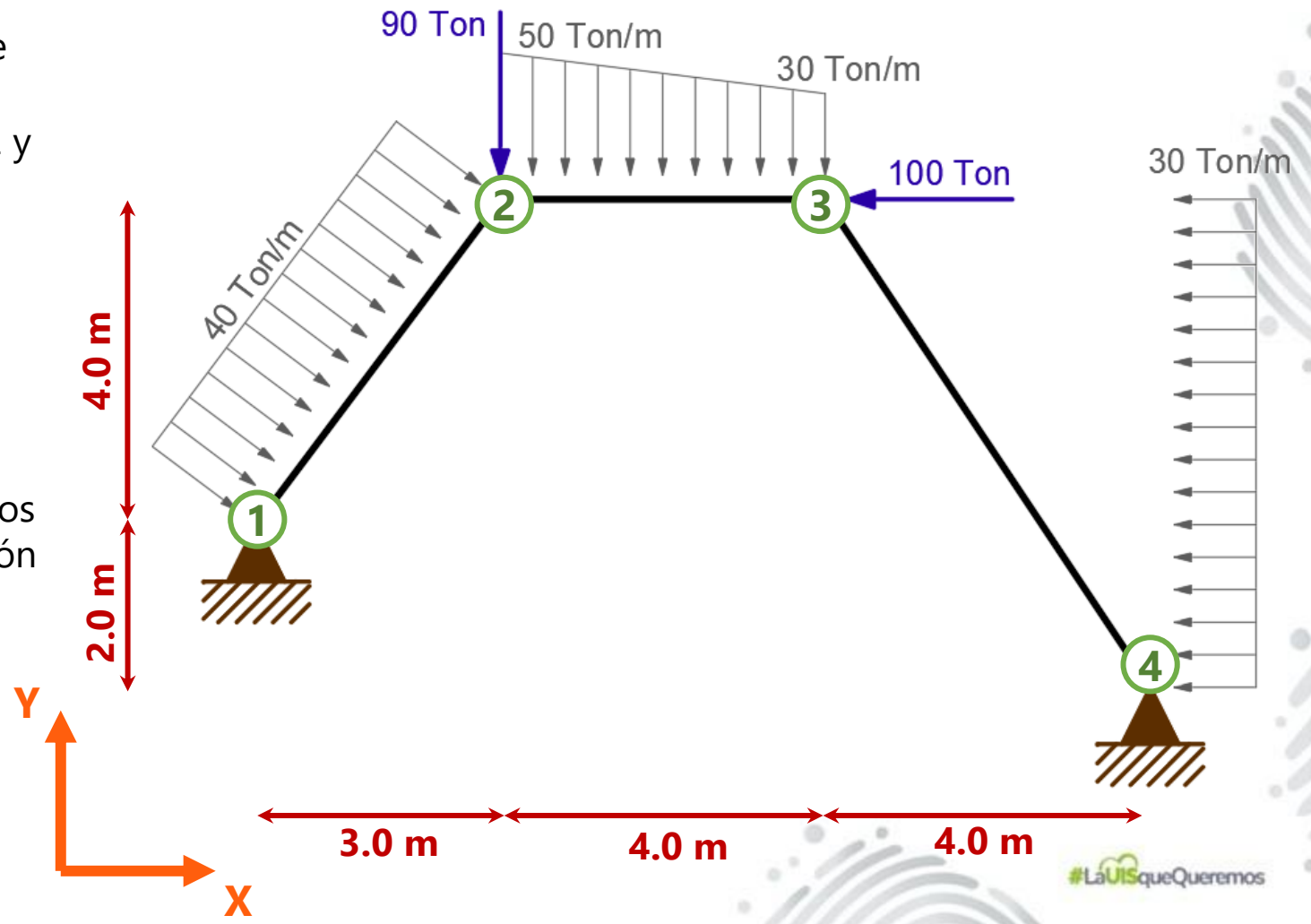
Se tiene un **pórtico plano** como se muestra en la figura, con apoyos articulados en los nodos 1 y 4, sometido a cargas distribuidas en elementos inclinados y horizontales, así como cargas concentradas verticales y horizontales.

Mediante el **método matricial de rigidez**, considerando que cada nodo posee tres grados de libertad (u_x, u_y, θ_z), se solicita:

- Determinar los desplazamientos en los nodos 2 y 3.
- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Obtener las fuerzas internas (axial, cortante y momento flector) en cada elemento en coordenadas locales y construir los diagramas internos correspondientes.

Desprecie el peso propio. Considere comportamiento lineal-elástico, todos los elementos están hechos de concreto de f'c=24 MPa y la sección transversal como se indica a continuación:





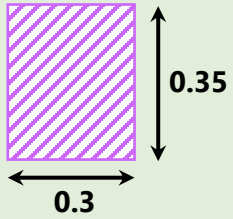
#LaUISqueQueremos

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

Módulo de elasticidad: $E = 4700\sqrt{f'c}\ (MPa)$

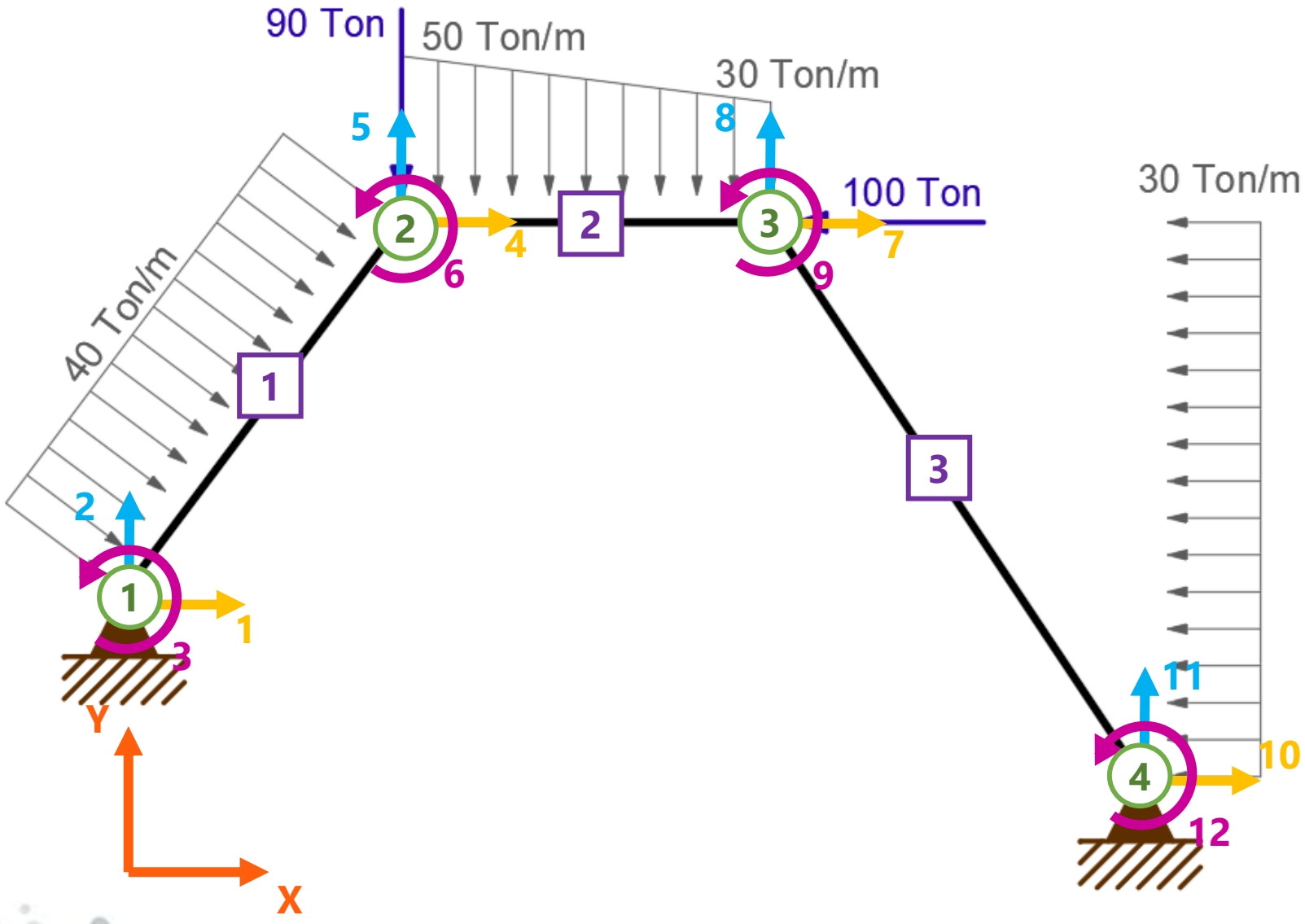
Para $f'c = 24\ MPa$: $E = 4700\sqrt{24}\ MPa = 23025.203582\ MPa$

$$\boldsymbol{E = 2302520.3582\ \frac{Ton}{m^2}}$$

Sección transversal	Dimensiones [m]	Área transversal [m^2]		Momento de inercia [m^4]	
		$b \cdot h$	$\mathbf{0.105}$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\mathbf{1.071875x10^{-3}}$

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS



Número de nodos: 4

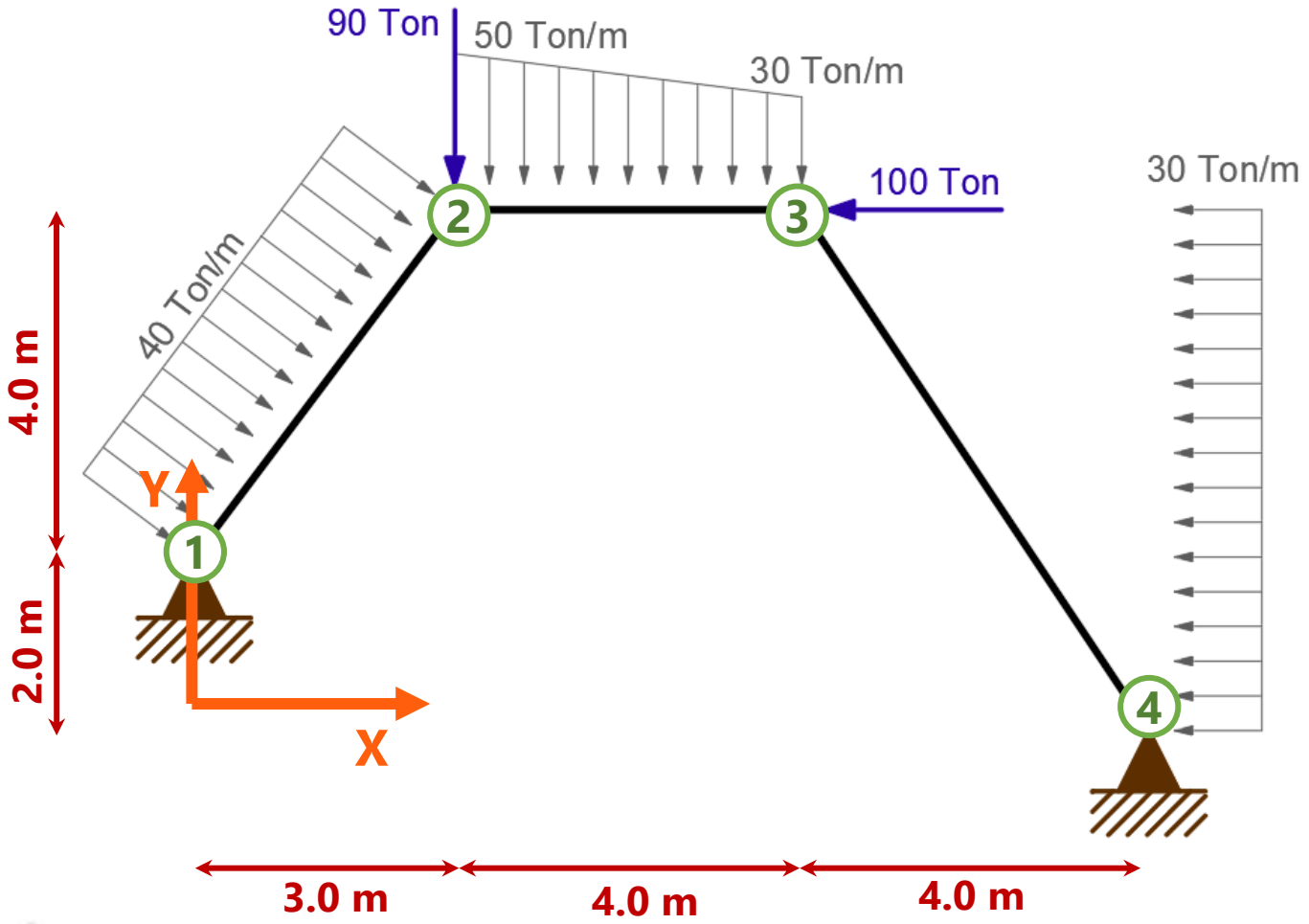
Número de elementos: 3

Número de grados de libertad: 12

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



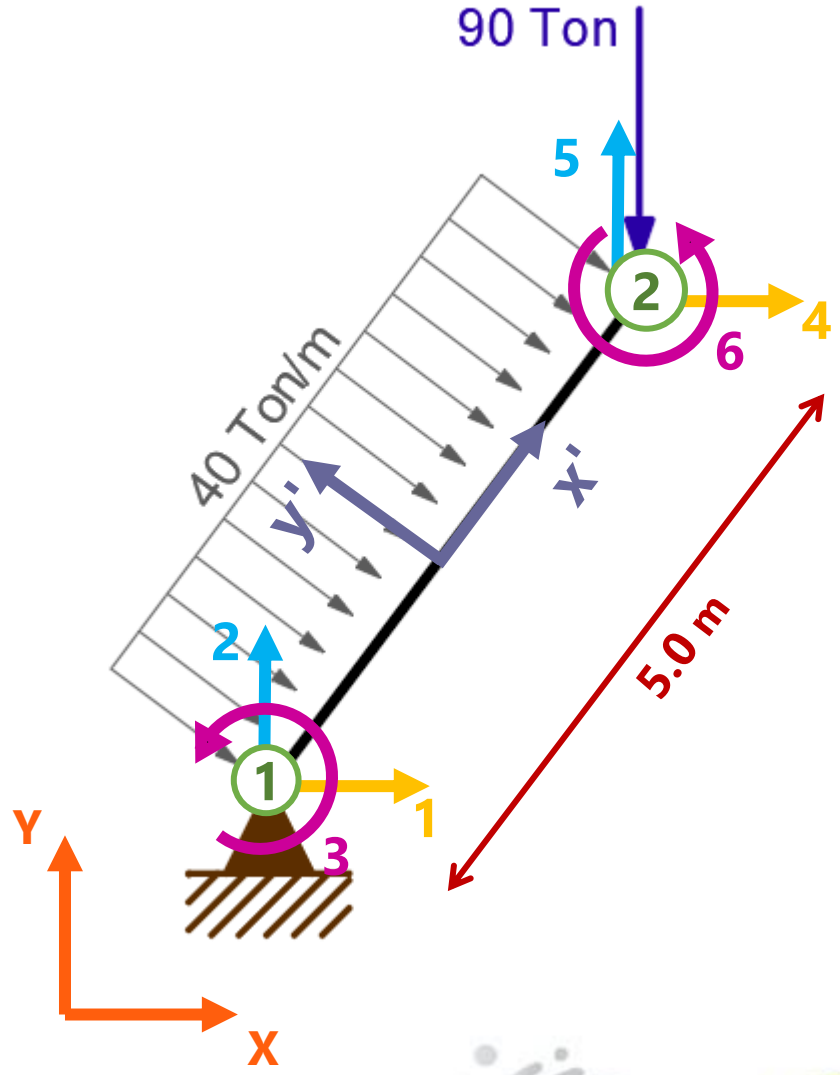
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	2.0
2	3.0	6.0
3	7.0	6.0
4	11.0	0.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	5.0	53.13

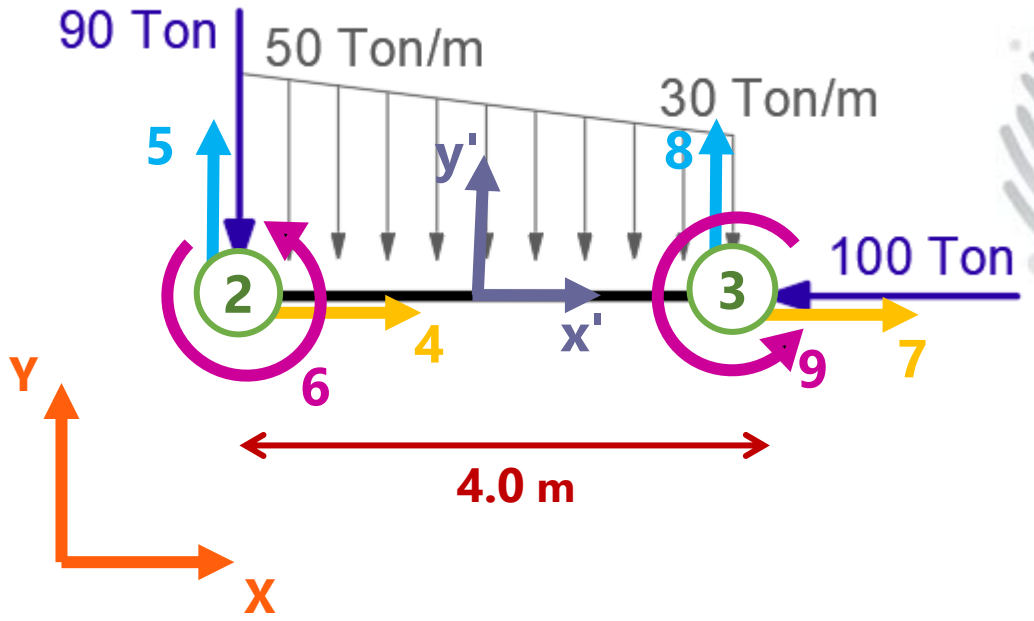


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	5.0	53.13
2	2	2	4.0	0

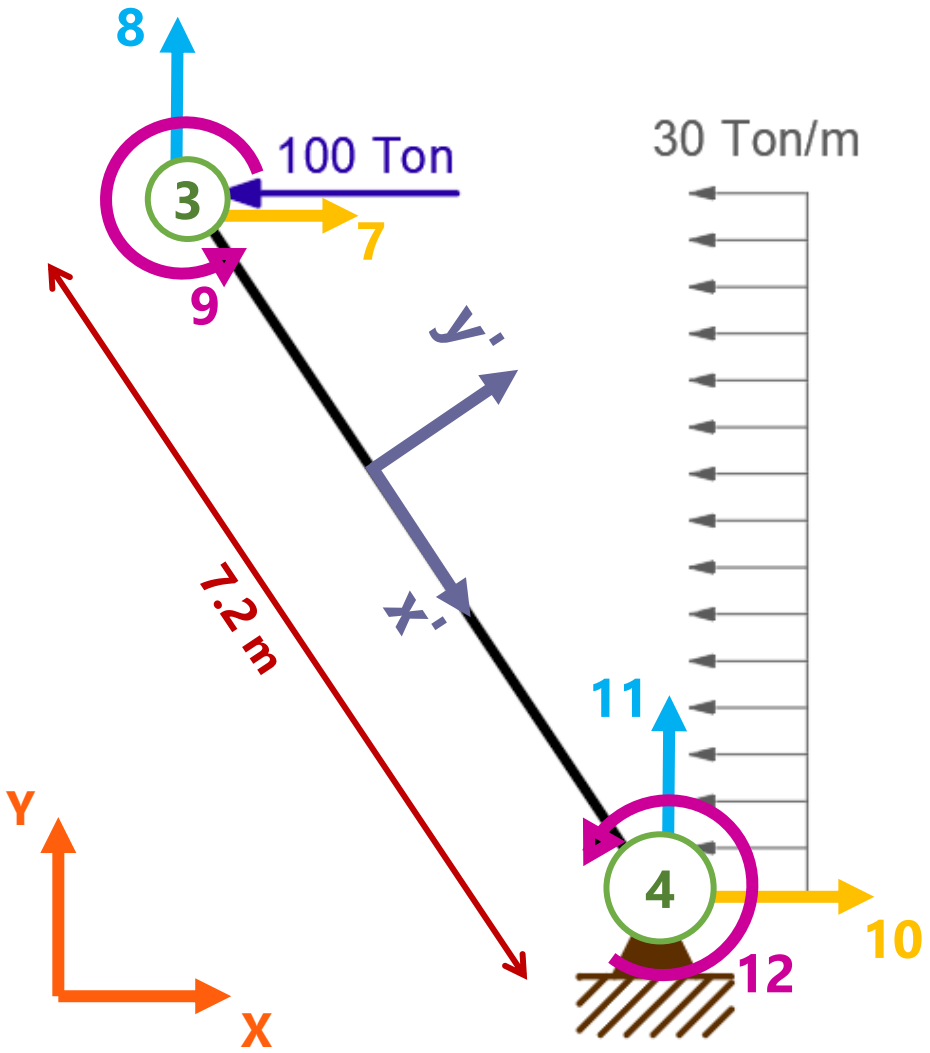


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

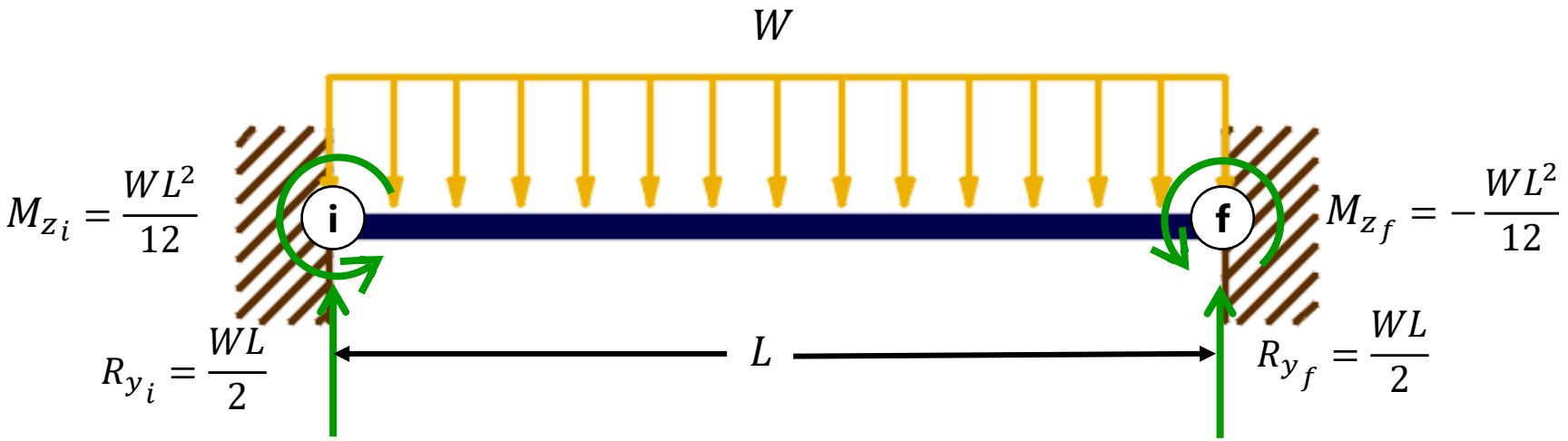
ELEMENTO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	5.0	53.13
2	2	3	4.0	0
3	3	4	7.2	-56.31



#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



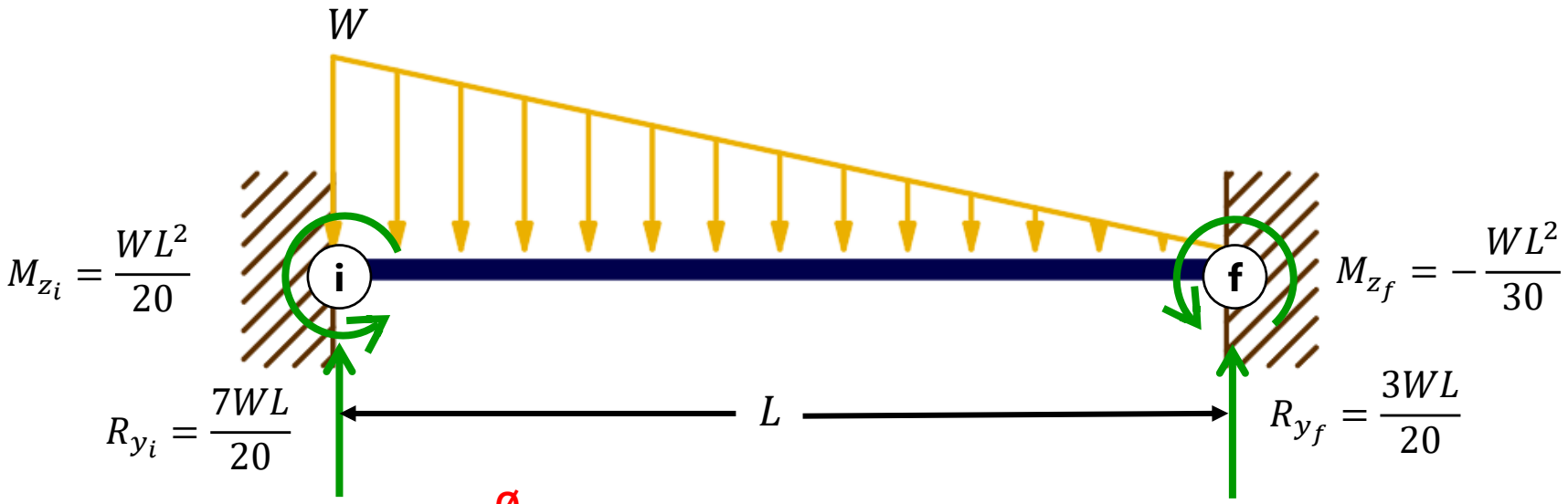
Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} \cancel{R_{x_i}} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ \cancel{R_{x_f}} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix}$ Ø Ø

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA TRIANGULAR UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



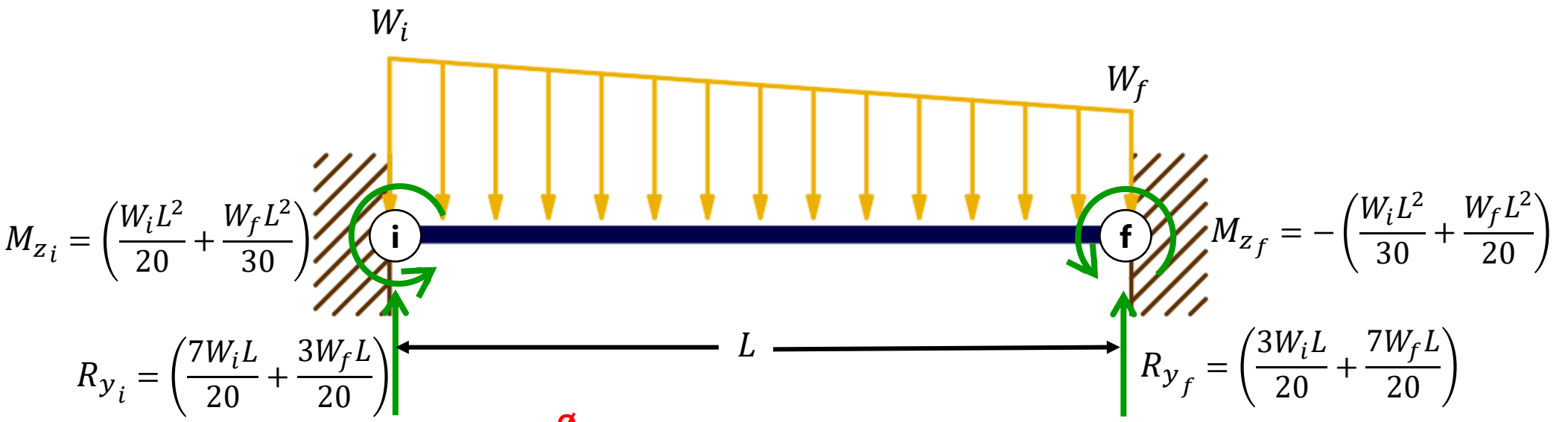
Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{x_i} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ N_{x_f} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix}$ (Ø, Ø)

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



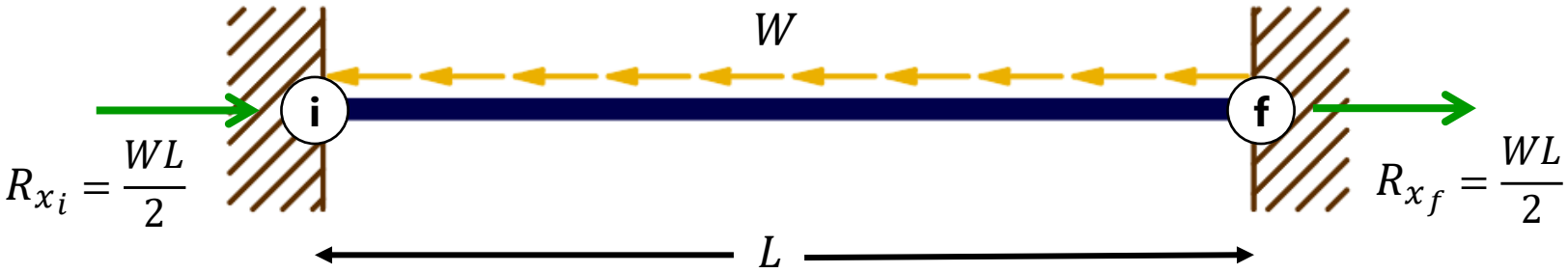
Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} \cancel{R_{x_i}} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ \cancel{R_{x_f}} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix}$ Ø Ø

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA AXIAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



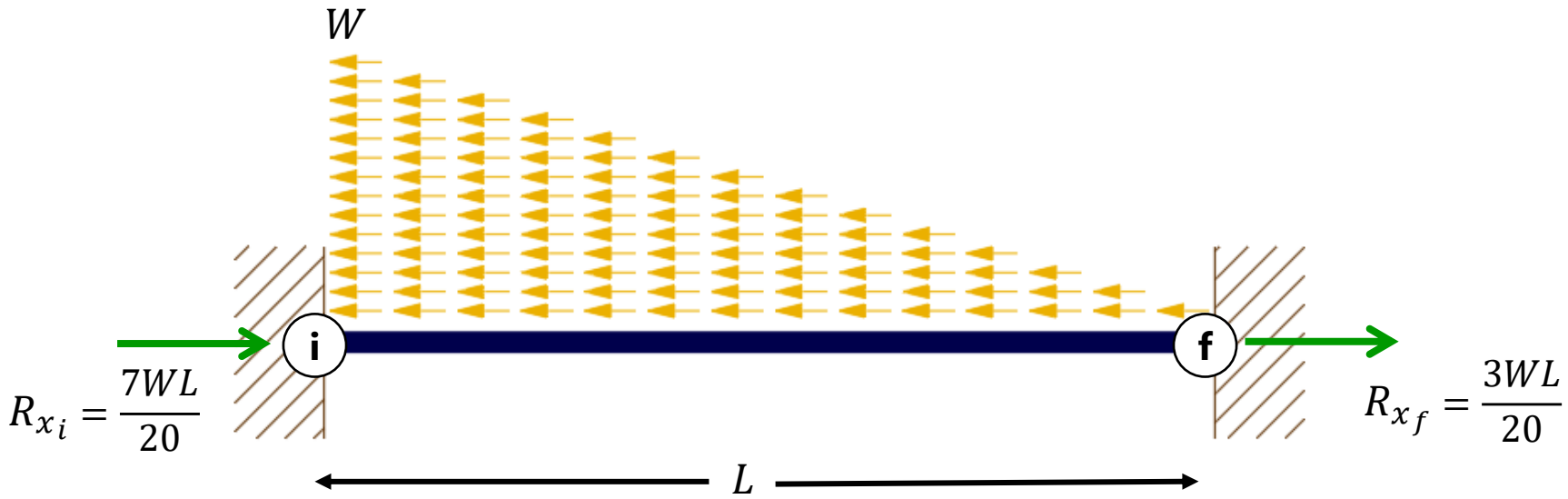
Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} R_{x_i} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ R_{x_f} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{ø} \\ \text{ø} \\ \\ \\ \text{ø} \\ \text{ø} \end{matrix}$

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA AXIAL TRIANGULAR UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



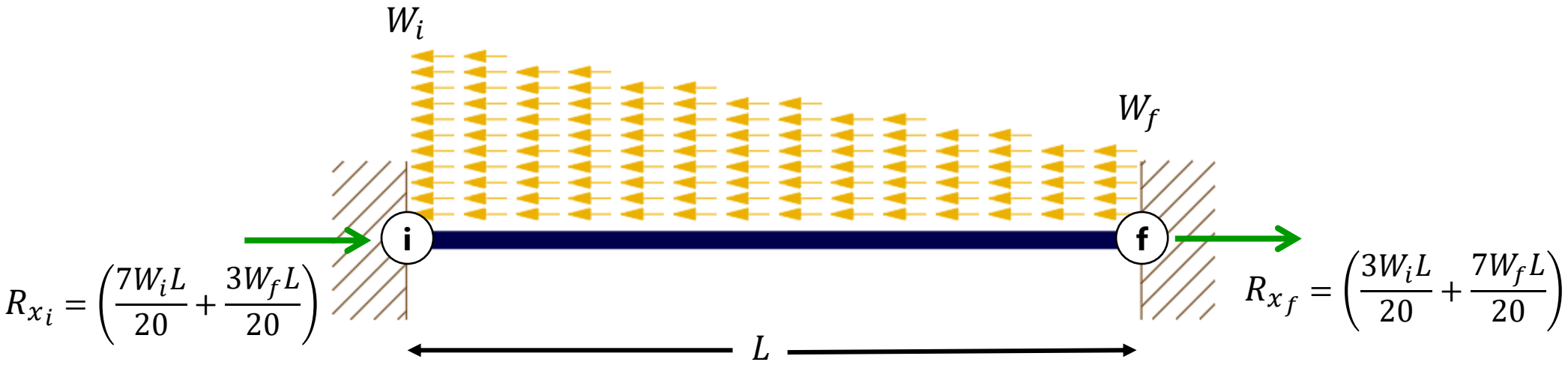
Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} R_{x_i} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ R_{x_f} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{Ø} \\ \text{Ø} \\ \\ \\ \text{Ø} \\ \text{Ø} \end{matrix}$

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA AXIAL TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} R_{x_i} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ R_{x_f} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{ø} \\ \text{ø} \\ \\ \\ \text{ø} \\ \text{ø} \end{matrix}$

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L[T]^T$

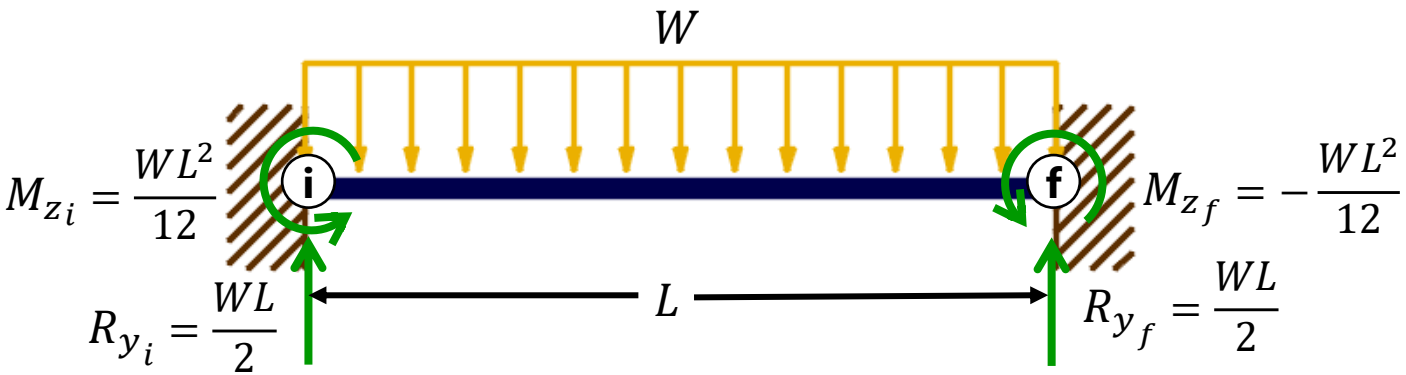
#LaUISqueQueremos

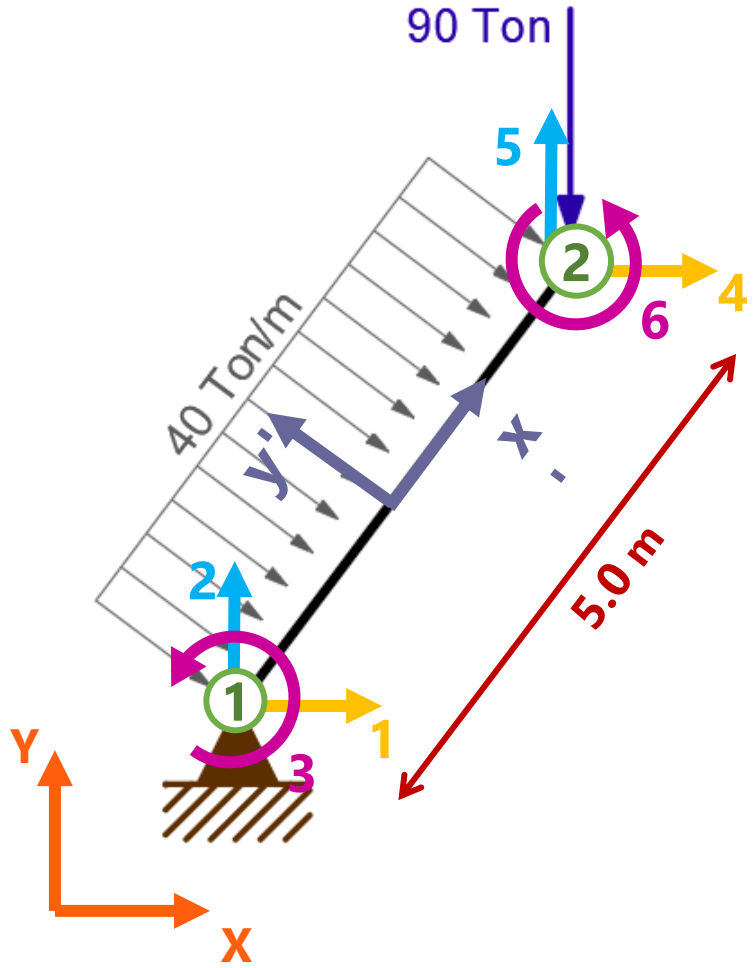
CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (Ton/m)	Wf (Ton/m)	PROYECCIÓN (m)
Uniforme	Local y	-40	-40	-

CASO FEM QUE APLICA:



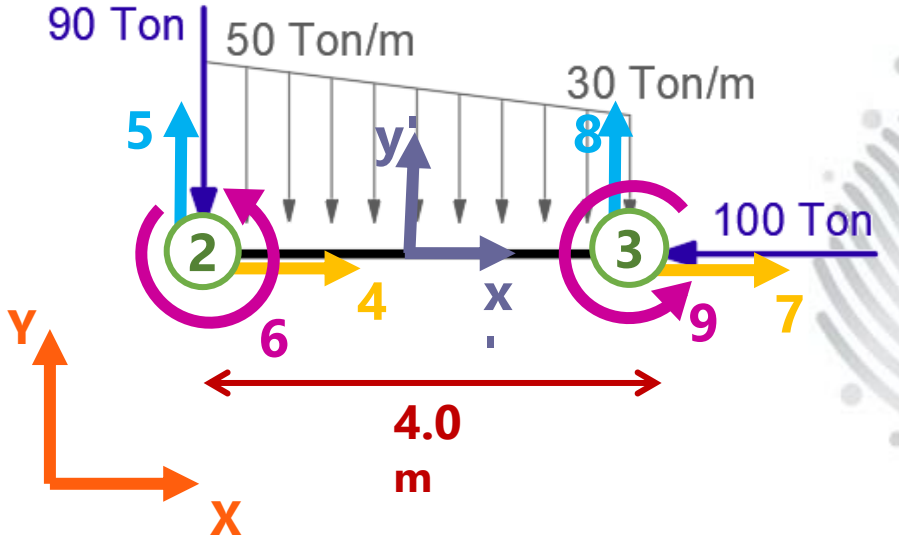


#LaUISqueQueremos

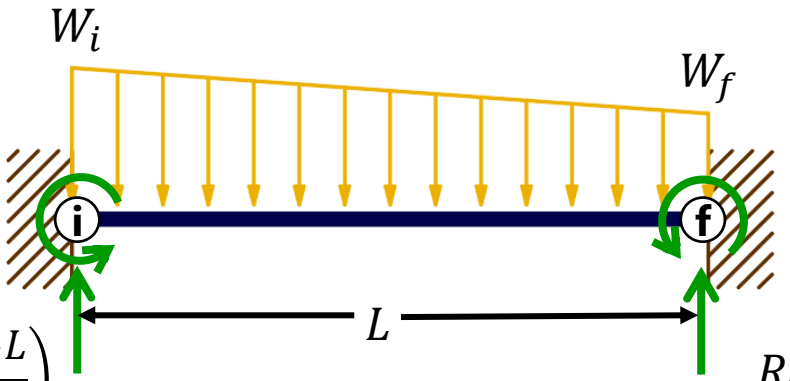
CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (Ton/m)	Wf (Ton/m)	PROYECCIÓN (m)
Uniforme	Local y	-40	-40	-
Uniforme	Local y	-50	-30	-



CASO FEM QUE APLICA:



$$M_{z_i} = \left(\frac{W_i L^2}{20} + \frac{W_f L^2}{30}\right)$$

$$M_{z_f} = -\left(\frac{W_i L^2}{30} + \frac{W_f L^2}{20}\right)$$

$$R_{y_i} = \left(\frac{7W_i L}{20} + \frac{3W_f L}{20}\right)$$

$$R_{y_f} = \left(\frac{3W_i L}{20} + \frac{7W_f L}{20}\right)$$

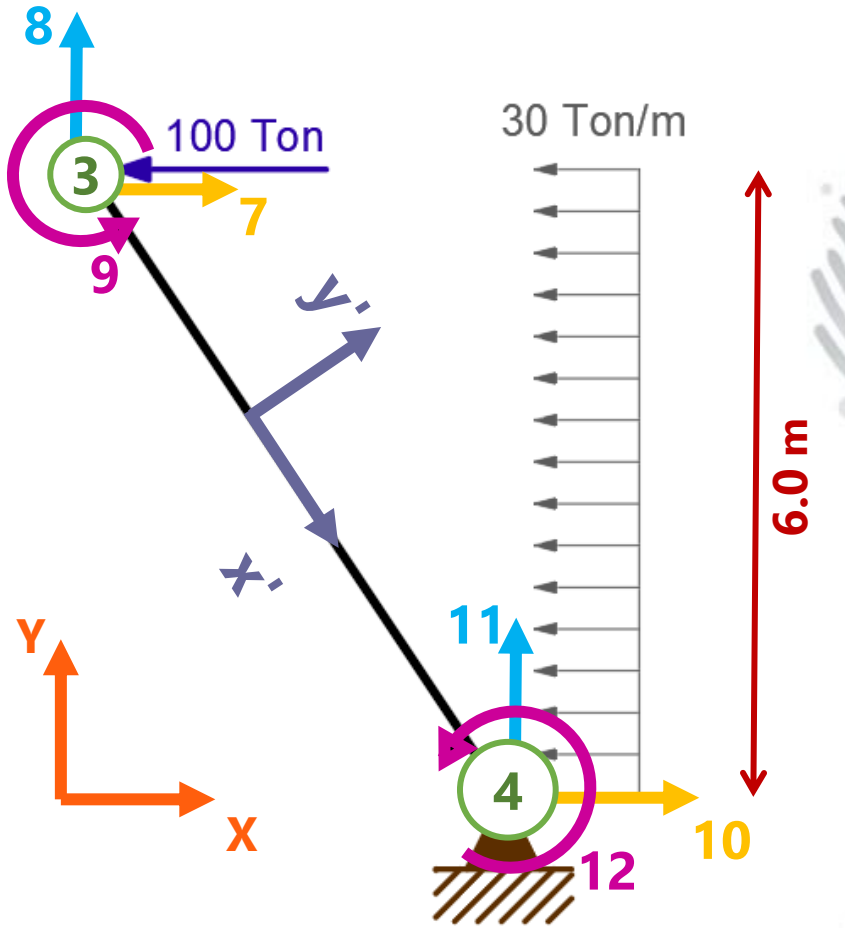
#LaUISqueQueremos

CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (Ton/m)	Wf (Ton/m)	PROYECCIÓN (m)
Uniforme	Local y	-40	-40	-
Uniforme	Local y	-50	-30	-
Uniforme	Global x	-30	-30	6

CASO FEM QUE APLICA:
*Se debe construir



#LaUISqueQueremos

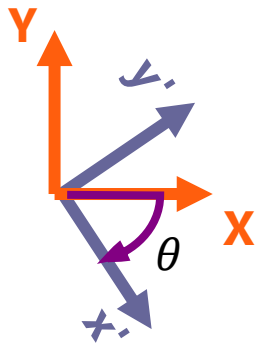
CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

TIPO DE CARGA CONSIDERADA:

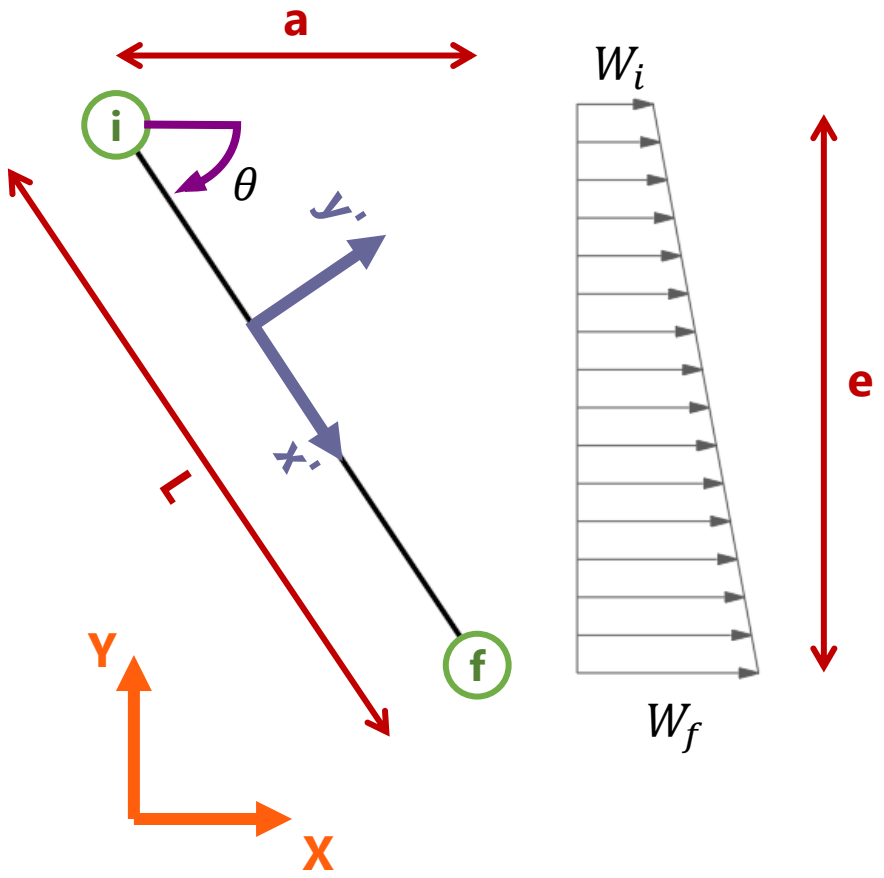
- **Cargas distribuidas trapezoidales** (caso general que incluye uniformes y triangulares)
- **Dirección:** Global X (horizontal)
- **Proyección:** Puede ser diferente a la longitud del elemento (e ≠ L)

El ángulo de inclinación del elemento:



$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{e}{a}\right)$$

*Ángulo respecto al eje de referencia global.

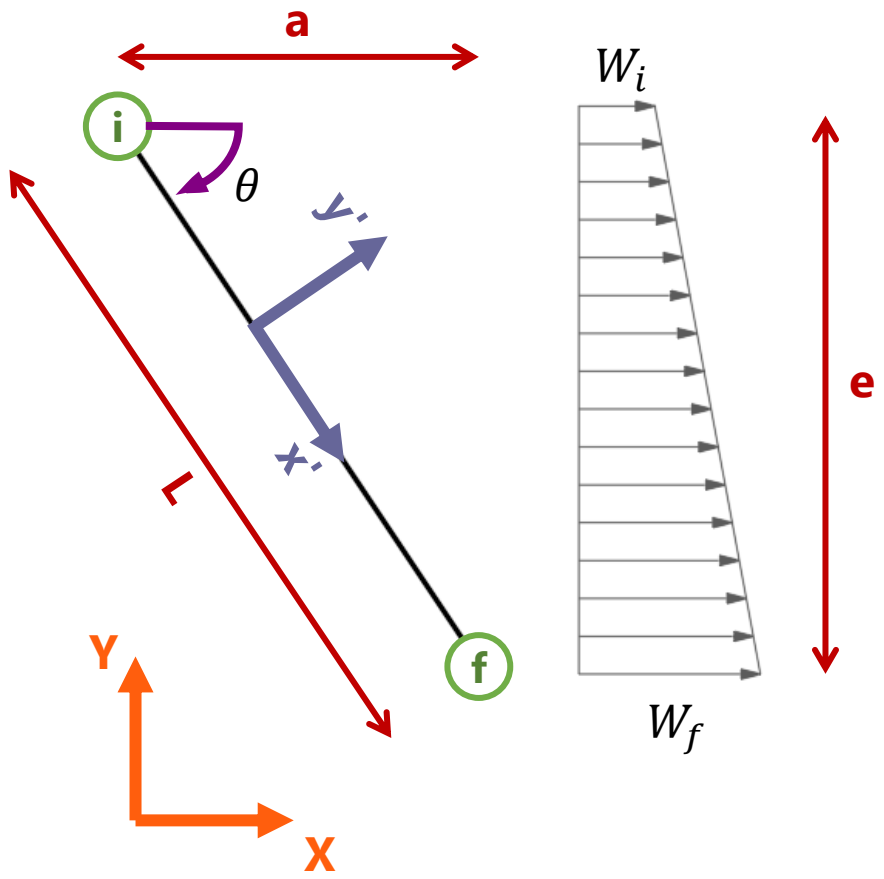


#LaUISqueQueremos

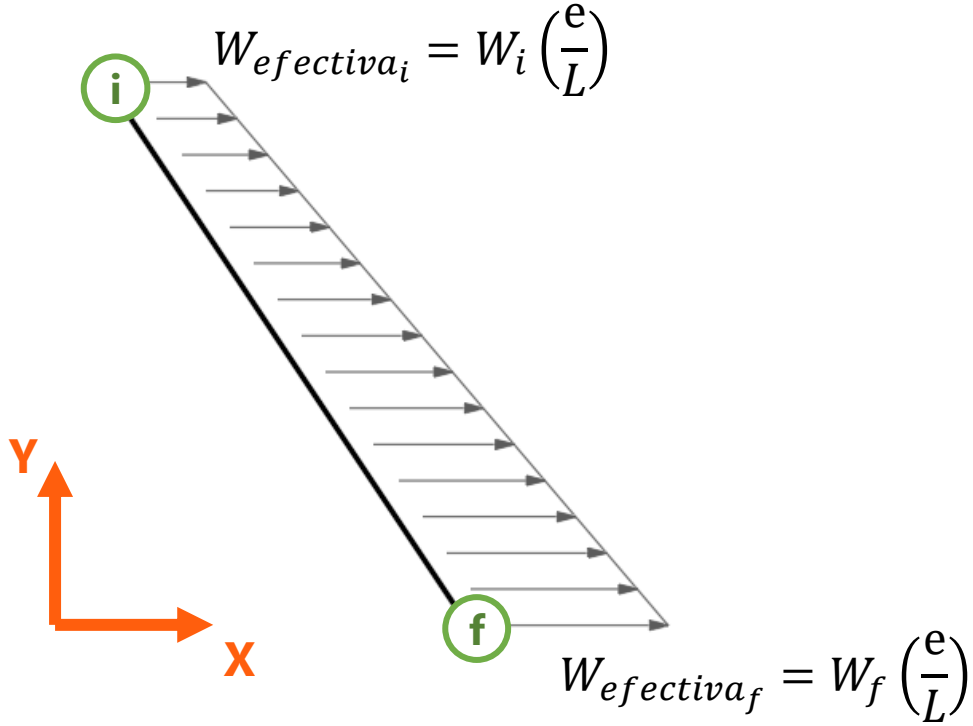
CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

Condiciones iniciales:



Carga efectiva sobre el elemento:

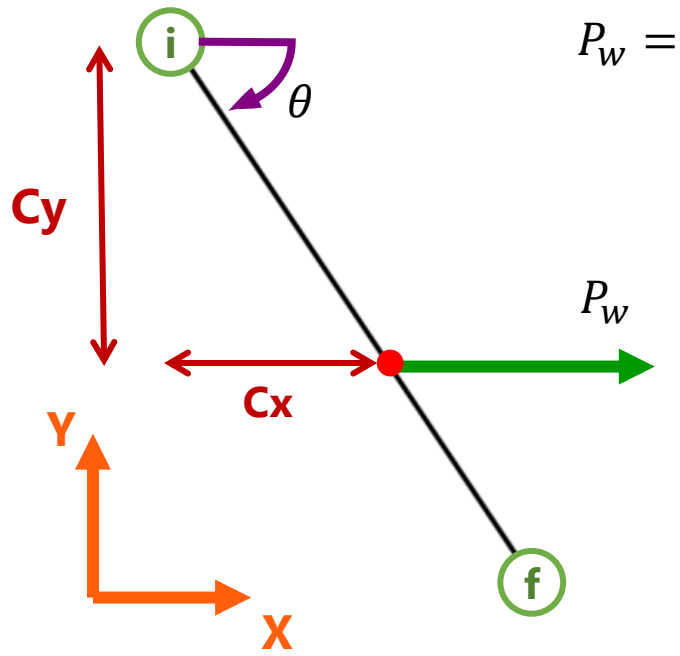


#LaUISqueQueremos

CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

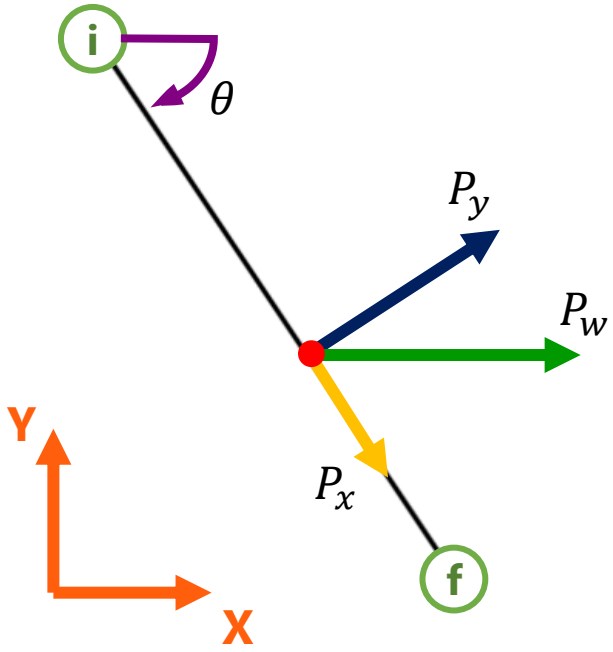
Fuerza total equivalente (Pw):



$$P_w = \left(\frac{W_f + W_i}{2}\right) e$$

$$C_x = \frac{C_y}{\tan(\theta)} \qquad C_y = \frac{e}{3}\left(\frac{W_i + 2W_f}{W_i + W_f}\right)$$

Descomposición de Pw en direcciones locales:



$P_x = P_w \cos(\theta)$ → Componente paralela

$P_y = -P_w \sin(\theta)$ → Componente perpendicular

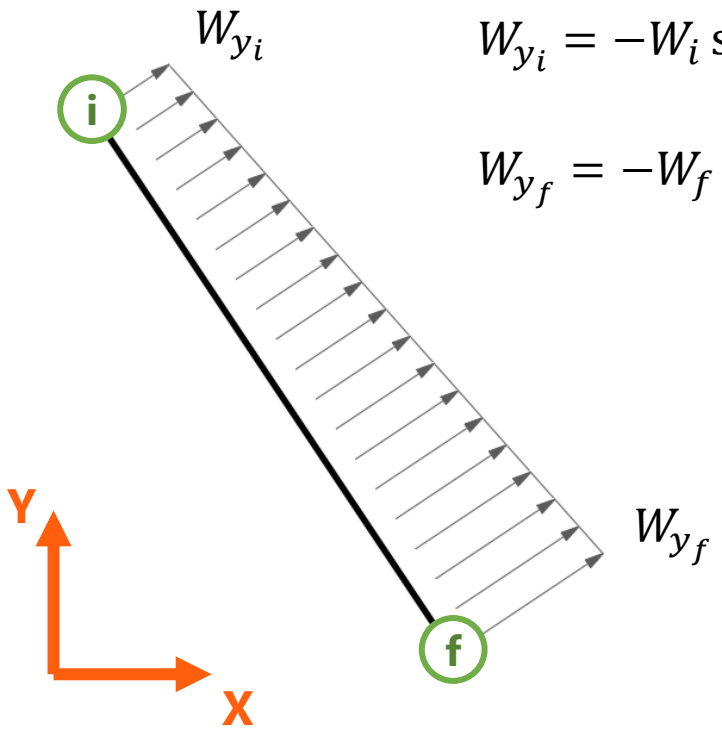
#LaUISqueQueremos

CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

Componentes locales de la carga distribuida

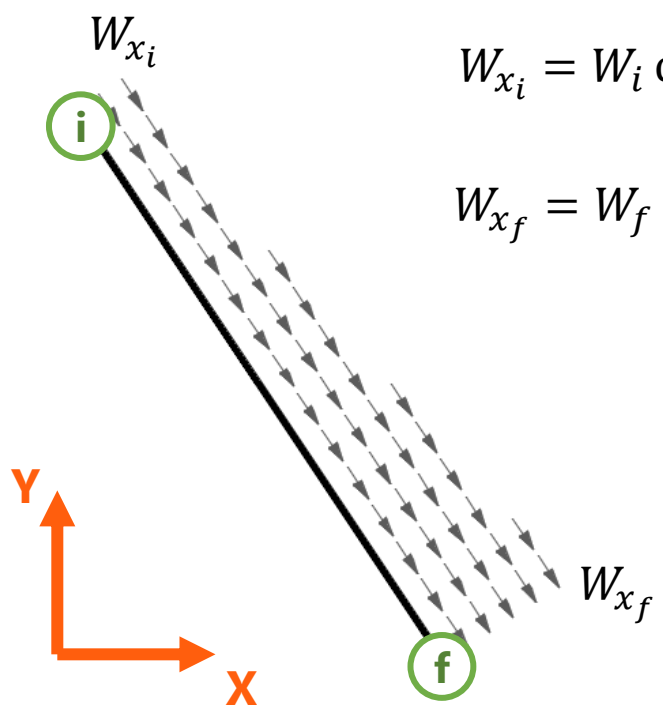
Eje local y (y'):



$$W_{y_i} = -W_i \sin(\theta)\left(\frac{e}{L}\right)$$

$$W_{y_f} = -W_f \sin(\theta)\left(\frac{e}{L}\right)$$

Eje local x (x'):



$$W_{x_i} = W_i \cos(\theta)\left(\frac{e}{L}\right)$$

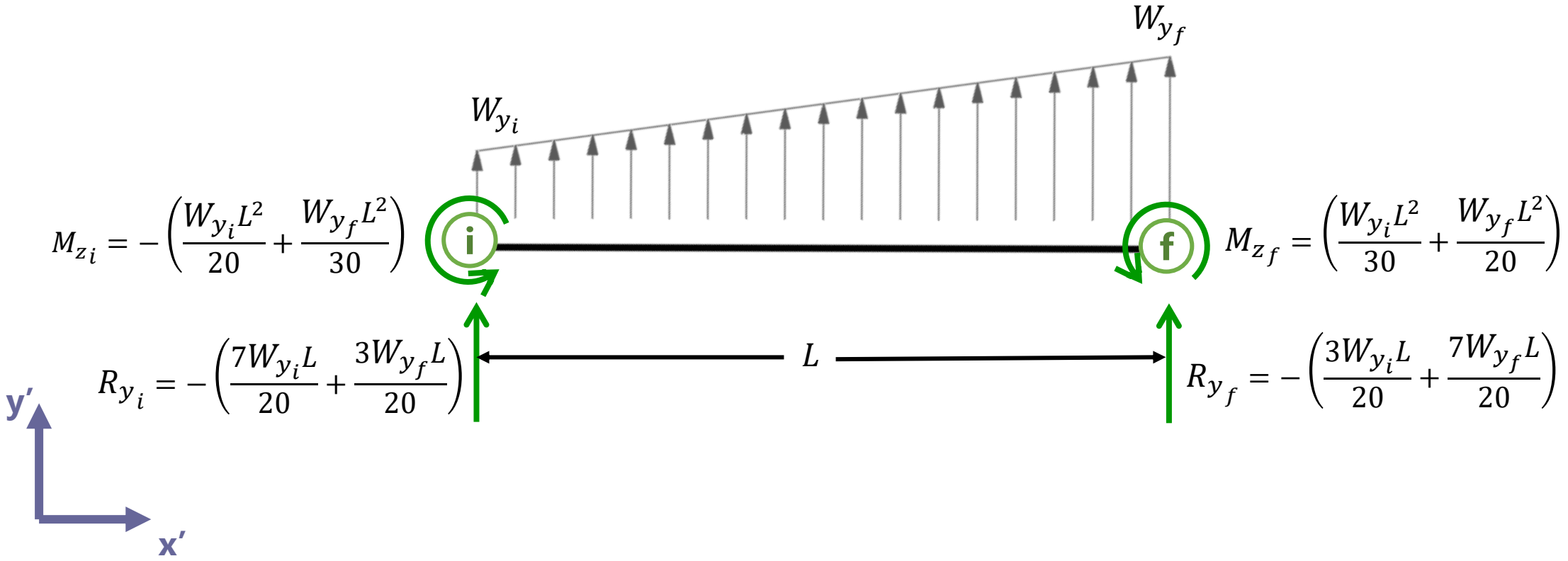
$$W_{x_f} = W_f \cos(\theta)\left(\frac{e}{L}\right)$$

#LaUISqueQueremos

CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

Fuerzas de empotramiento perfecto EJE LOCAL Y

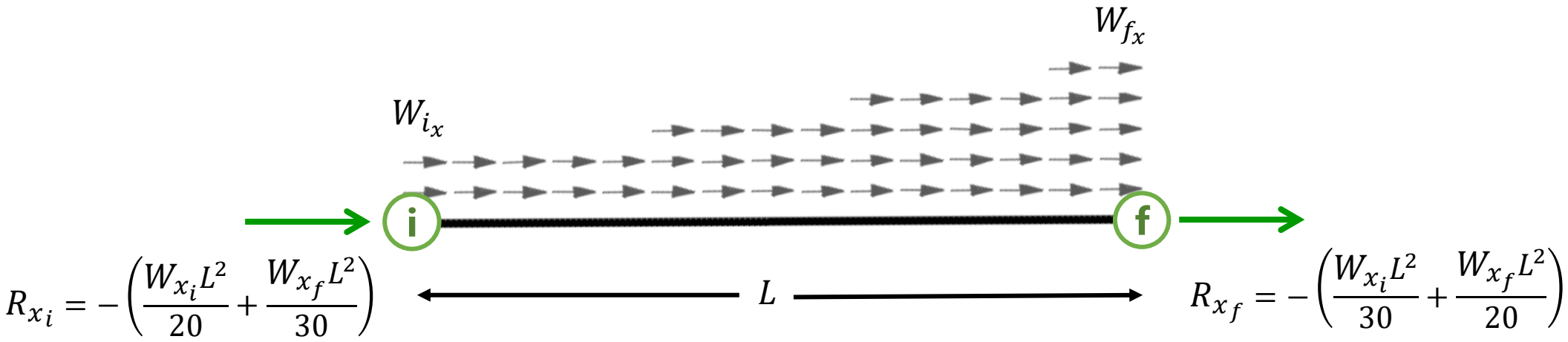


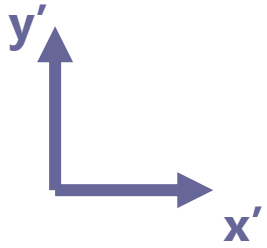
#LaUISqueQueremos

CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

Fuerzas de empotramiento perfecto EJE LOCAL X



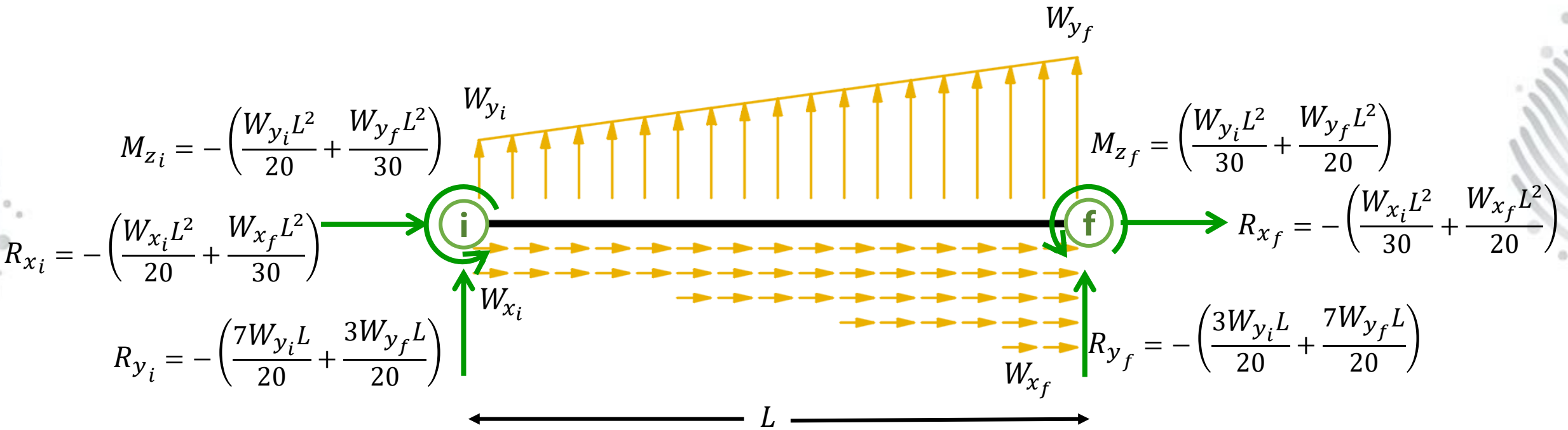


#LaUISqueQueremos

CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

Fuerzas de empotramiento perfecto



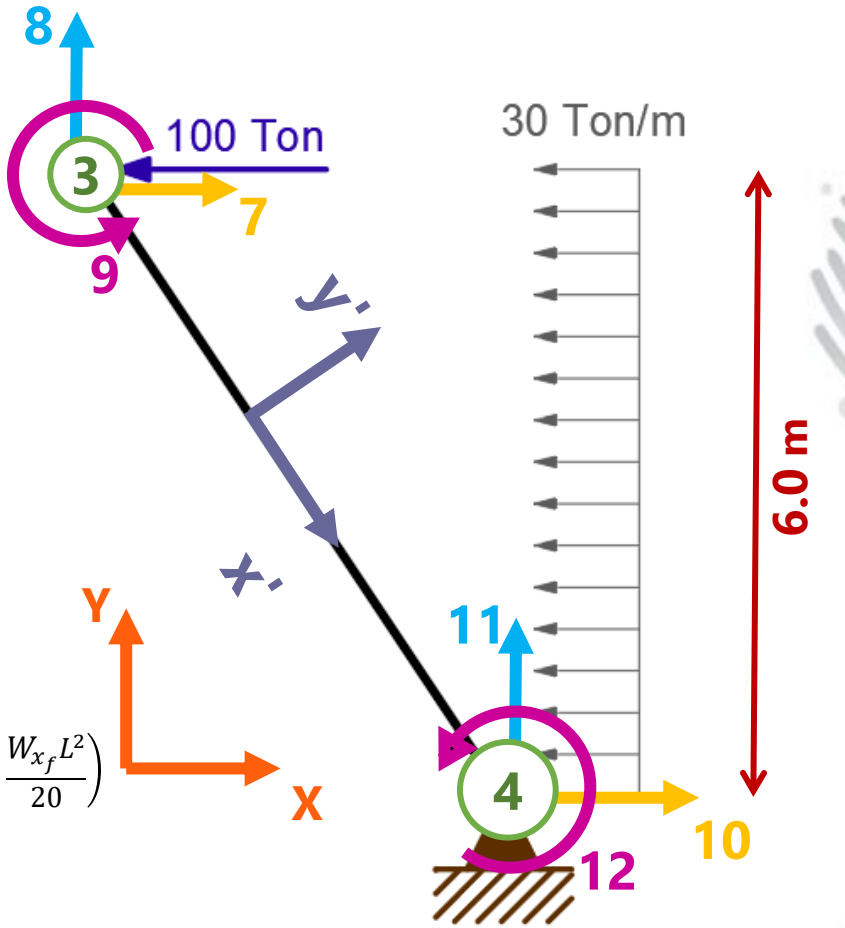
$$W_{x_i} = W_i \cos(\theta)\left(\frac{e}{L}\right) \qquad W_{x_f} = W_f \cos(\theta)\left(\frac{e}{L}\right)$$

$$W_{y_i} = -W_i \sin(\theta)\left(\frac{e}{L}\right) \qquad W_{y_f} = -W_f \sin(\theta)\left(\frac{e}{L}\right)$$

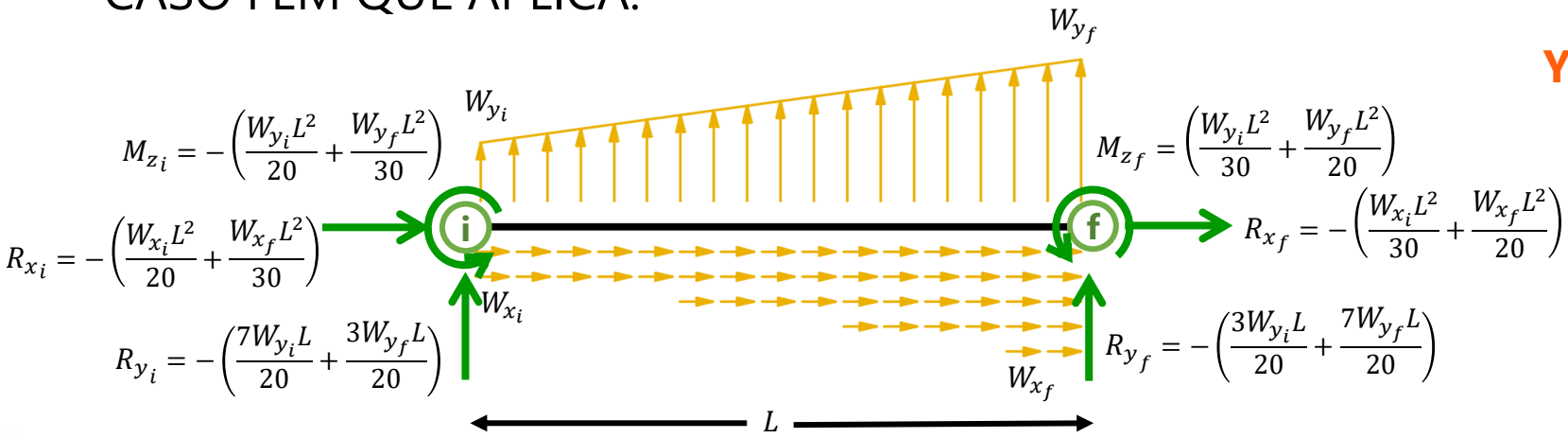
CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (Ton/m)	Wf (Ton/m)	PROYECCIÓN (m)
Uniforme	Local y	-40	-40	-
Uniforme	Local y	-50	-30	-
Uniforme	Global x	-30	-30	6



CASO FEM QUE APLICA:



ECUACIONES FUNDAMENTALES

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Matriz de rigidez local:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L [T] \{U\}_G$

Matriz de transformación:

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#LaUISqueQueremos

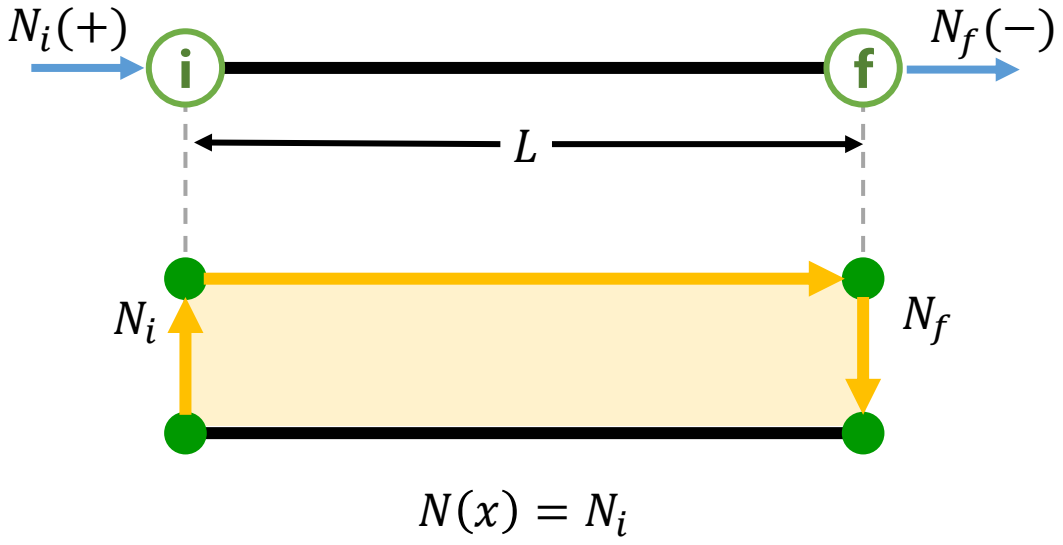
DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA AXIAL (N)

Ecuación: $N(x) = \int W(x)\,dx + N_i$

Convención de signos:
Nf > 0 → Tracción (el elemento se estira)
Nf < 0 → Compresión (el elemento se acorta)

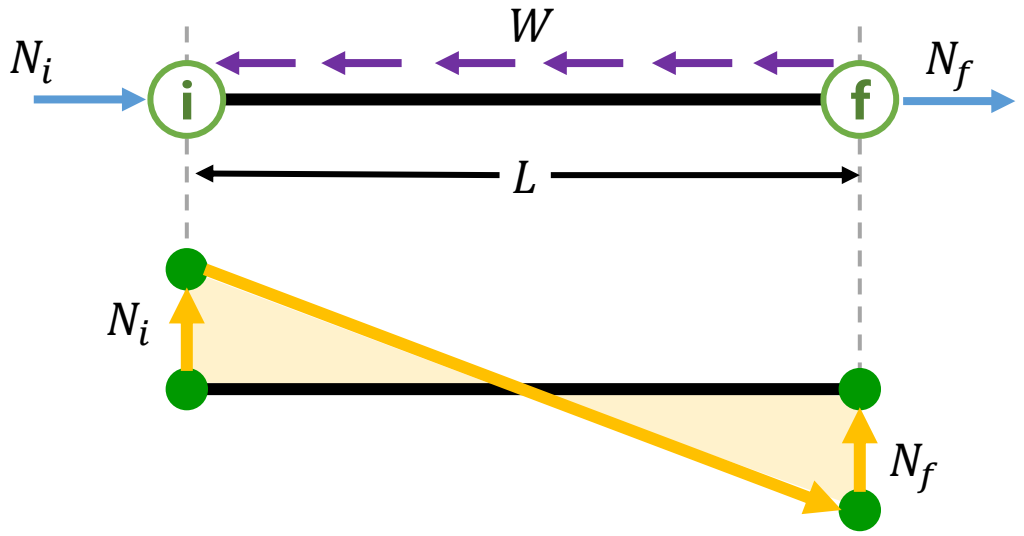
CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$N(x) = N_i$$

Se cumple: |Ni| = |Nf| (mismo valor y distinto signo)

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



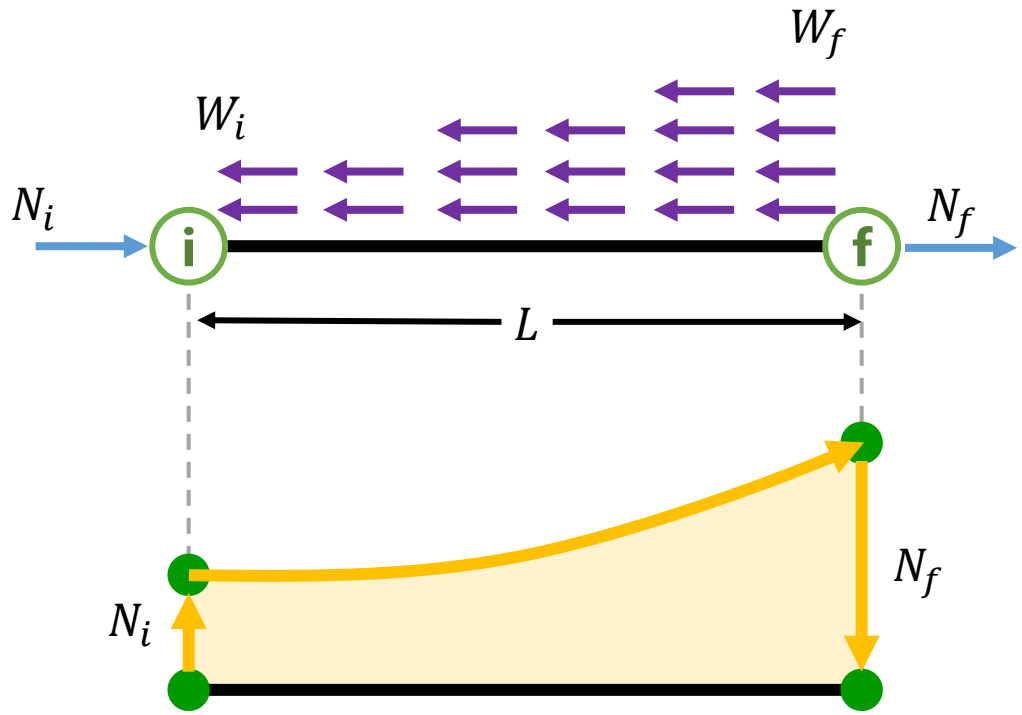
$$N(x) = W \cdot x + N_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA AXIAL (N)

CASO III: CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



Ecuación: $N(x) = \int W(x)\,dx + N_i$

$$N(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^2}{2} + W_i \cdot x + N_i$$

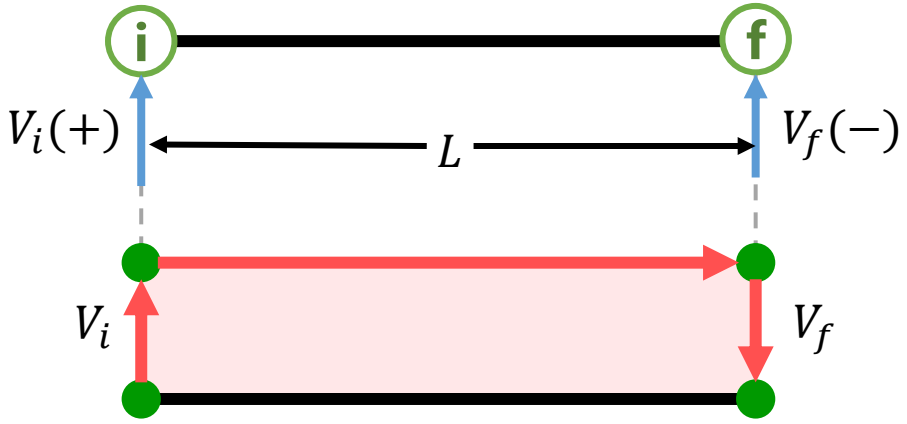
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

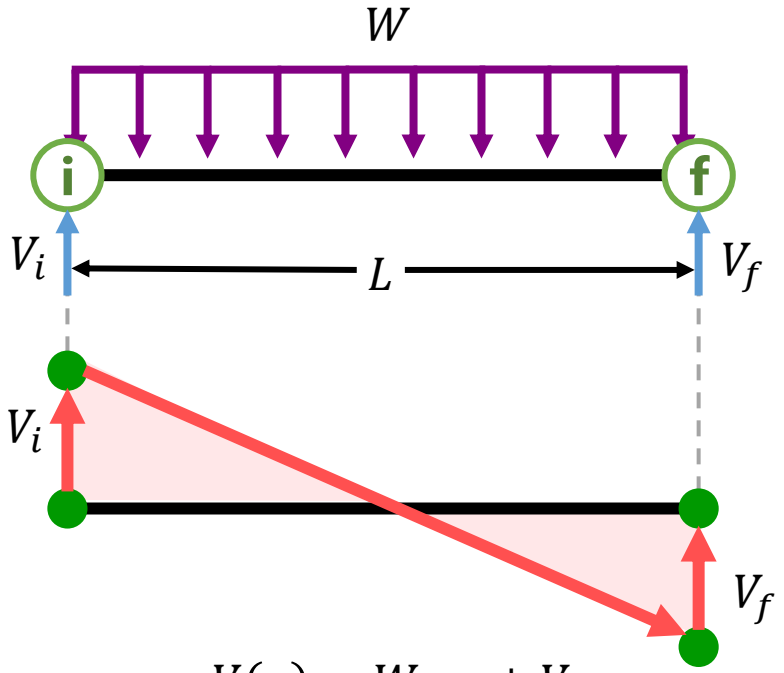
CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$V(x) = V_i$$

Se cumple: |Vi| = |Vf| (mismo valor y distinto signo)

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



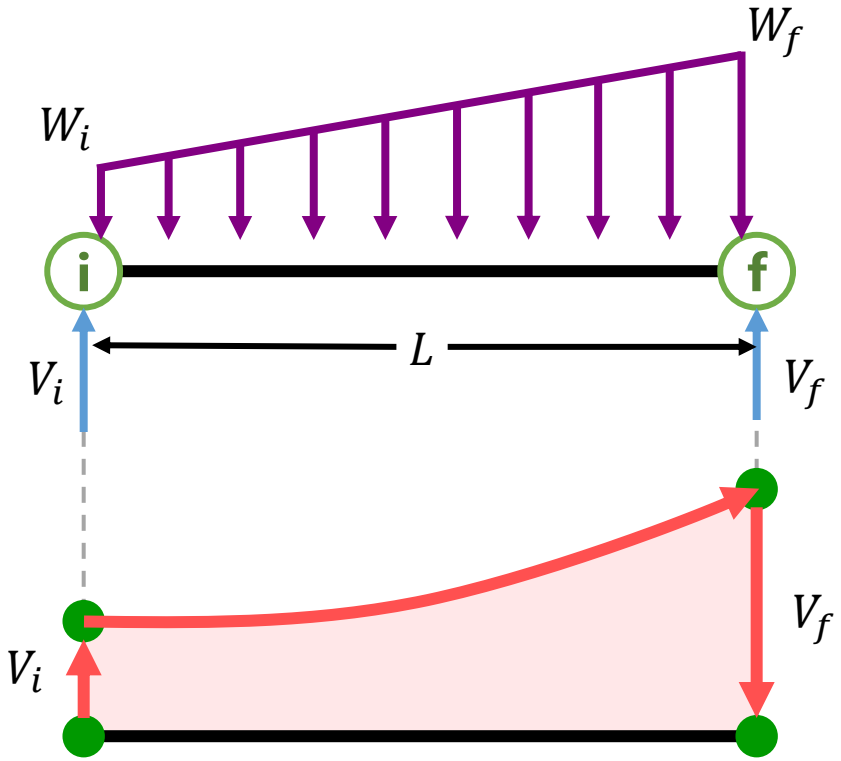
$$V(x) = W \cdot x + V_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

CASO III: CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

$$V(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^2}{2} + W_i \cdot x + V_i$$

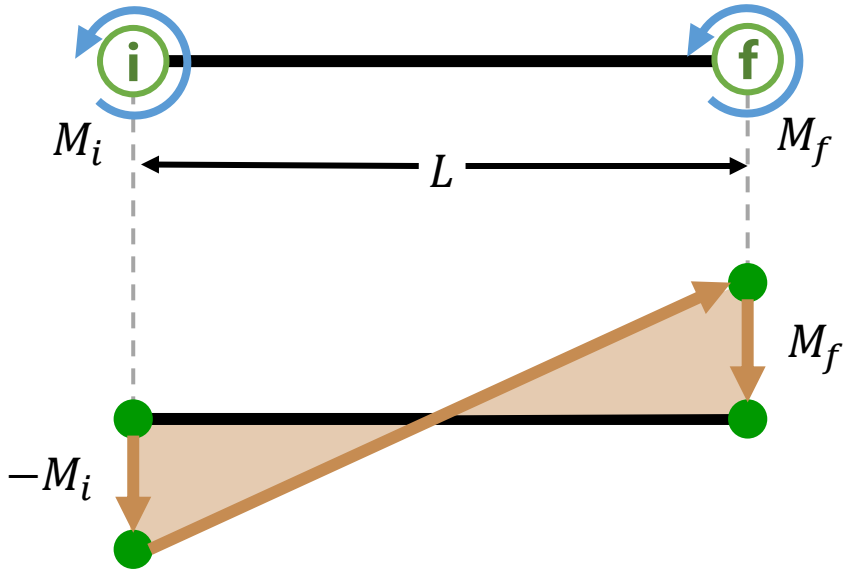
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

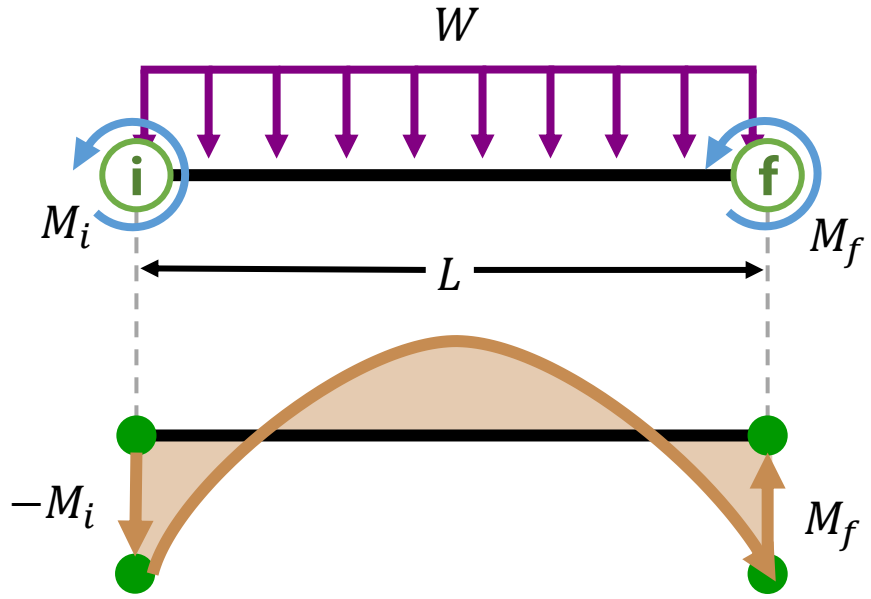
Ecuación: $M(x) = \int V(x)\,dx - M_i$

CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$M(x) = V_i \cdot x - M_i$$

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



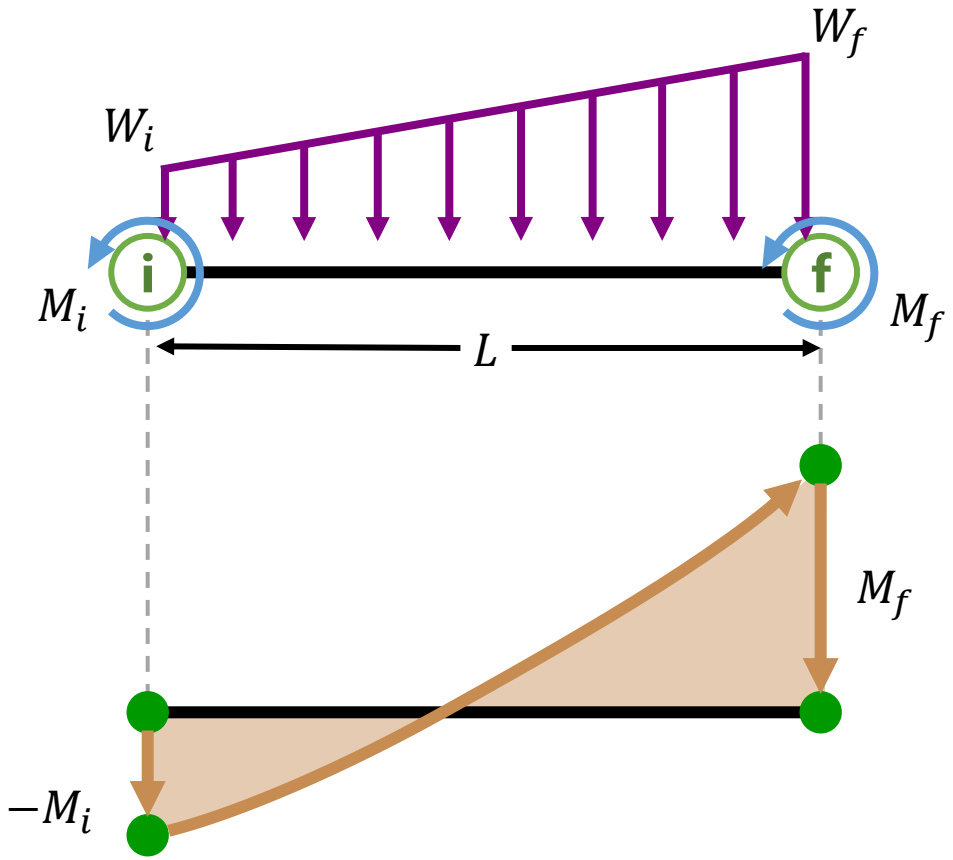
$$M(x) = \frac{W}{2}x^2 + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

CASO III: CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

$$M(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^3}{6} + W_i\frac{x^2}{2} + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

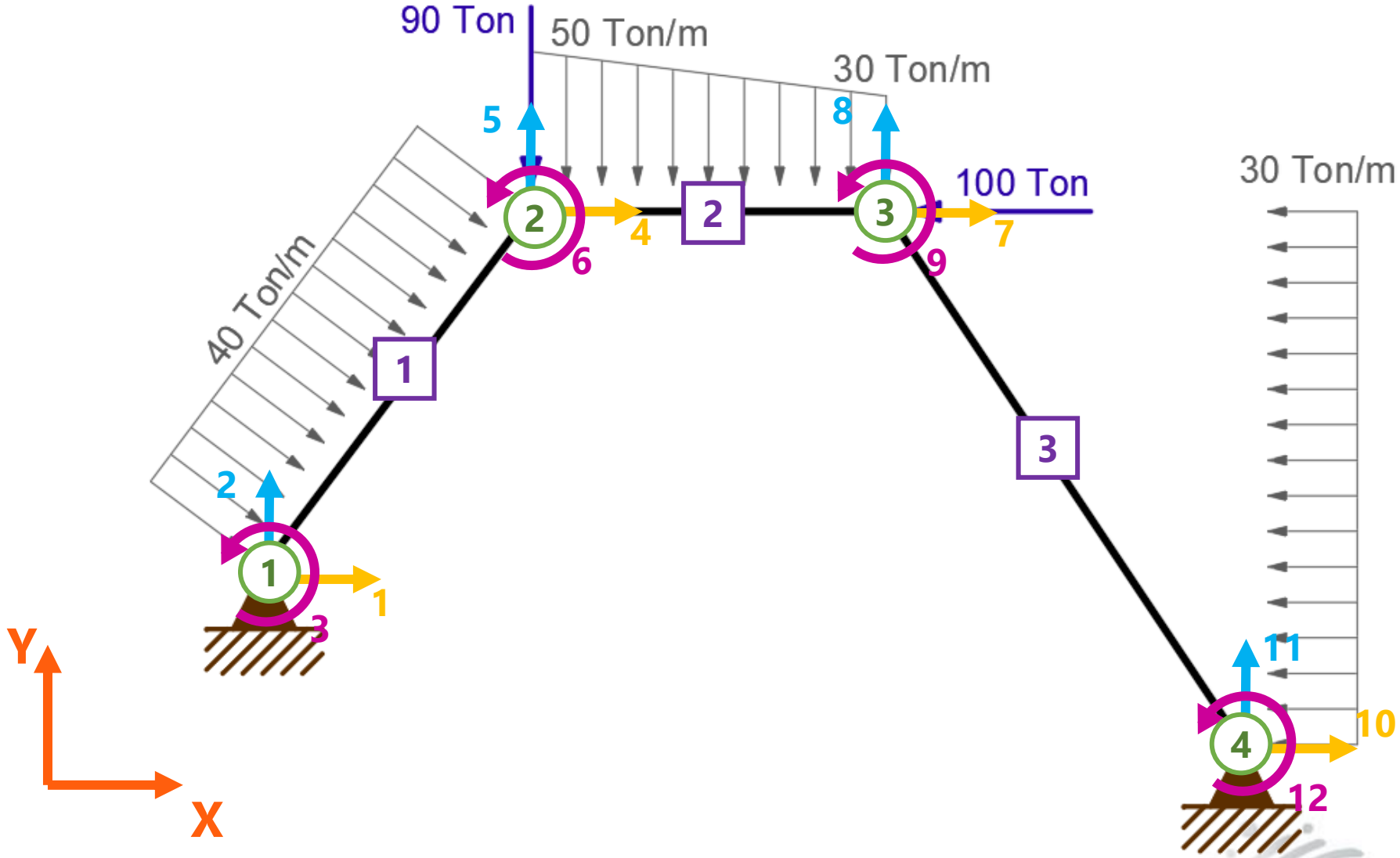
ELM	Ni	Nf	L [m]	α [°]	A [m^2]	I [m^4]
1	1	2	5.0	$\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$	0.105	$1.071875x10^{-3}$
2	2	3	4.0	0	0.105	$1.071875x10^{-3}$
3	3	4	$\sqrt{6^2+4^2}$	$-\tan^{-1}\left(\frac{6}{4}\right)$	0.105	$1.071875x10^{-3}$

NODO	X	Y
1	0.0	2.0
2	3.0	6.0
3	7.0	6.0
4	11.0	0.0

$$\boldsymbol{E = 24870062.32\ \frac{kN}{m^2}}$$

#LaUISqueQueremos

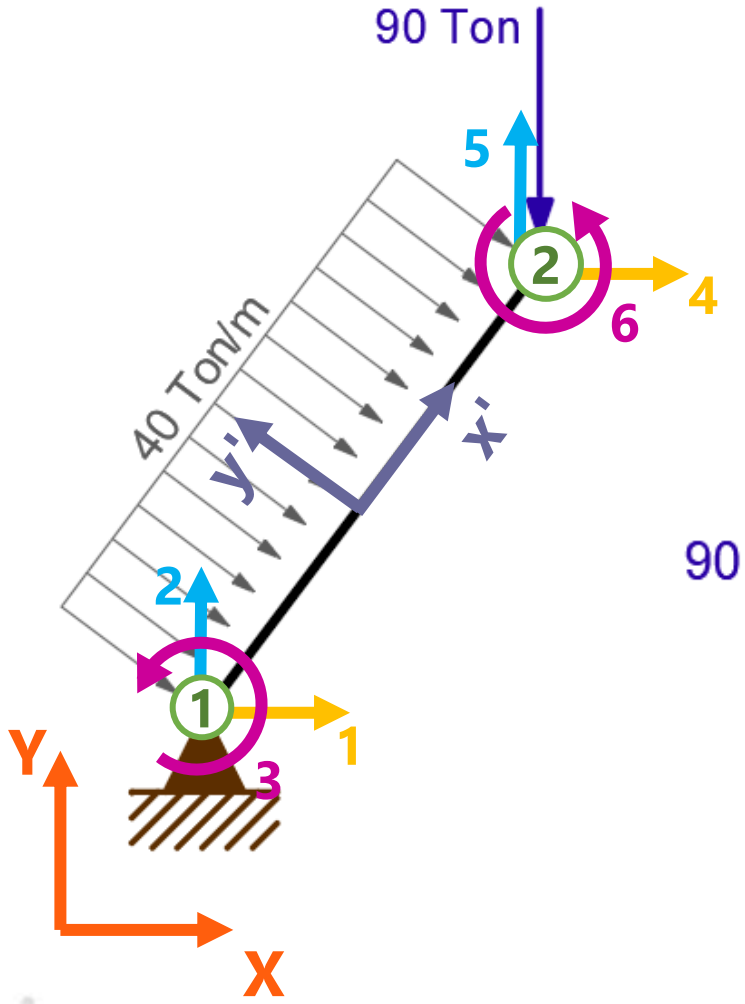
GRADOS DE LIBERTAD



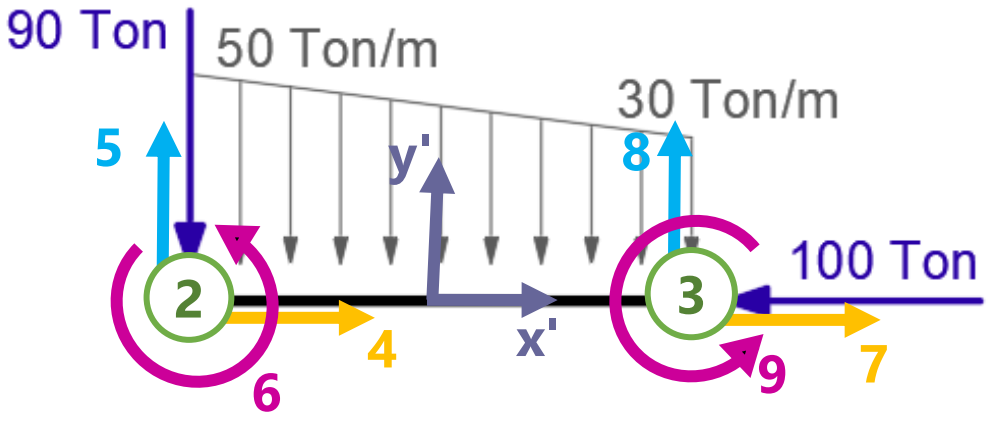
#LaUISqueQueremos

GRADOS DE LIBERTAD

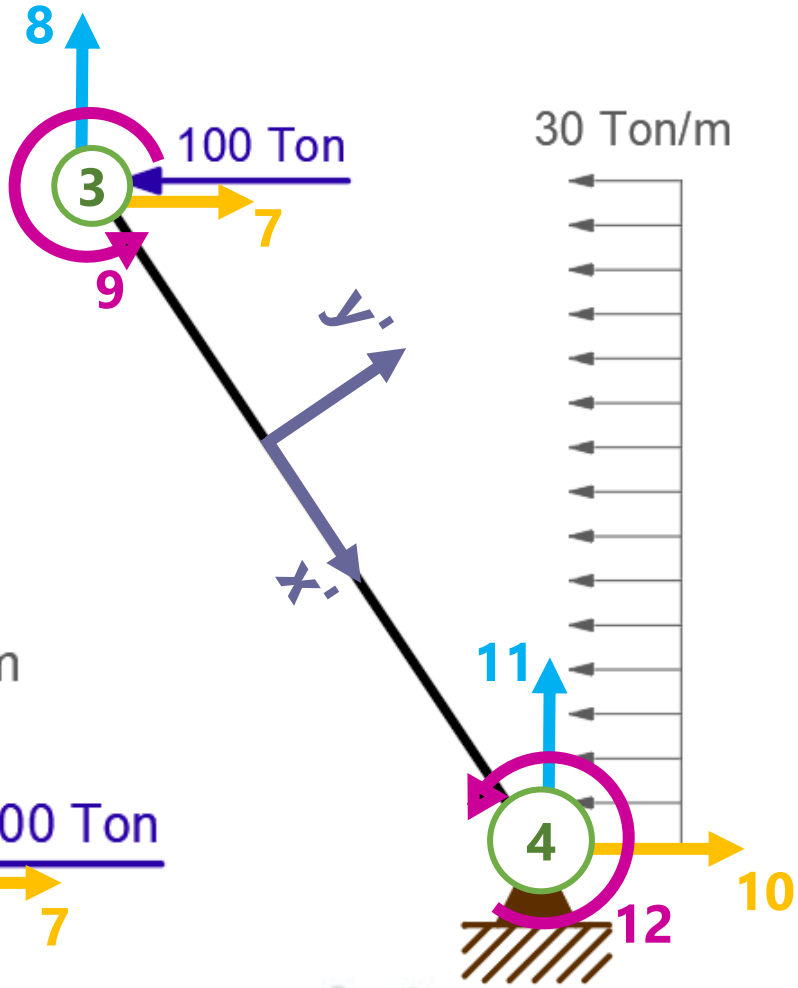
ELEMENTO 1



ELEMENTO 2



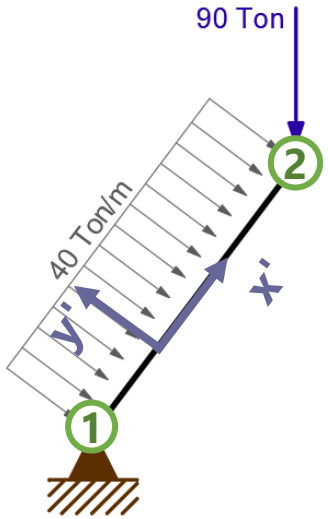
ELEMENTO 3



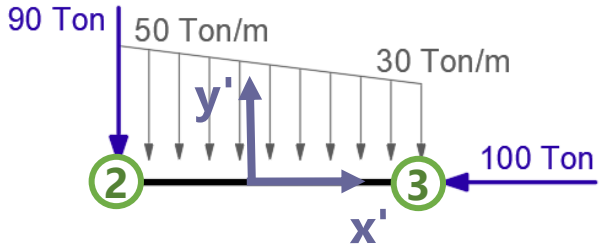
#LaUISqueQueremos

DEFINICIÓN DE CARGAS APLICADAS

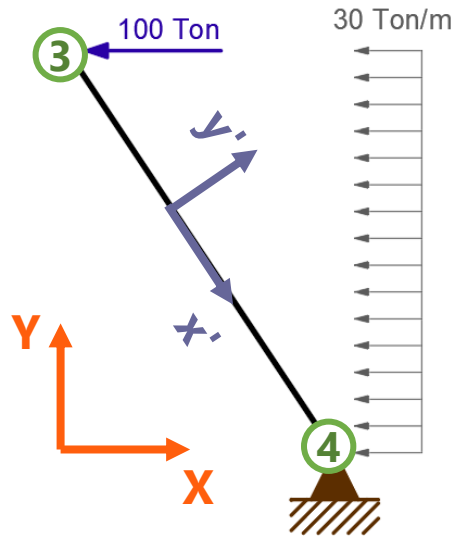
TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (Ton/m)	Wf (Ton/m)	PROYECCIÓN (m)
Uniforme	Local y	-40	-40	-
Uniforme	Local y	-50	-30	-
Uniforme	Global x	-30	-30	6



ELEMENTO 1

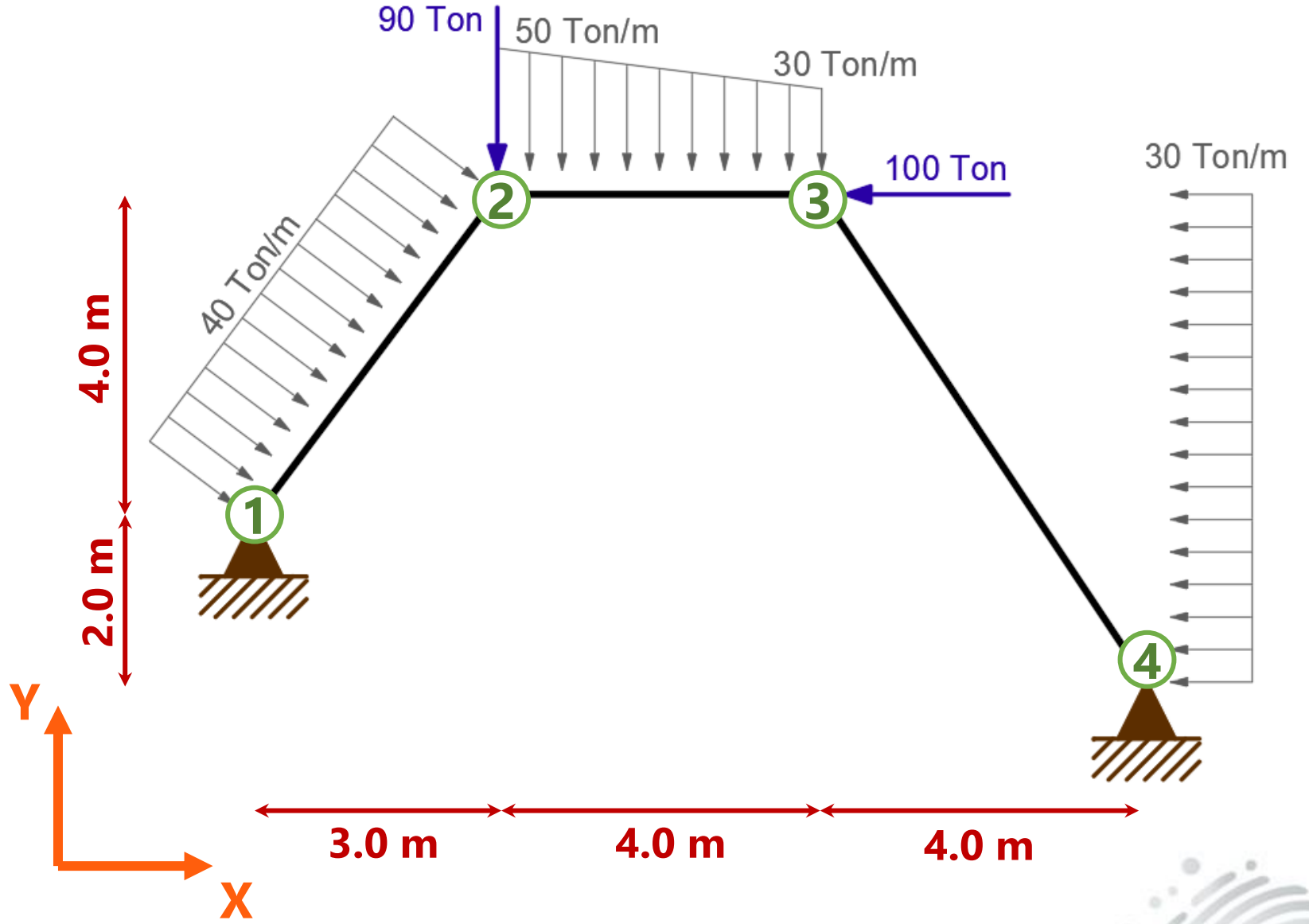


ELEMENTO 2



ELEMENTO 3

GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



#LaUISqueQueremos

ENSAMBLE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Matriz de rigidez local:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

#LaUISqueQueremos

VECTOR FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN Y'

NODO INICIAL:

$$R_{x_i} = 0$$

$$R_{x_i} = \left(\frac{7W_iL}{20} + \frac{3W_fL}{20}\right)$$

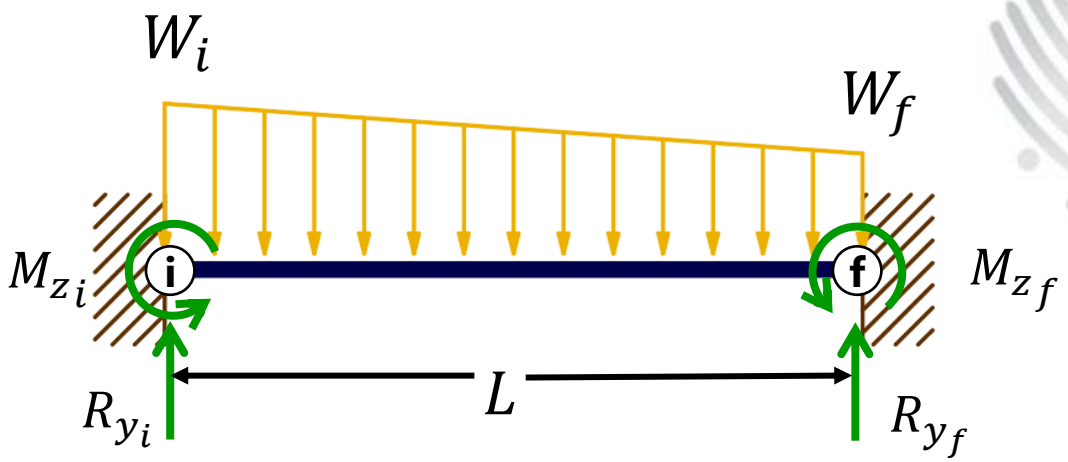
$$M_{z_i} = \left(\frac{W_iL^2}{20} + \frac{W_fL^2}{30}\right)$$

NODO FINAL:

$$R_{y_i} = 0$$

$$R_{y_f} = \left(\frac{3W_iL}{20} + \frac{7W_fL}{20}\right)$$

$$M_{z_f} = -\left(\frac{W_iL^2}{30} + \frac{W_fL^2}{20}\right)$$

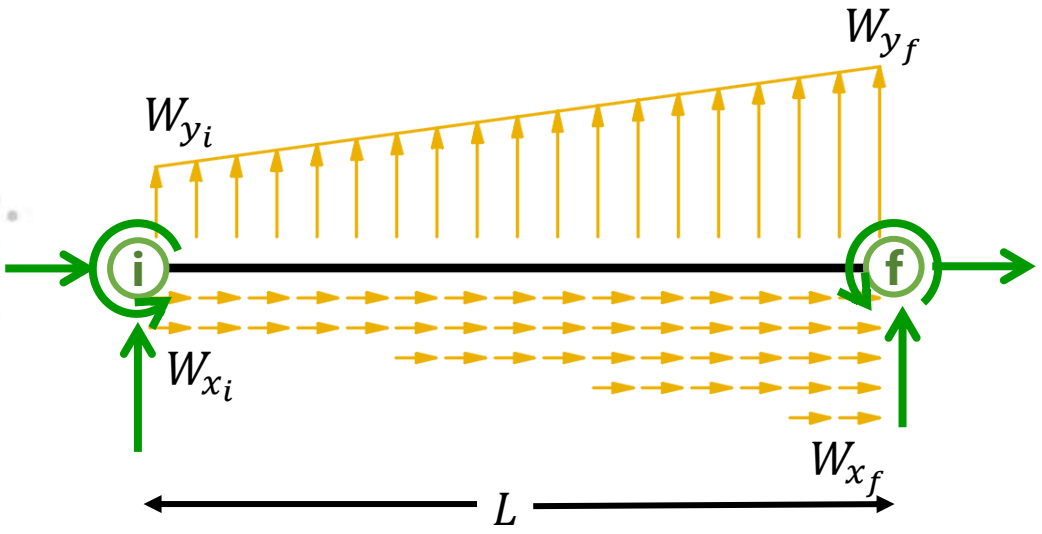


Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

VECTOR FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA EN X



NODO INICIAL:

$$R_{x_i} = -\left(\frac{W_{i_x}L^2}{20} + \frac{W_{f_x}L^2}{30}\right)$$

$$R_{y_i} = -\left(\frac{7W_{i_y}L}{20} + \frac{3W_{f_y}L}{20}\right)$$

$$M_{z_i} = -\left(\frac{W_{i_y}L^2}{20} + \frac{W_{f_y}L^2}{30}\right)$$

NODO FINAL:

$$R_{x_f} = -\left(\frac{W_{i_x}L^2}{30} + \frac{W_{f_x}L^2}{20}\right)$$

$$R_{y_f} = -\left(\frac{3W_{i_y}L}{20} + \frac{7W_{f_y}L}{20}\right)$$

$$M_{z_f} = \left(\frac{W_{i_y}L^2}{30} + \frac{W_{f_y}L^2}{20}\right)$$

$$W_{x_i} = W_i \cos(\theta)\left(\frac{e}{L}\right)$$

$$W_{y_i} = -W_i \sin(\theta)\left(\frac{e}{L}\right)$$

$$W_{x_f} = W_f \cos(\theta)\left(\frac{e}{L}\right)$$

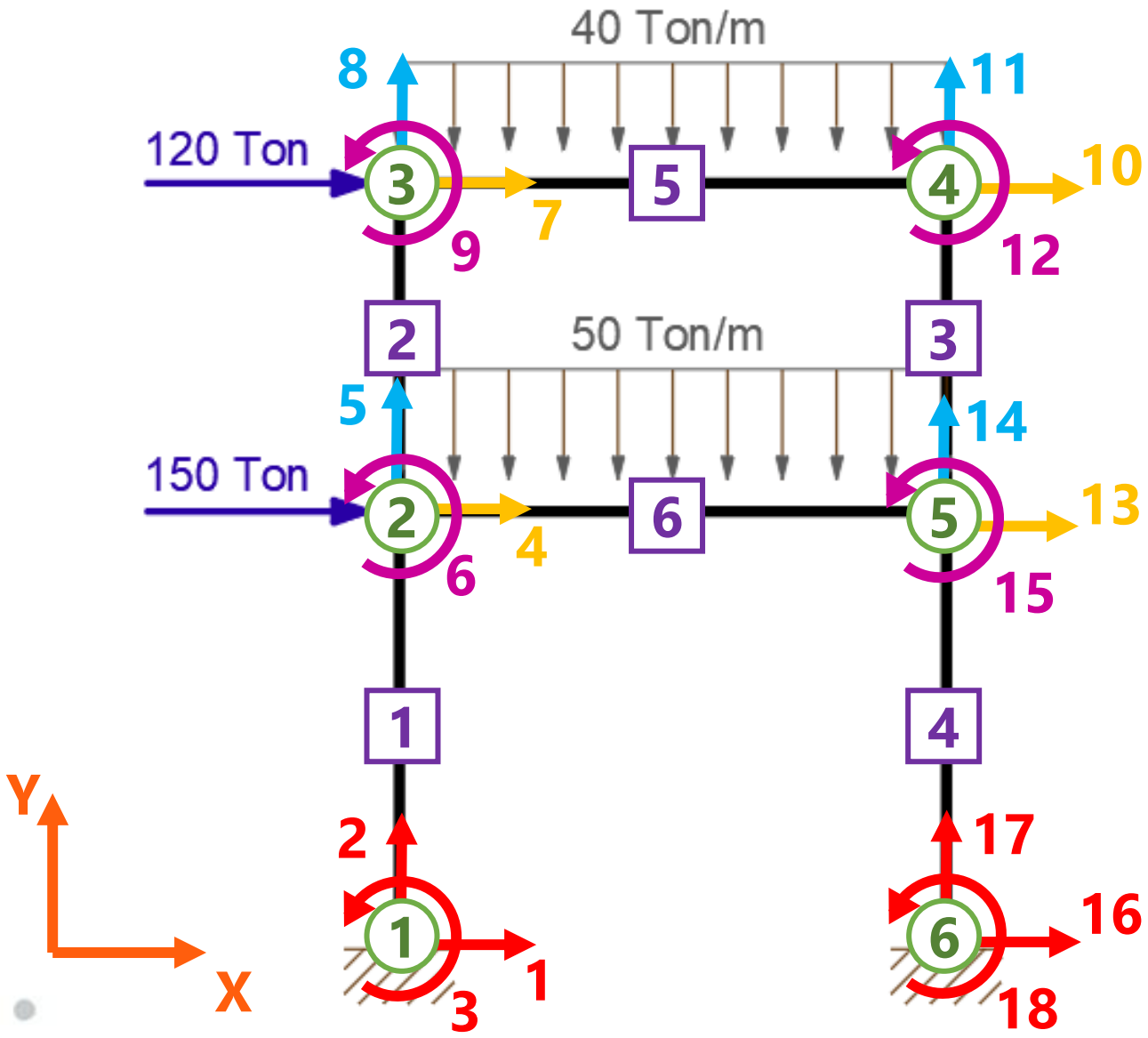
$$W_{y_f} = -W_f \sin(\theta)\left(\frac{e}{L}\right)$$

Vector FEM global:

$$\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$$

#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CONTORNO



Grados de libertad restringidos

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Desplazamientos: $\{U\}_G = (\{F_{ext}\}_G - \{F^{FEM}\}_G) * [K]_G^{-1}$

Reacciones: $\{R\} = [k]_G\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_G$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_L$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

Fuerza axial: $N(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^2}{2} + W_i \cdot x + N_i$

Fuerza cortante: $V(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^2}{2} + W_i \cdot x + V_i$

Momento flector: $M(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^3}{6} + W_i\frac{x^2}{2} + V_i \cdot x - M_i$

Si hay cargas distribuidas: Wi > 0 y Wf > 0

Si NO hay cargas distribuidas: Wi = 0 y Wf = 0 (La ecuación se simplifica)

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 2

REACCIONES

Nodo 1: Rx = 105.30 Ton, Ry = 285.10 Ton, Mz = -0.00 Ton-m
Nodo 4: Rx = 14.70 Ton, Ry = 84.90 Ton, Mz = -0.00 Ton-m

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	0.000E+00	0.000E+00	-7.006E-02
2	2.798E-02	-2.851E-02	3.201E-02
3	2.359E-02	1.170E-02	-2.585E-02
4	0.000E+00	0.000E+00	7.323E-02

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 2

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (Ton)		Cortante (Ton)		Momento (Ton-m)	
Elem	**N**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
1	291.256	Tensión	86.820	113.180	-0.000	-65.898
2	265.298	Tensión	75.097	84.903	65.898	-112.175
3	162.334	Tensión	90.440	59.329	112.175	-0.000

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Pórticos
Ejercicio 2
Modelo OpenSees

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

#LaUISqueQueremos

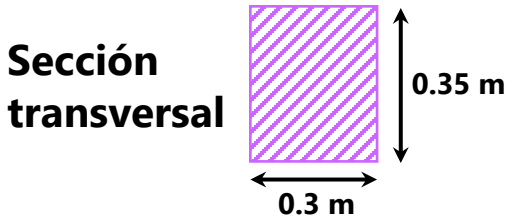
PÓRTICOS: EJERCICIO 2

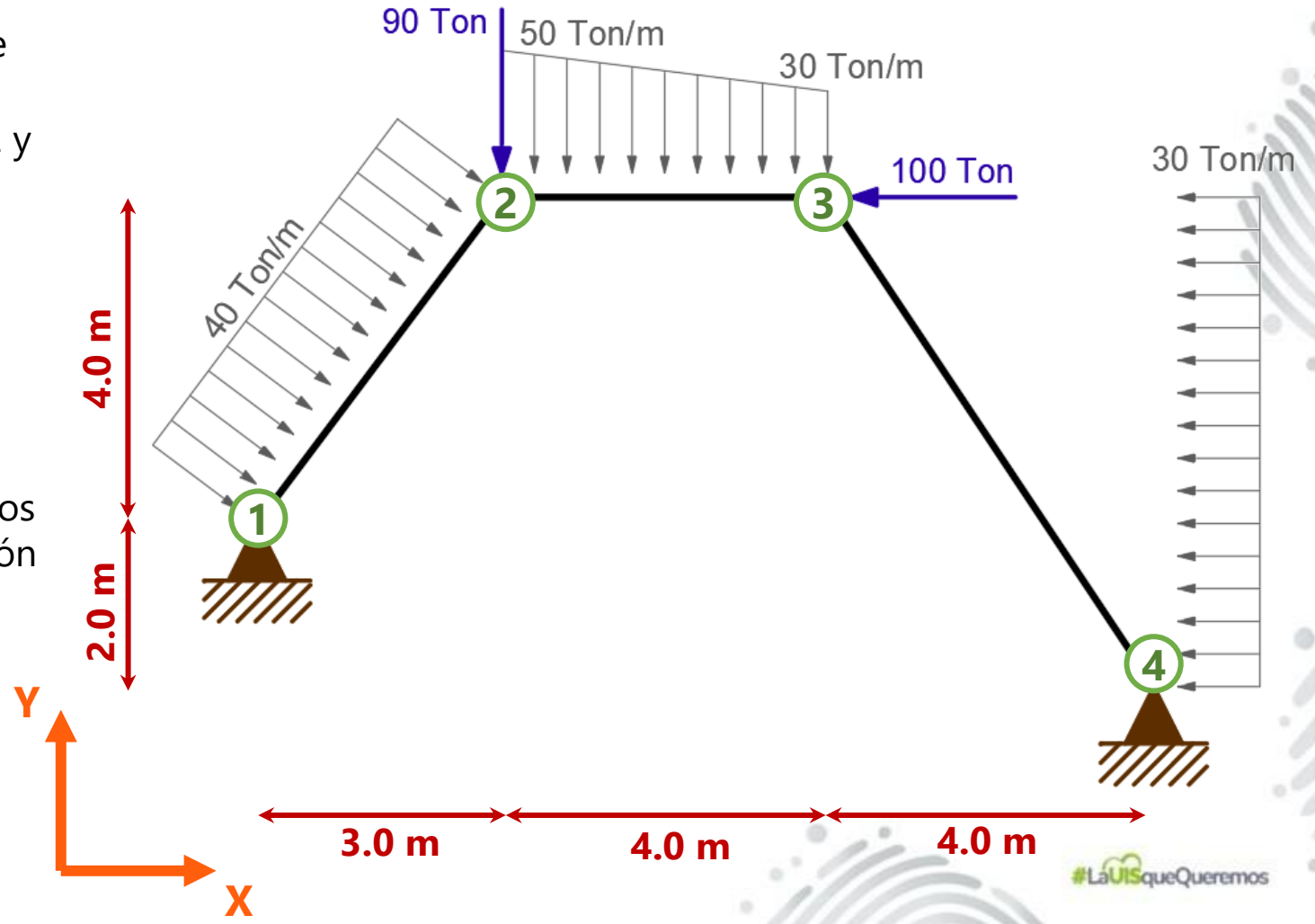
Se tiene un **pórtico plano** como se muestra en la figura, con apoyos articulados en los nodos 1 y 4, sometido a cargas distribuidas en elementos inclinados y horizontales, así como cargas concentradas verticales y horizontales.

Mediante el **método matricial de rigidez**, considerando que cada nodo posee tres grados de libertad (u_x, u_y, θ_z), se solicita:

- Determinar los desplazamientos en los nodos 2 y 3.
- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Obtener las fuerzas internas (axial, cortante y momento flector) en cada elemento en coordenadas locales y construir los diagramas internos correspondientes.

Desprecie el peso propio. Considere comportamiento lineal-elástico, todos los elementos están hechos de concreto de f'c=24 MPa y la sección transversal como se indica a continuación:





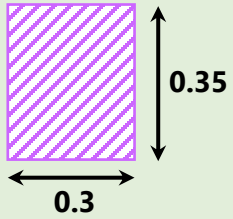
#LaUISqueQueremos

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

Módulo de elasticidad: $E = 4700\sqrt{f'c}\ (MPa)$

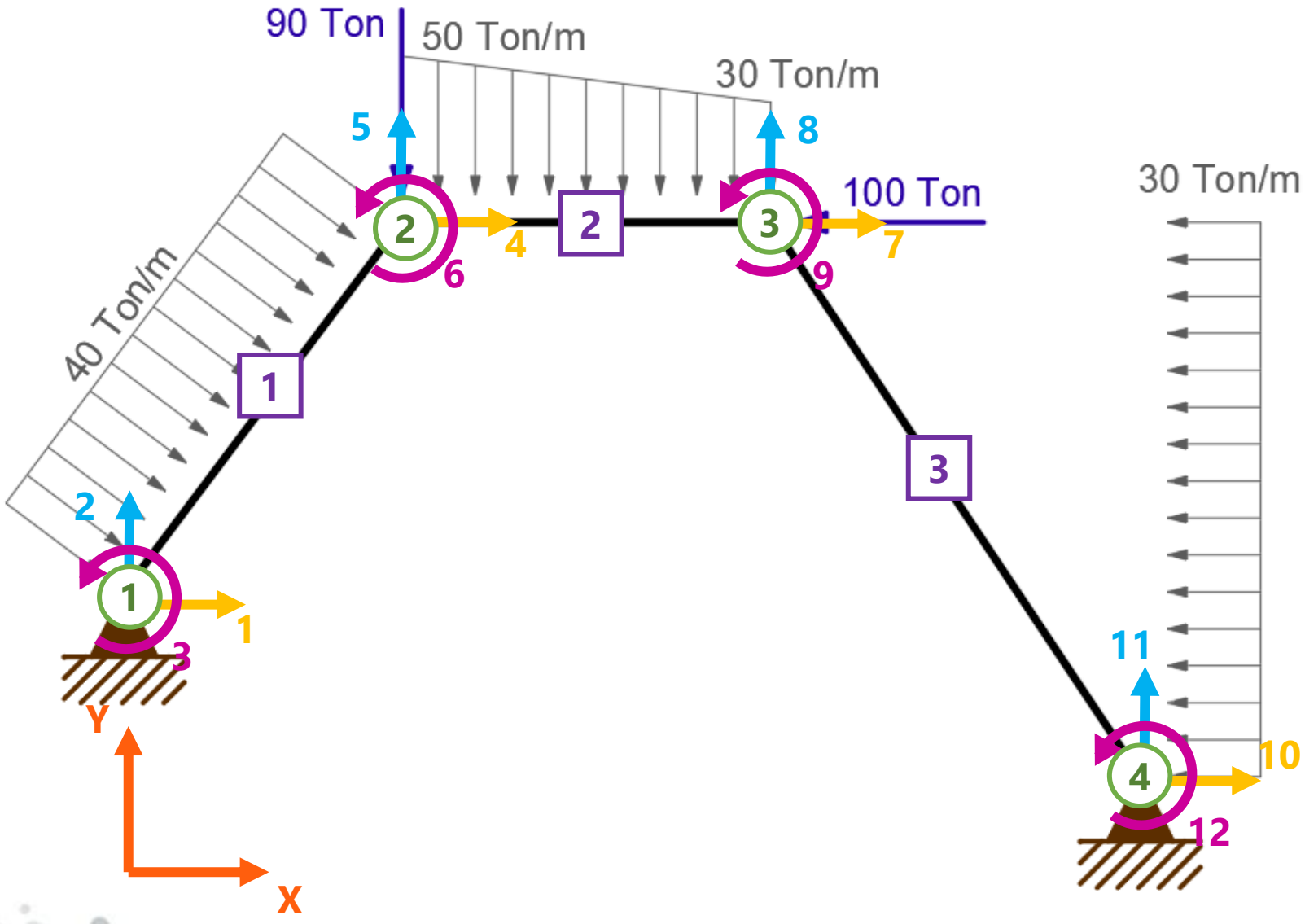
Para $f'c = 24\ MPa$: $E = 4700\sqrt{24}\ MPa = 23025.203582\ MPa$

$$\boldsymbol{E = 2302520.3582\ \frac{Ton}{m^2}}$$

Sección transversal	Dimensiones [m]	Área transversal [m^2]		Momento de inercia [m^4]	
		$b \cdot h$	$\mathbf{0.105}$	$\frac{1}{12}bh^3$	$\mathbf{1.071875x10^{-3}}$

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS



Número de nodos: 4

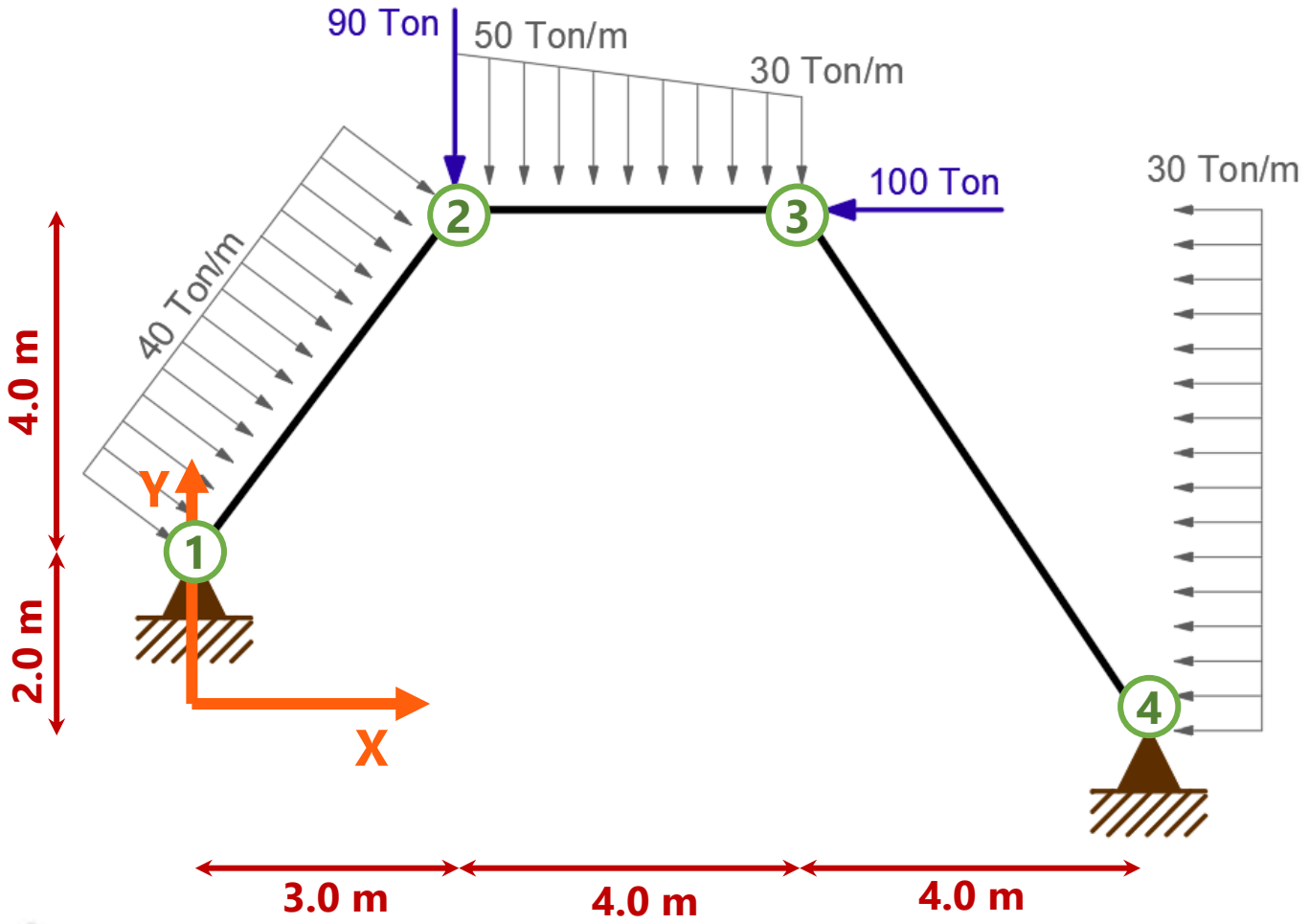
Número de elementos: 3

Número de grados de libertad: 12

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



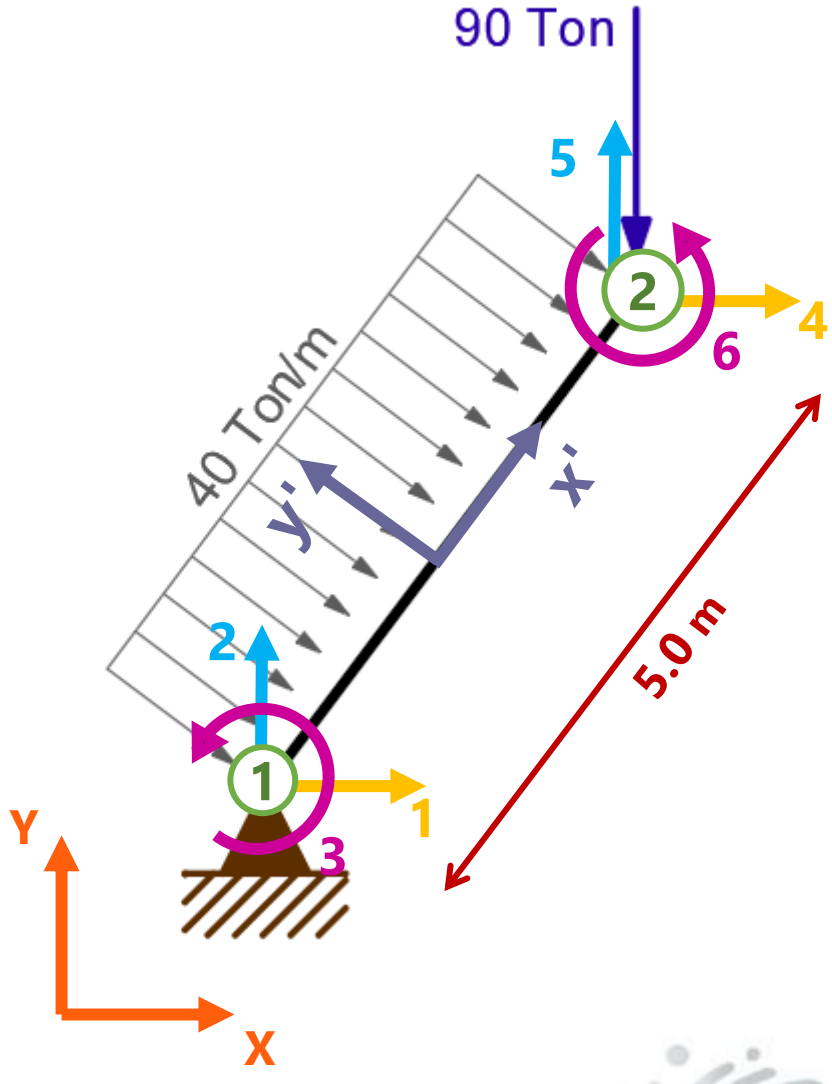
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	2.0
2	3.0	6.0
3	7.0	6.0
4	11.0	0.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i	NODO f
1	1	2

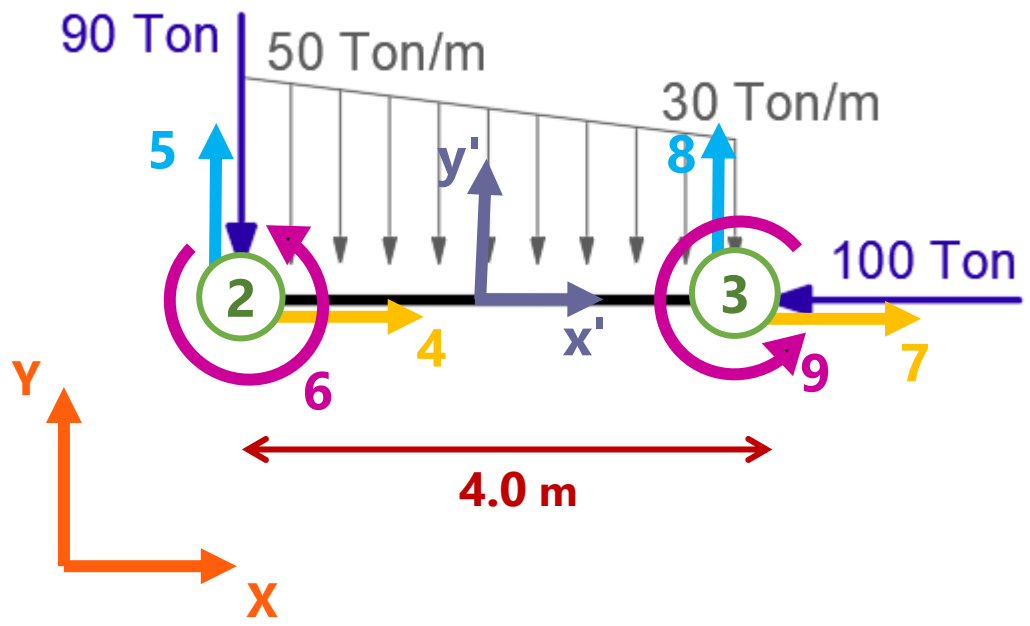


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i	NODO f
1	1	2
2	2	3

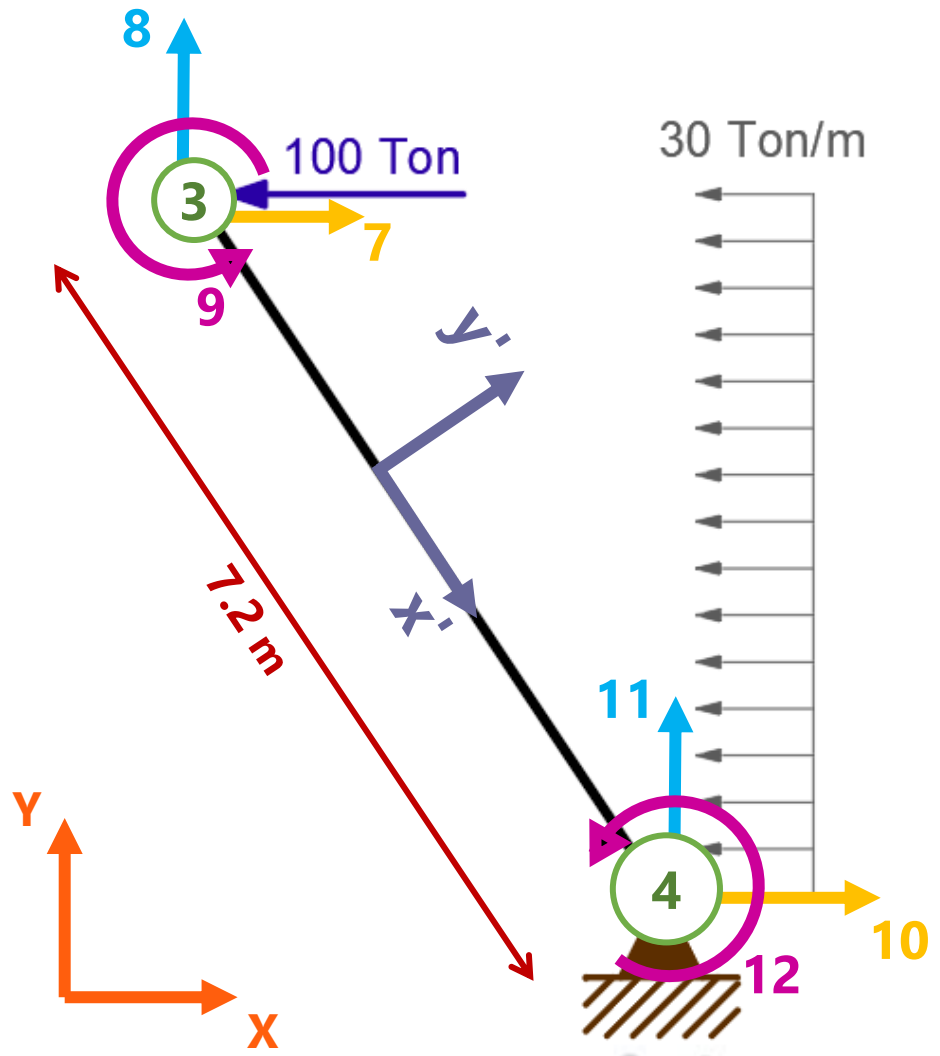


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEMENTO	NODO i	NODO f
1	1	2
2	2	3
3	3	4

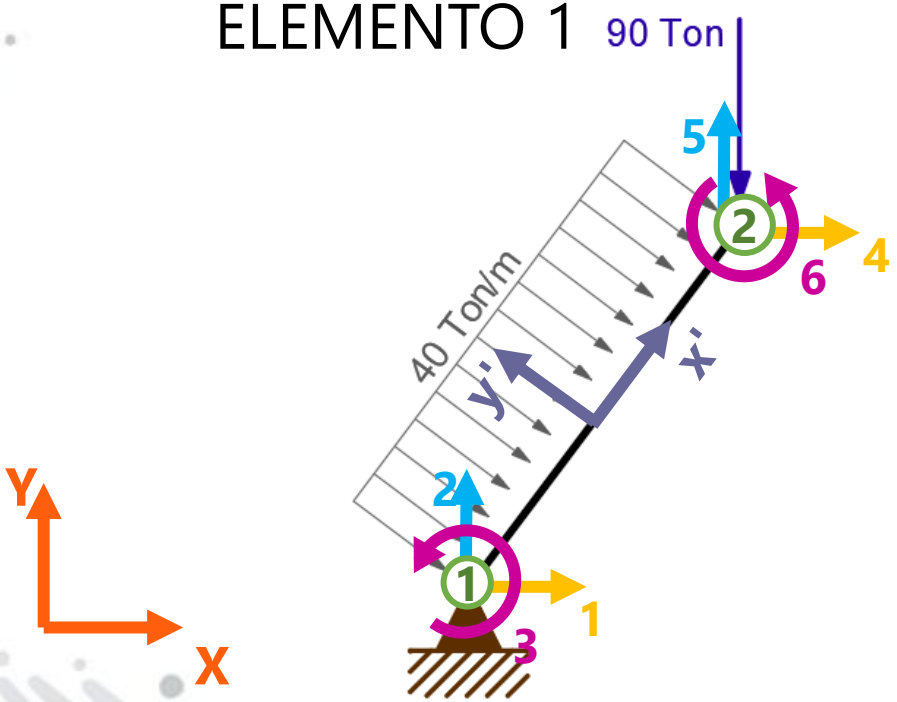


#LaUISqueQueremos

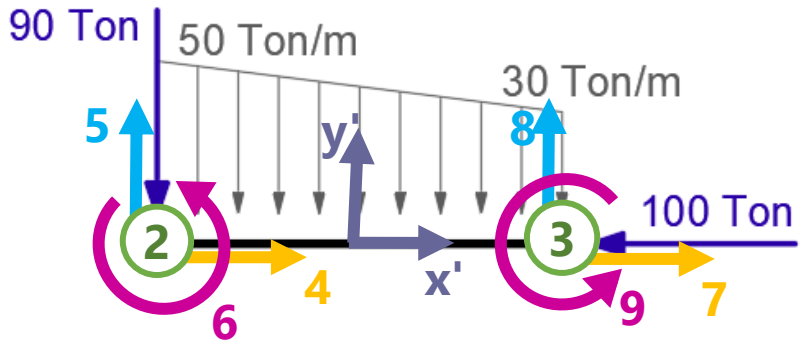
CARGAS DISTRIBUIDAS DE LOS ELEMENTOS

TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (Ton/m)	Wf (Ton/m)	PROYECCIÓN (m)
Uniforme	Local y	-40	-40	-
Uniforme	Local y	-50	-30	-
Uniforme	Global x	-30	-30	6

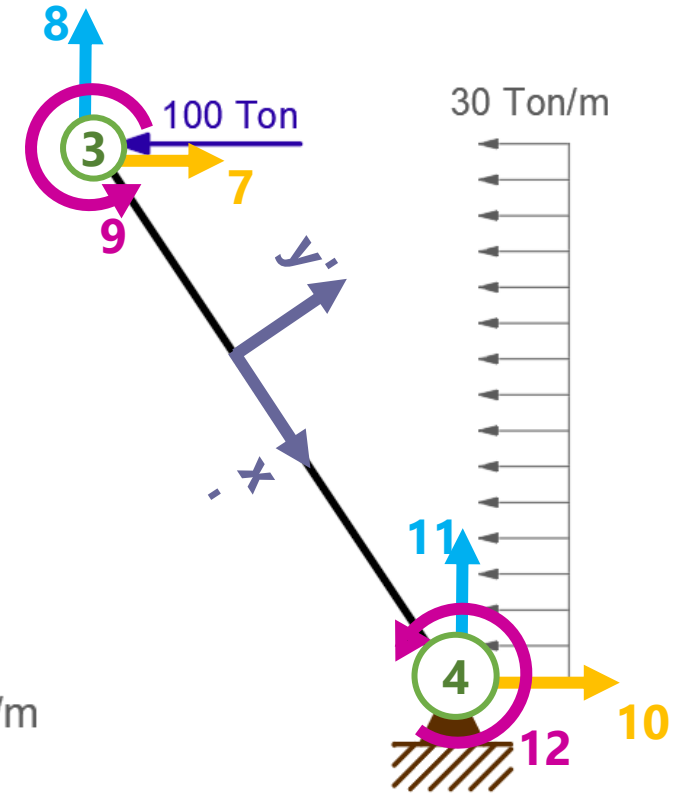
ELEMENTO 1



ELEMENTO 2



ELEMENTO 3



#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

ELM	Ni	Nf	A [m^2]	I [m^4]
1	1	2	0.105	$1.071875x10^{-3}$
2	2	3	0.105	$1.071875x10^{-3}$
3	3	4	0.105	$1.071875x10^{-3}$

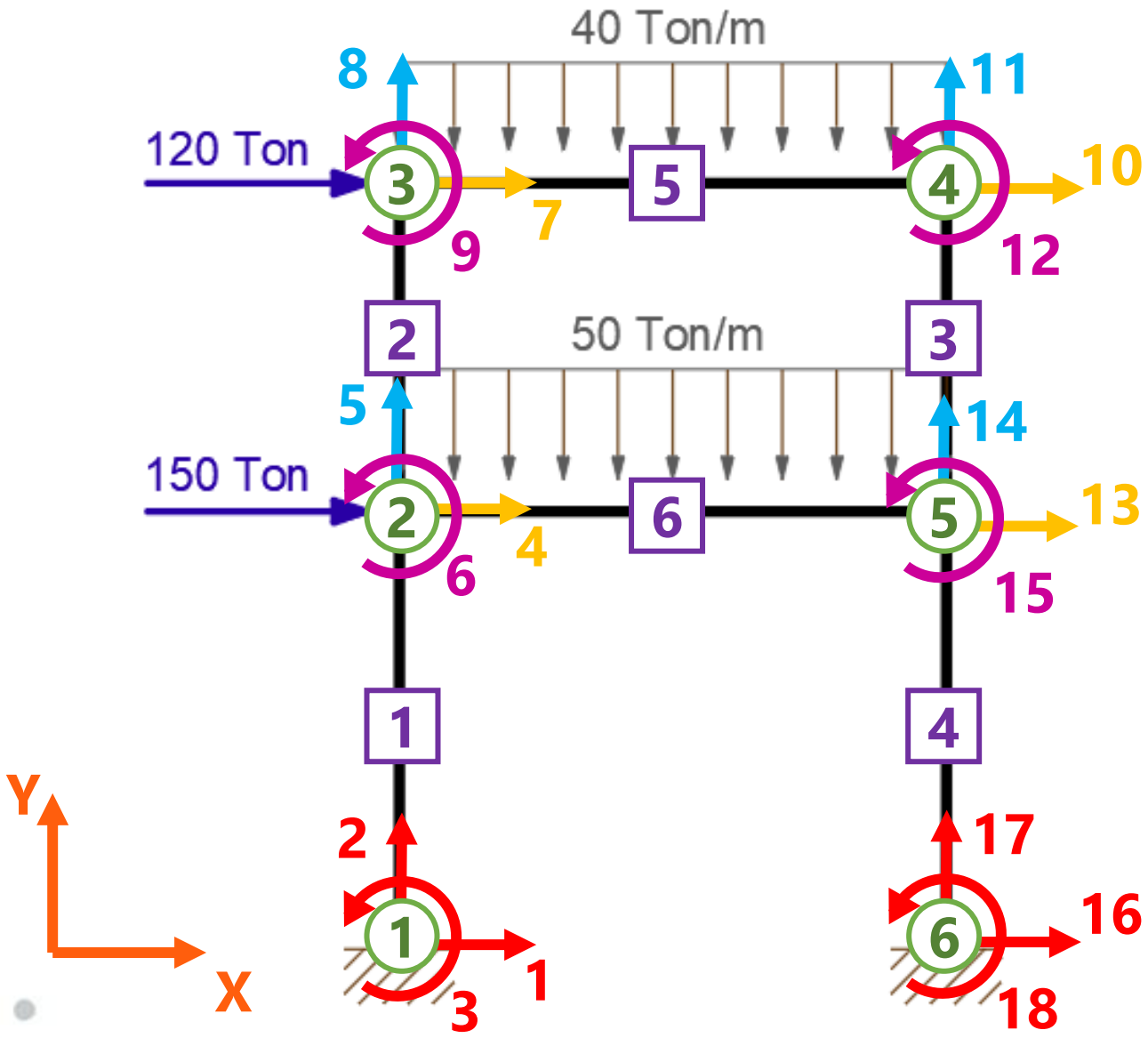
* Todos los elementos tiene la misma sección transversal

NODO	X	Y
1	0.0	2.0
2	3.0	6.0
3	7.0	6.0
4	11.0	0.0

$$E = 24870062.32 \ \frac{kN}{m^2}$$

#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CONTORNO

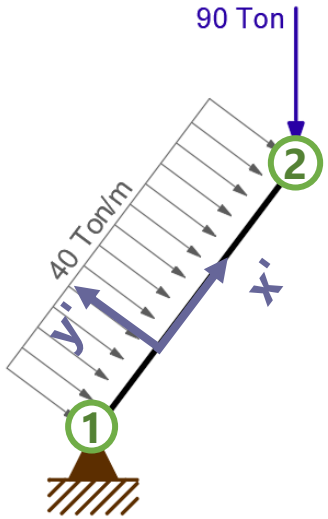


Grados de libertad restringidos

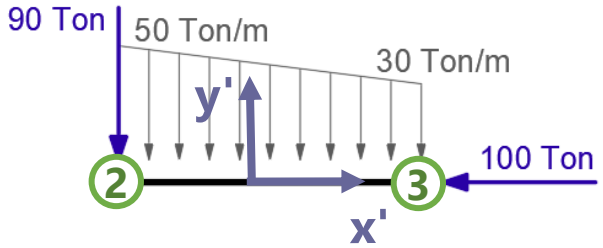
#LaUISqueQueremos

CARGAS APLICADAS

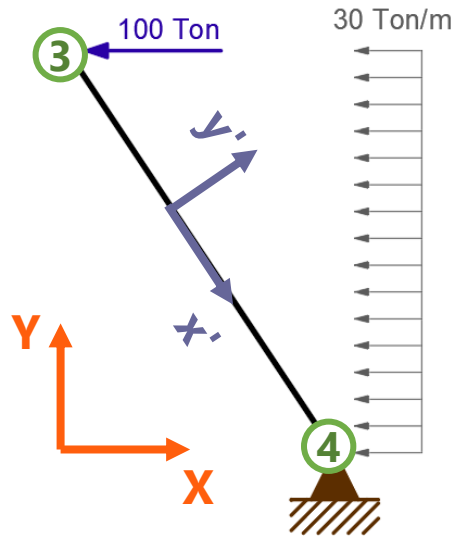
TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (Ton/m)	Wf (Ton/m)	PROYECCIÓN (m)
Uniforme	Local y	-40	-40	-
Uniforme	Local y	-50	-30	-
Uniforme	Global x	-30	-30	6



ELEMENTO 1

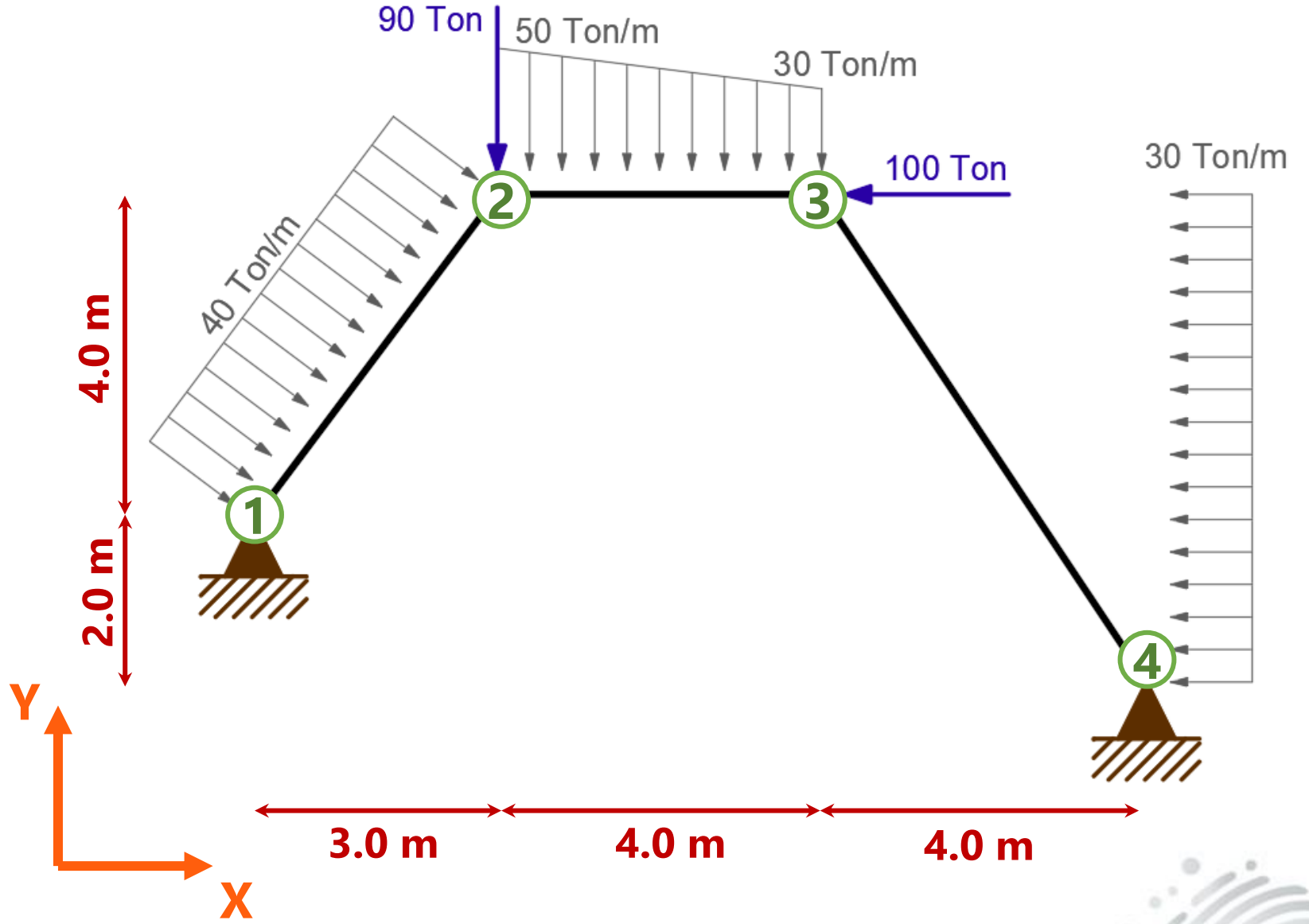


ELEMENTO 2



ELEMENTO 3

GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 2

REACCIONES

Nodo 1: Rx=105.30 Ton, Ry=285.10 Ton, Mz=-0.00 Ton-m
Nodo 4: Rx=14.70 Ton, Ry=84.90 Ton, Mz=-0.00 Ton-mm

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	0.000E+00	0.000E+00	-7.006E-02
2	2.797E-02	-2.851E-02	3.201E-02
3	2.358E-02	1.169E-02	-2.585E-02
4	0.000E+00	0.000E+00	7.324E-02

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 2

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (Ton)		Cortante (Ton)		Momento (Ton-m)	
Elem	**N**	**Tipo**	**Ni**	**Nf**	**Ni**	**Nf**
1	291.256	Tensión	86.820	113.180	-0.000	-65.902
2	265.298	Tensión	75.096	84.904	65.902	-112.172
3	162.335	Tensión	90.440	59.329	112.172	-0.000

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Pórticos
Ejercicio 3
Método Matricial de rigidez en Python

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

#LaUISqueQueremos

PÓRTICOS: EJERCICIO 3

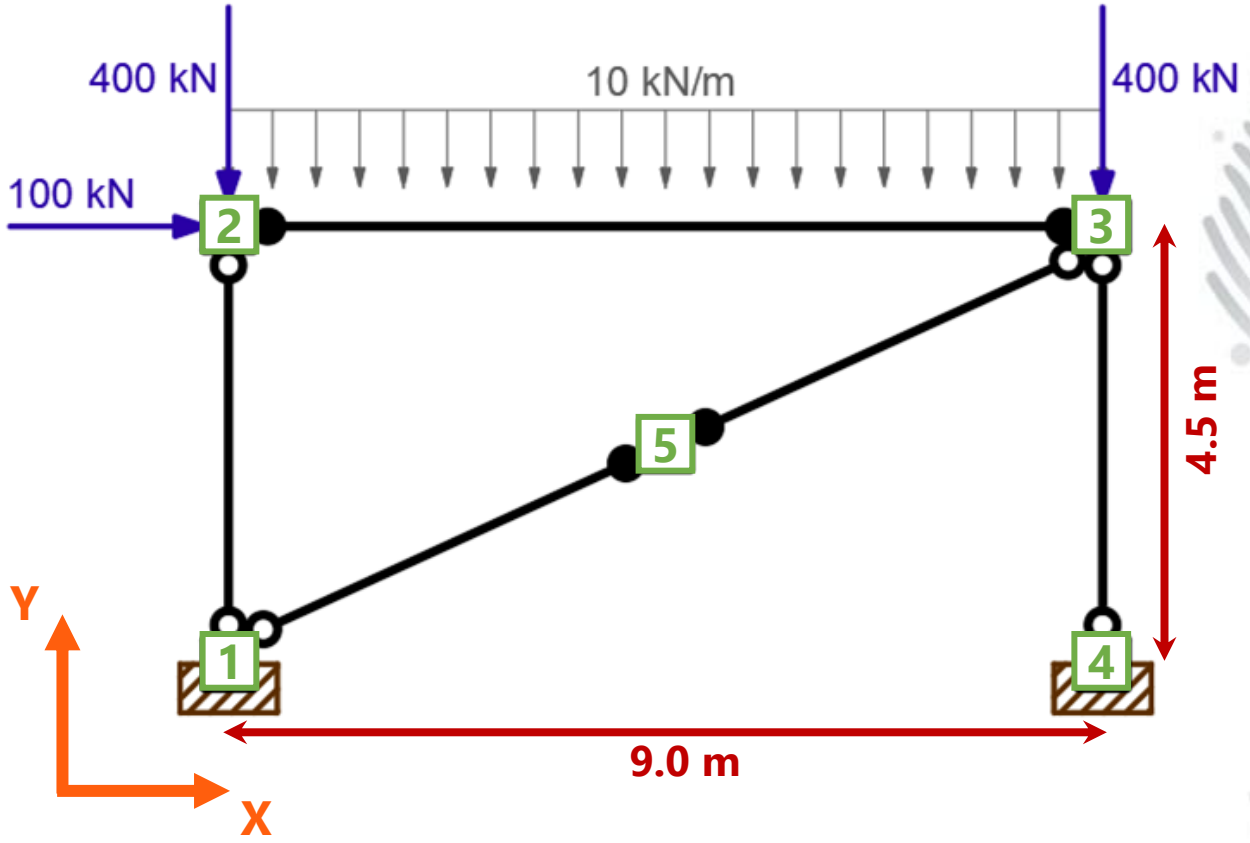
Se tiene el pórtico plano mostrado en la figura, sometido a cargas concentradas y una carga distribuida sobre la viga superior. La estructura presenta rótulas (articulaciones) en los extremos de la viga superior y en el punto medio del elemento diagonal, tal como se indica. Utilizando el método matricial de rigidez y considerando los ejes globales X, Y indicados, se solicita:

- Determinar los desplazamientos en los nodos 2 y 3 de la estructura.
- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Determinar las fuerzas internas en cada elemento (fuerza axial, fuerza cortante y momento flector).
- Construir los diagramas de fuerzas internas para cada elemento.

Para el análisis considere:

- Módulo de elasticidad: $E = 2 \times 10^8\ kN/m^2$ para todos los elementos.
- La viga tiene sección W18×76.
- Las columnas tienen sección W14×132.
- El elemento diagonal posee un área equivalente de $6\ cm^2$.

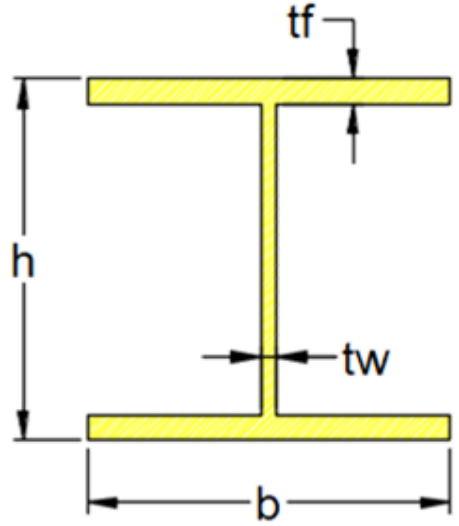
Desprecie el peso propio de los elementos y considere únicamente las cargas indicadas en la figura.



#LaUISqueQueremos

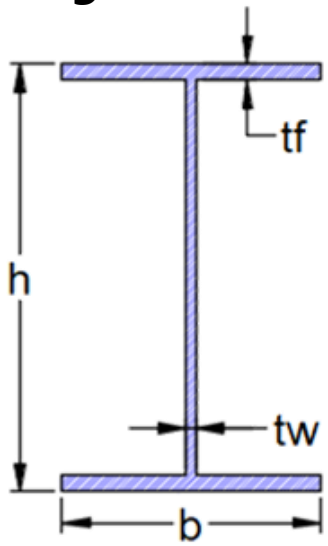
PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

Columna W14X132



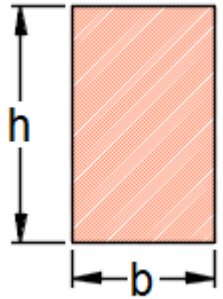
h (m)	0.3734
b (m)	0.3734
tf (m)	0.0262
tw (m)	0.0164
A (m^2)	0.0248
I (m^4)	6.360×10^{-4}

Viga W18X76



h (m)	0.4623
b (m)	0.2794
tf (m)	0.0173
tw (m)	0.0108
A (m^2)	0.0143
I (m^4)	5.492×10^{-4}

Diagonal



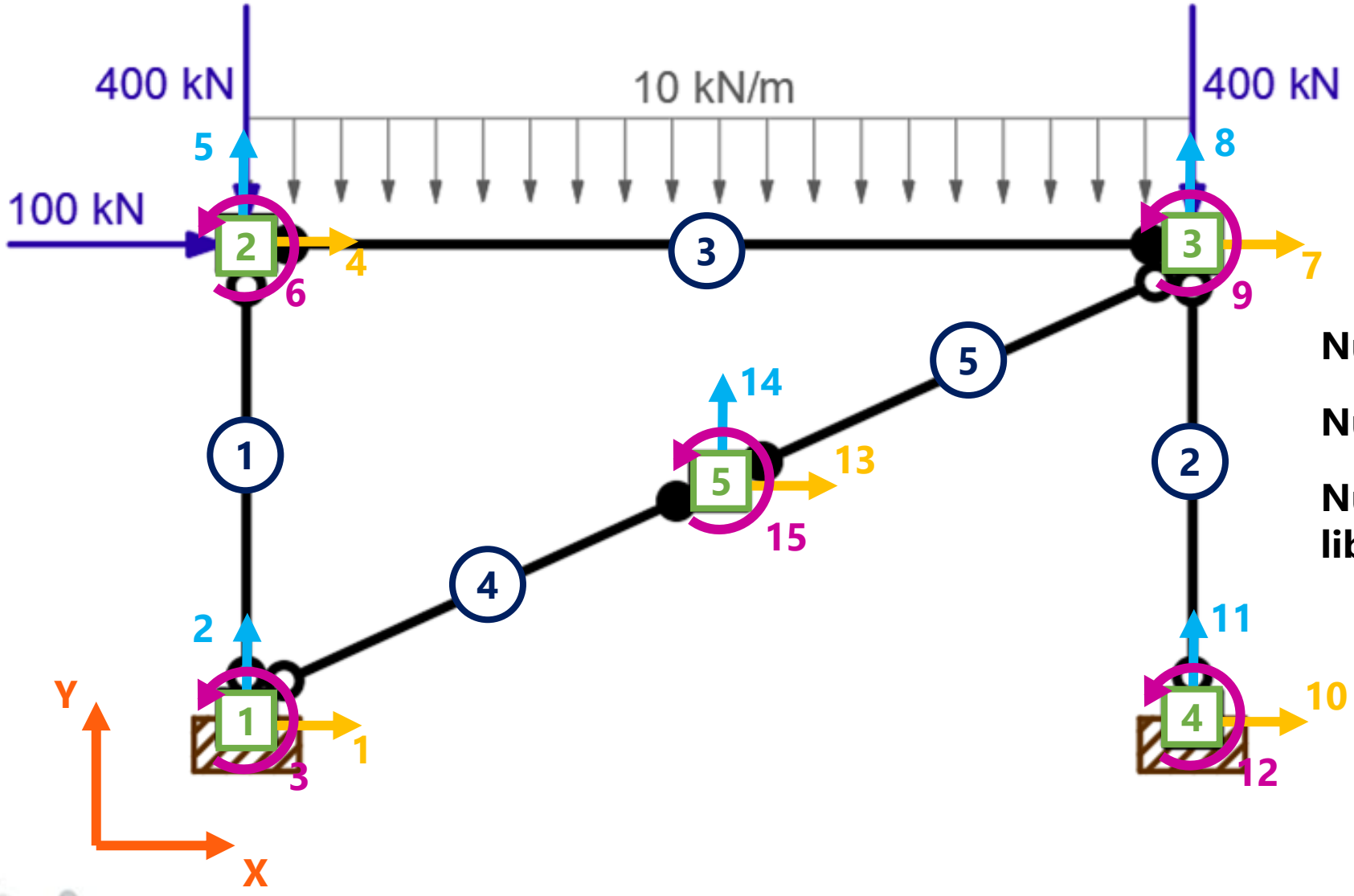
h (m)	0.06
b (m)	0.01
A (m^2)	6×10^{-4}
I (m^4)	1.8×10^{-7}

Módulo de elasticidad:

$$E = 2 \times 10^8 \ {}^{kN}/_{m^2}$$

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS



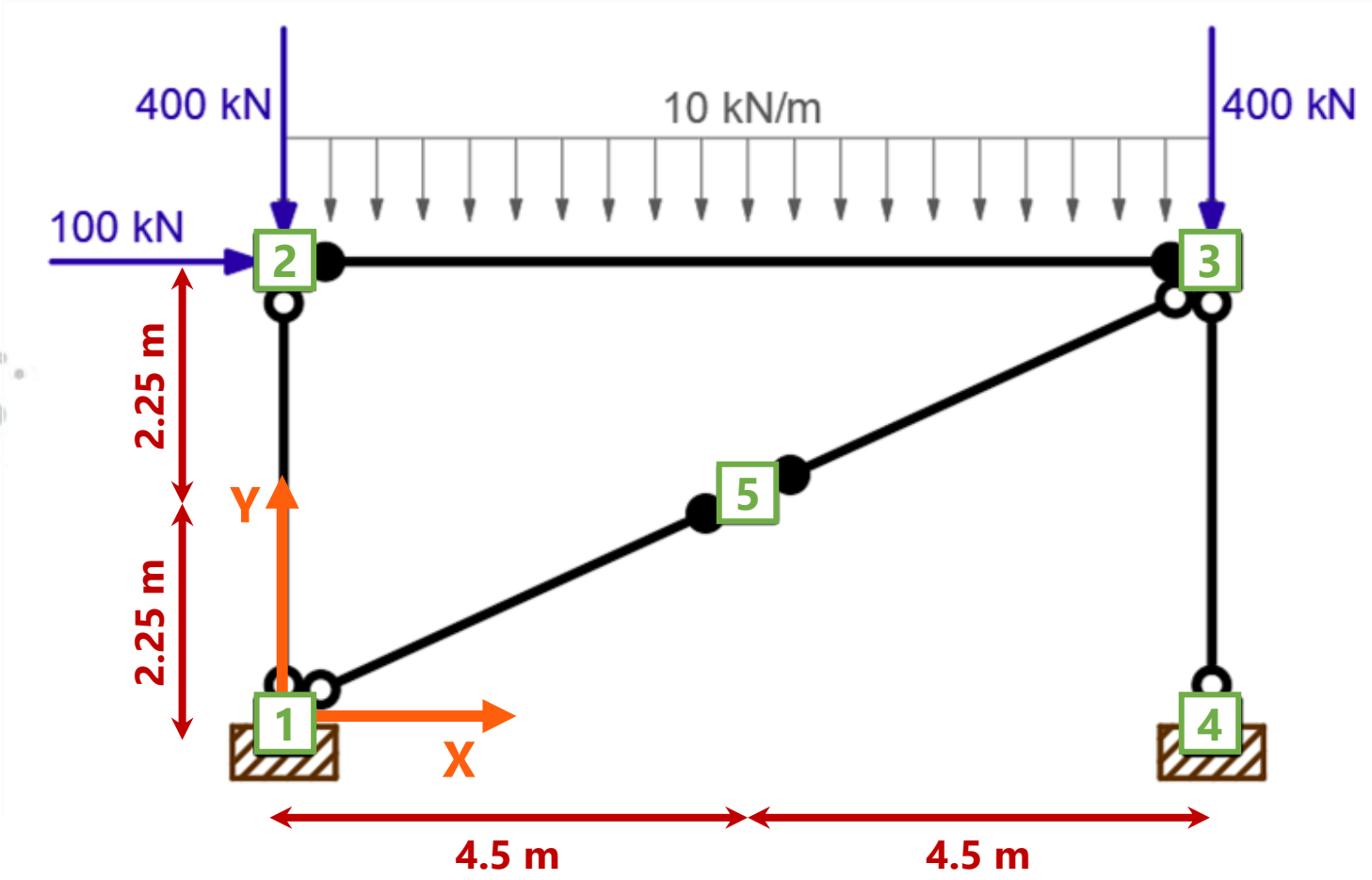
Número de nodos: 5

Número de elementos: 5

Número de grados de libertad: 15

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	4.5
3	9.0	4.5
4	9.0	0.0
5	4.5	2.25

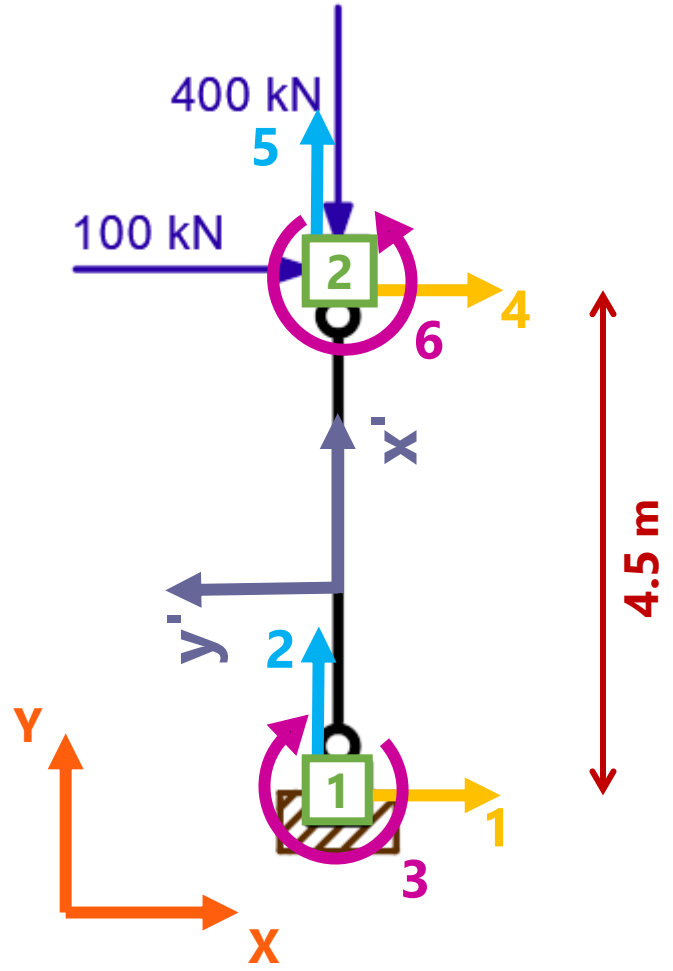
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	4.5	90

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



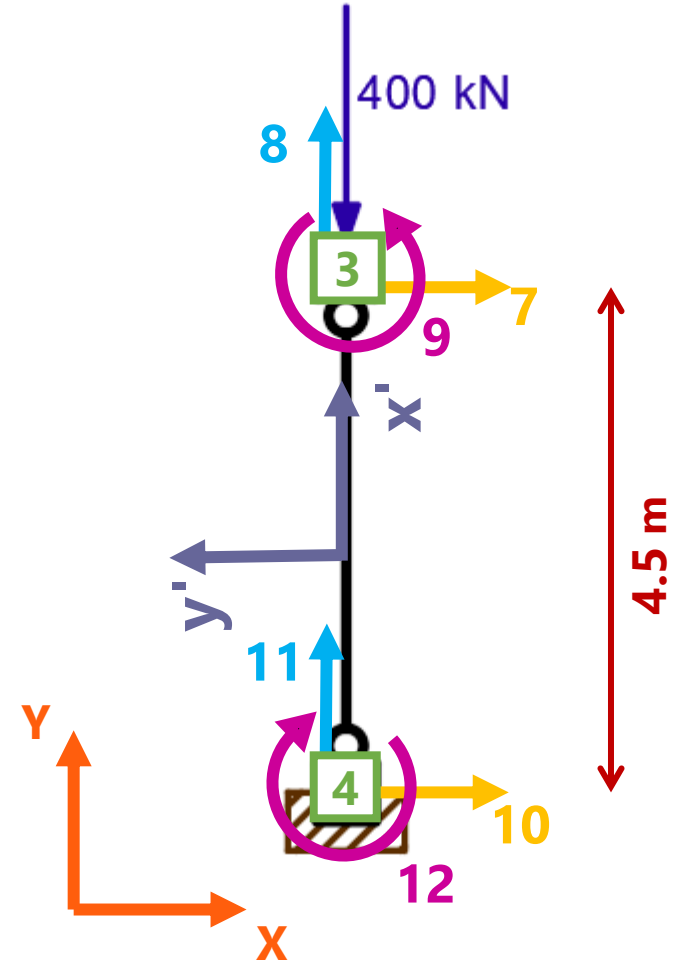
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	4.5	90
2	4	SR	3	SR	4.5	90

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



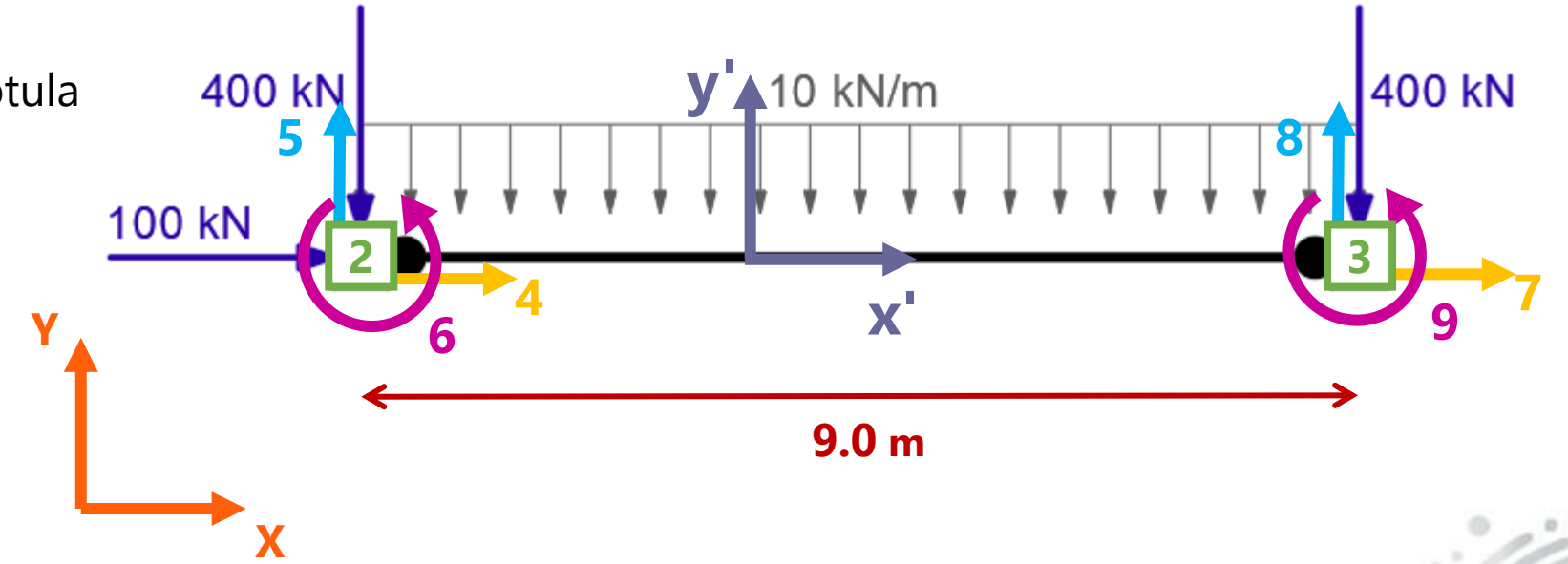
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	5.0	90
2	4	SR	3	SR	4.5	90
3	2	R	3	R	9.0	0

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



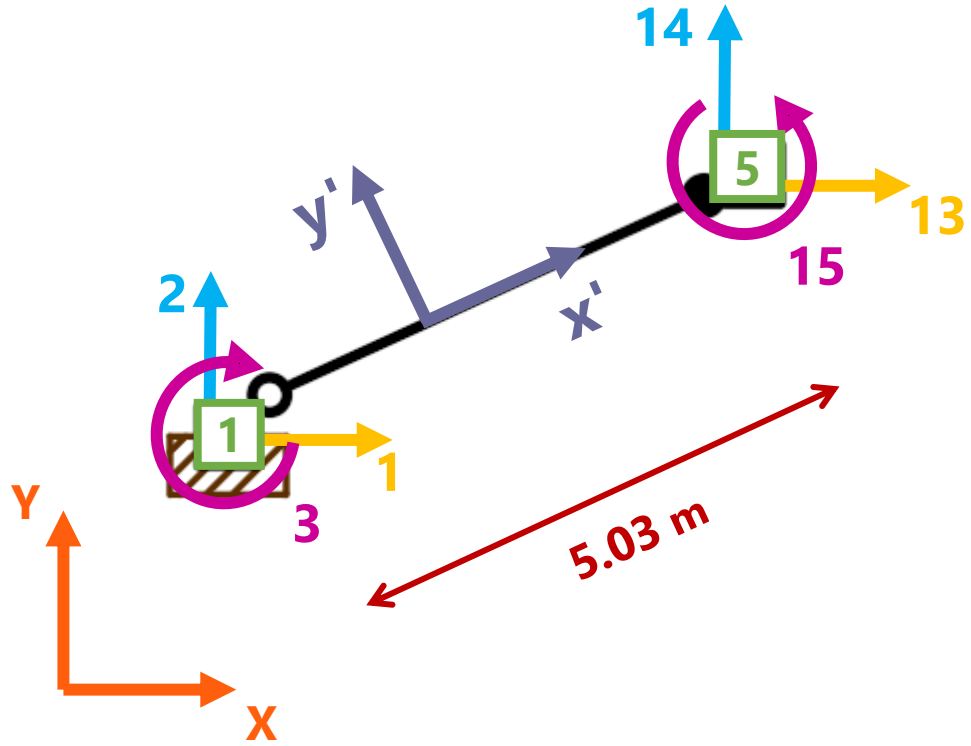
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 4

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	5.0	90
2	4	SR	3	SR	4.5	90
3	2	R	3	R	9.0	0
4	1	SR	5	R	5.03	26.57

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



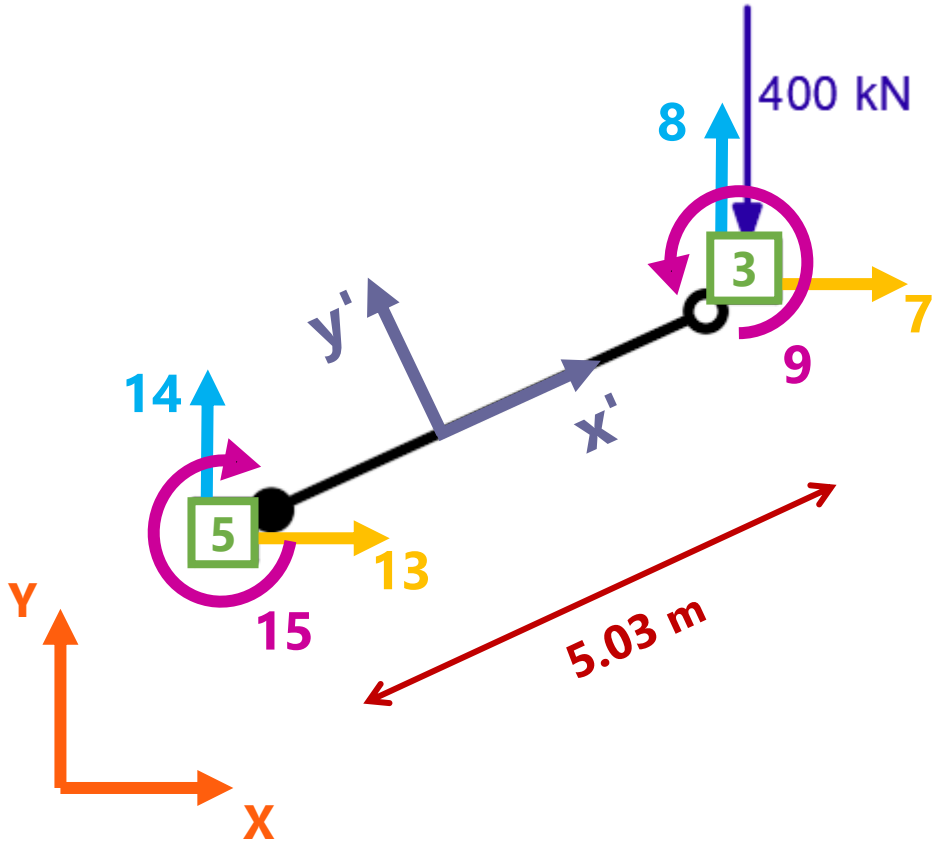
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 5

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	5.0	90
2	4	SR	3	SR	4.5	90
3	2	R	3	R	9.0	0
4	1	SR	5	R	5.03	26.57
5	5	R	3	SR	5.03	26.57

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



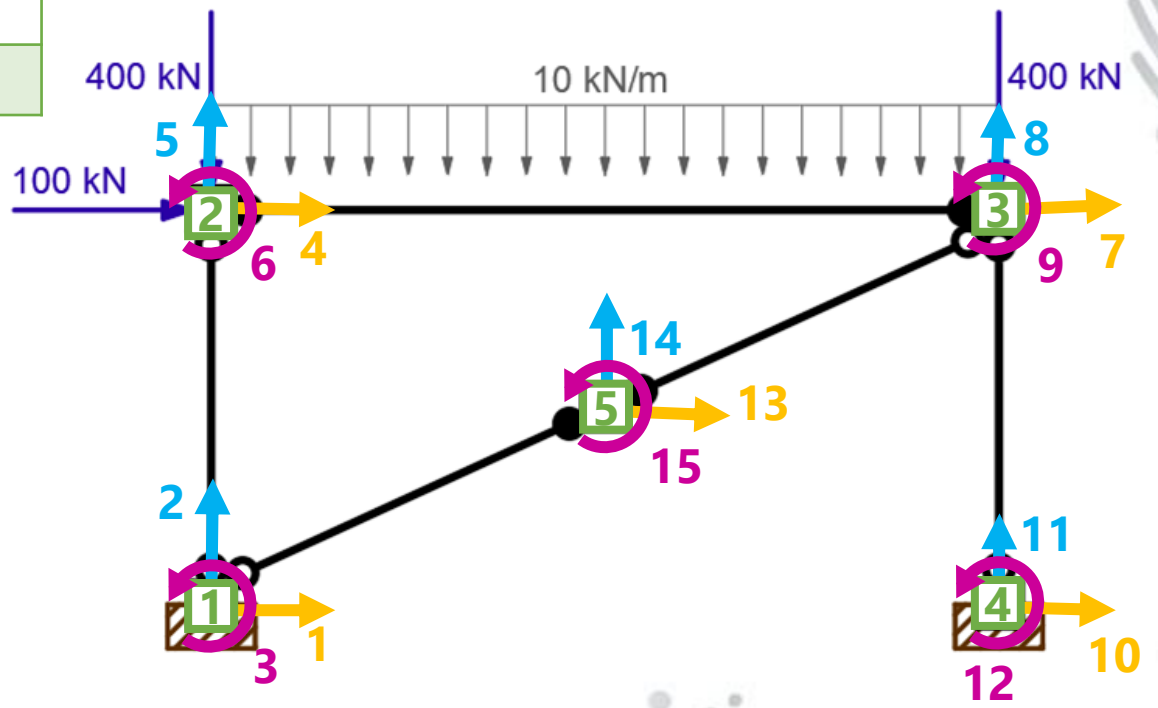
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTOS

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	5.0	90
2	4	SR	3	SR	4.5	90
3	2	R	3	R	9.0	0
4	1	SR	5	R	5.03	26.57
5	5	R	3	SR	5.03	26.57

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



#LaUISqueQueremos

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Matriz de rigidez global del elemento: $[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L [T] \{U\}_G$

Matriz de transformación: $[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para la matriz de rigidez del elemento se consideran distintas condiciones según el extremo donde se ubique la articulación/rótula:

- Sin rótula
- Nodo inicial
- Nodo final
- Nodo inicial y final

#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA PÓRTICOS CON ELEMENTOS ARTICULADOS

SIN RÓTULAS

En pórticos con uniones rígidas, se utiliza una matriz de rigidez de barra que considera axial, cortante y flexión.

Conexión articulada (rótula).

Conexión rígida.

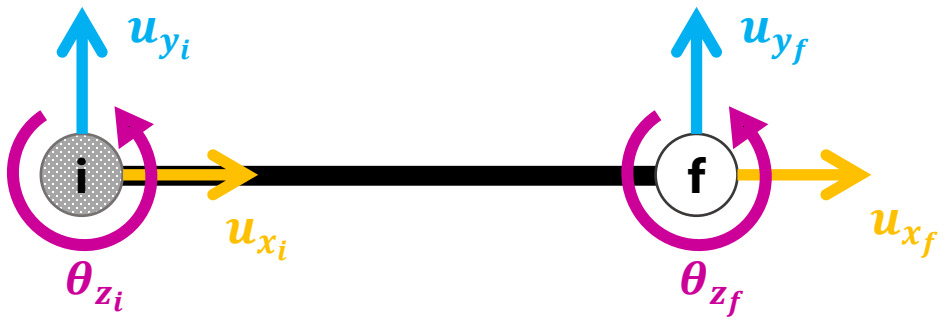
$$[k]_L = \begin{matrix} \\ u_{x_i} \\ u_{y_i} \\ \theta_{z_i} \\ u_{x_f} \\ u_{y_f} \\ \theta_{z_f} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} u_{x_i} & u_{y_i} & \theta_{z_i} & u_{x_f} & u_{y_f} & \theta_{z_f} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA PÓRTICOS CON ELEMENTOS ARTICULADOS

CON RÓTULA EN EL NODO INICIAL

Momento en el nodo inicial ≈ 0. La matriz de rigidez se ajusta para que el elemento no pueda resistir momento en el extremo articulado, redistribuyendo las relaciones fuerza-desplazamiento.



Conexión articulada (rótula).

Conexión rígida.

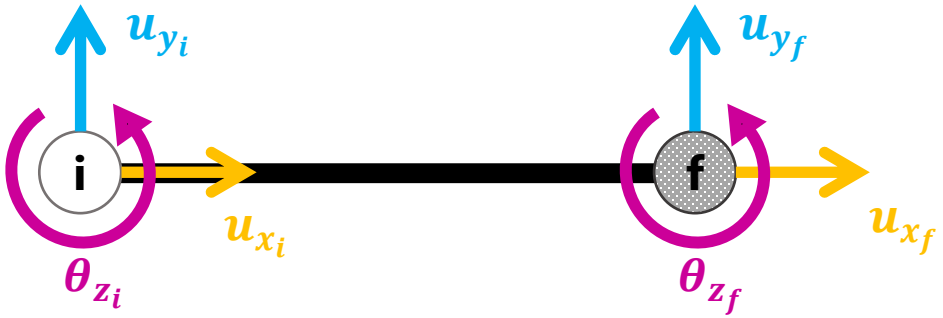
$$[k]_L = \begin{bmatrix} u_{x_i} & u_{y_i} & \theta_{z_i} & u_{x_f} & u_{y_f} & \theta_{z_f} & \\ \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & u_{x_i} \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 1\times10^{-16} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & u_{y_i} \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & \theta_{z_i} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 & u_{x_f} \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 1\times10^{-16} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & u_{y_f} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 1\times10^{-16} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & \theta_{z_f} \end{bmatrix}$$

#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA PÓRTICOS CON ELEMENTOS ARTICULADOS

CON RÓTULA EN EL NODO FINAL

Momento en el nodo final ≈ 0. La matriz de rigidez se ajusta para que el elemento no pueda resistir momento en el extremo articulado, redistribuyendo las relaciones fuerza-desplazamiento.



Conexión articulada (rótula).

Conexión rígida.

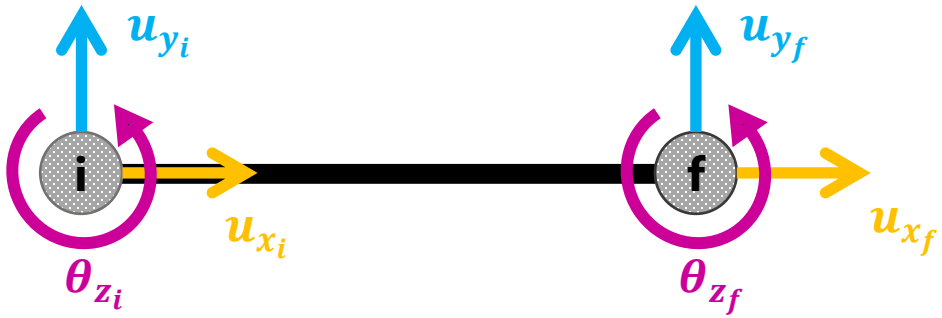
$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 1\times10^{-16} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 1\times10^{-16} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 1\times10^{-16} \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \\ \theta_{z_i} \\ u_{x_f} \\ u_{y_f} \\ \theta_{z_f} \end{matrix}$$

#LaUISqueQueremos

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA PÓRTICOS CON ELEMENTOS ARTICULADOS

CON RÓTULA EN EL NODO INICIAL Y FINAL

Momento en el nodo inicial y final ≈ 0, también se anula la capacidad de resistir cortante. El elemento solo trabaja a axial (similar a una barra/Armadura).



Conexión articulada (rótula).

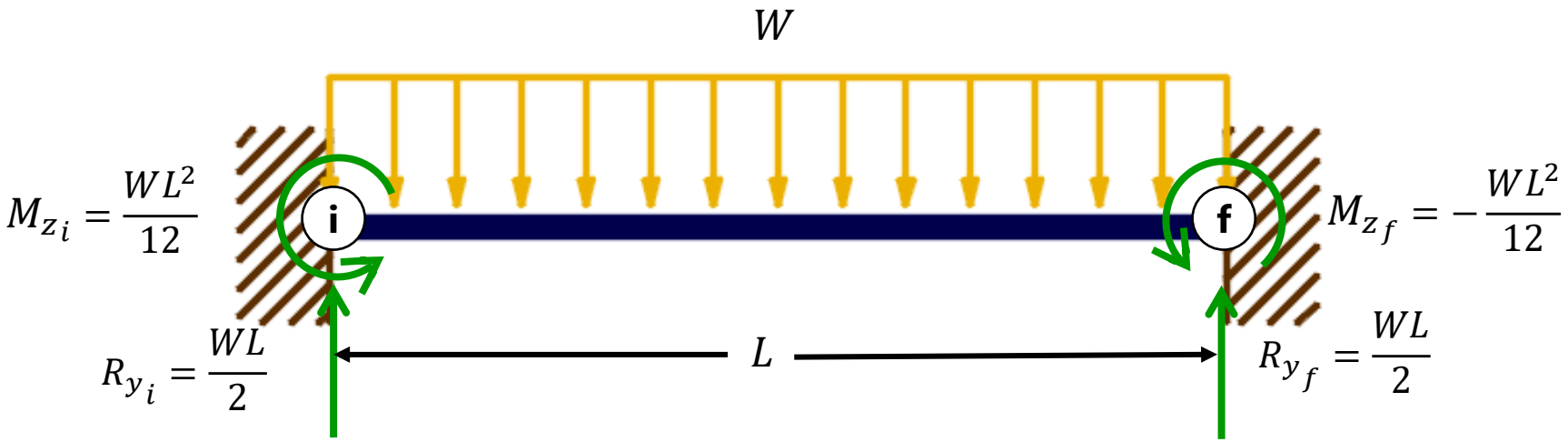
Conexión rígida.

$$[k]_L = \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} u_{x_i} & u_{y_i} & \theta_{z_i} & u_{x_f} & u_{y_f} & \theta_{z_f} \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \\ \theta_{z_i} \\ u_{x_f} \\ u_{y_f} \\ \theta_{z_f} \end{matrix}$$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



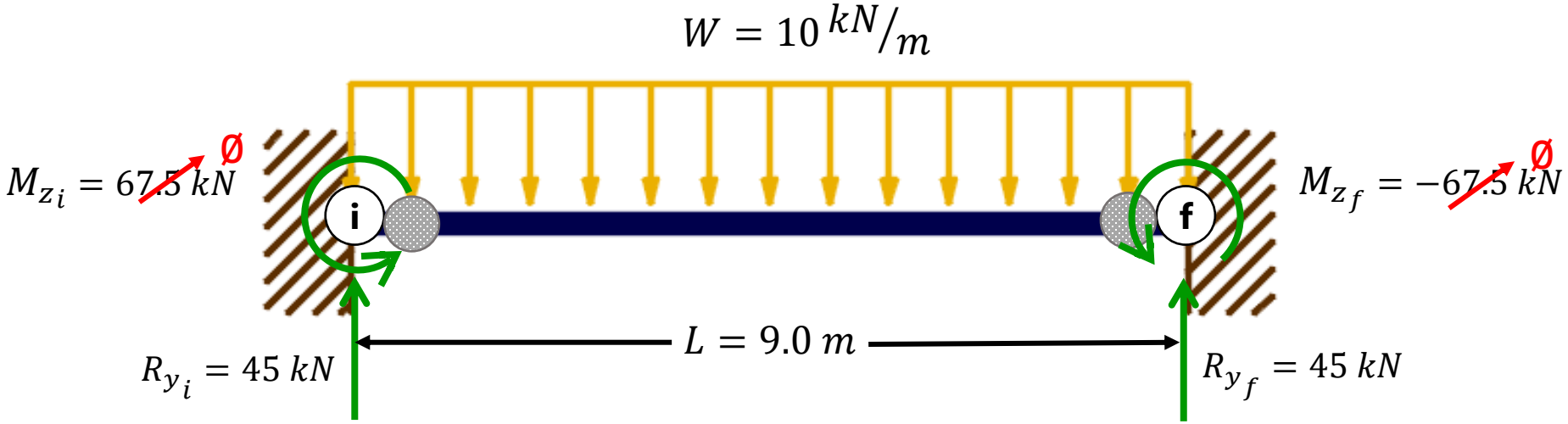
Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} \cancel{R_{x_i}} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ \cancel{R_{x_f}} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix}$ Ø Ø

* Si el elemento tiene una rótula en algún extremo, las fuerzas de empotramiento perfecto (FEM) deben recalcularse considerando esa condición de borde, ya que el extremo articulado no puede transmitir momento.

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

ELEMENTO 3: CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



***Por efecto de las rótulas, el elemento NO transmite momento.**

Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} R_{x_i} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ R_{x_f} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \\ 45 \\ 0 \end{Bmatrix}$

#LaUISqueQueremos

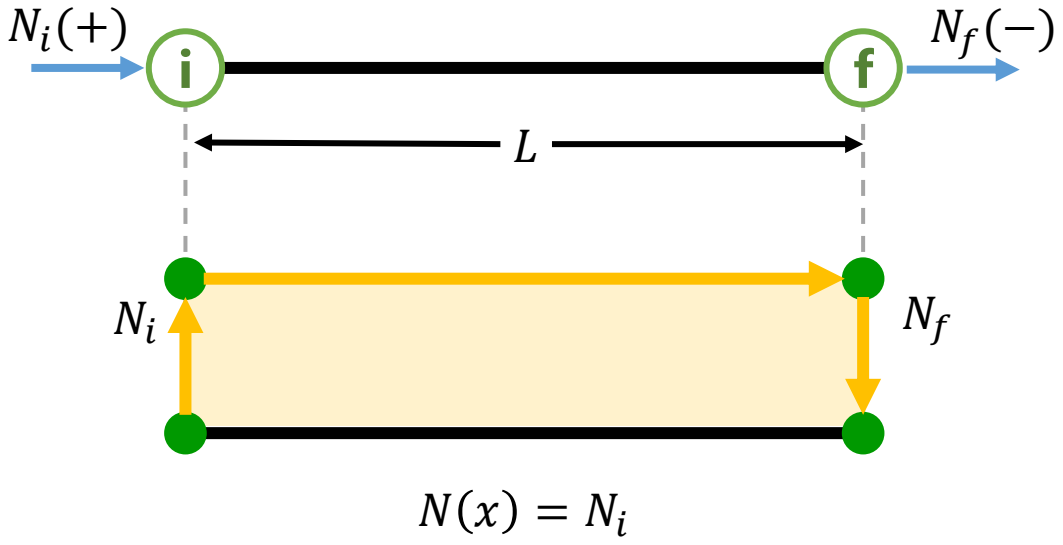
DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA AXIAL (N)

Ecuación: $N(x) = \int W(x)\,dx + N_i$

Convención de signos:
Nf > 0 → Tracción (el elemento se estira)
Nf < 0 → Compresión (el elemento se acorta)

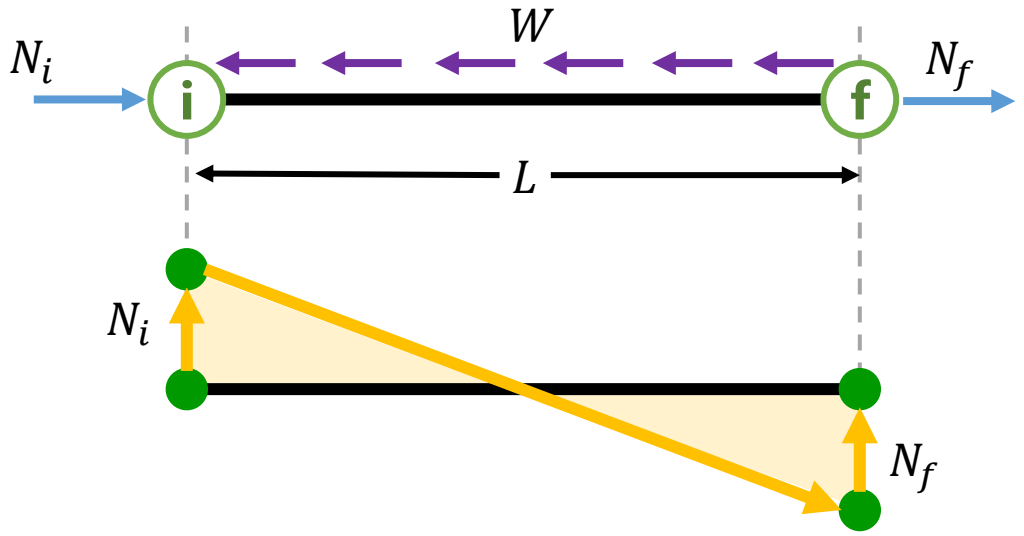
CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$N(x) = N_i$$

Se cumple: |Ni| = |Nf| (mismo valor y distinto signo)

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



$$N(x) = W \cdot x + N_i$$

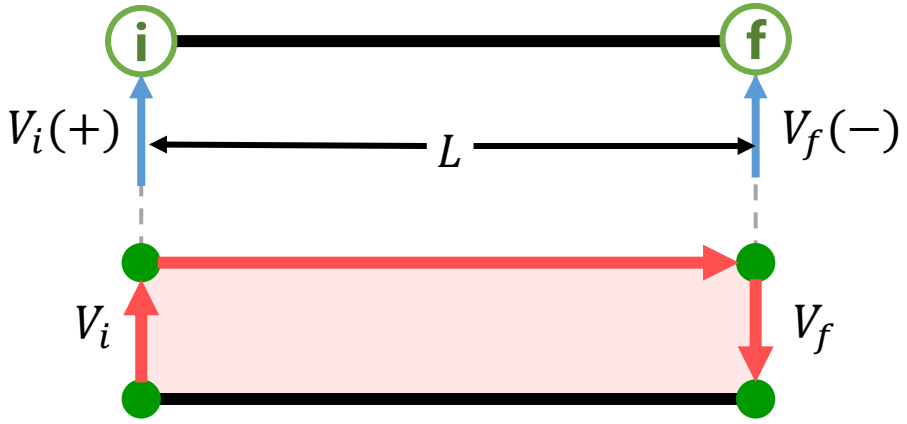
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

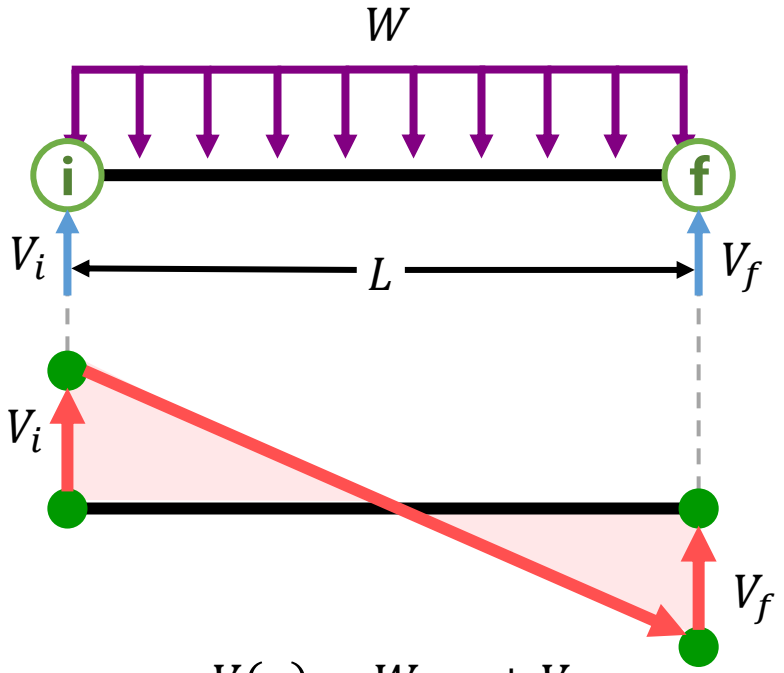
CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$V(x) = V_i$$

Se cumple: |Vi| = |Vf| (mismo valor y distinto signo)

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



$$V(x) = W \cdot x + V_i$$

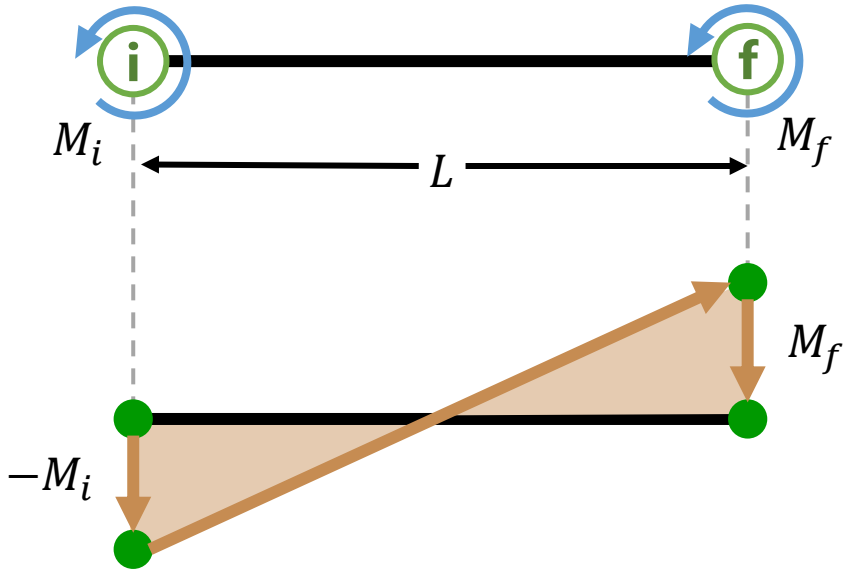
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

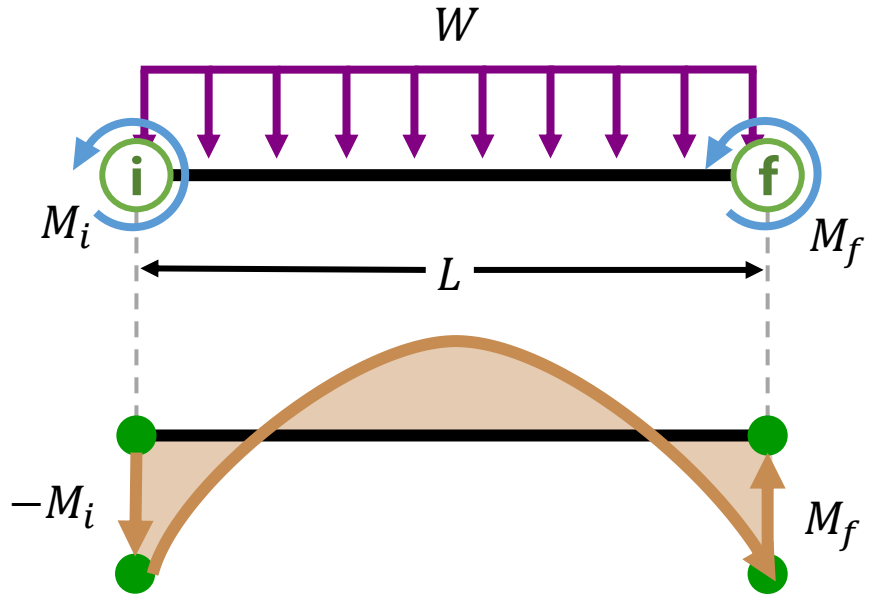
Ecuación: $M(x) = \int V(x)\,dx - M_i$

CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$M(x) = V_i \cdot x - M_i$$

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



$$M(x) = \frac{W}{2}x^2 + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

ELM	Ni		Nf		L [m]	α [°]	A [m^2]	I [m^4]
1	1	SR	2	SR	4.5	90	0.0248	$6.360x10^{-4}$
2	4	SR	3	SR	4.5	90	0.0248	$6.360x10^{-4}$
3	2	R	3	R	9.0	0	0.0143	$5.492x10^{-4}$
4	1	SR	5	R	5.03	26.27	$6x10^{-4}$	$1.8x10^{-7}$
5	5	R	3	SR	5.03	26.27	$6x10^{-4}$	$1.8x10^{-7}$

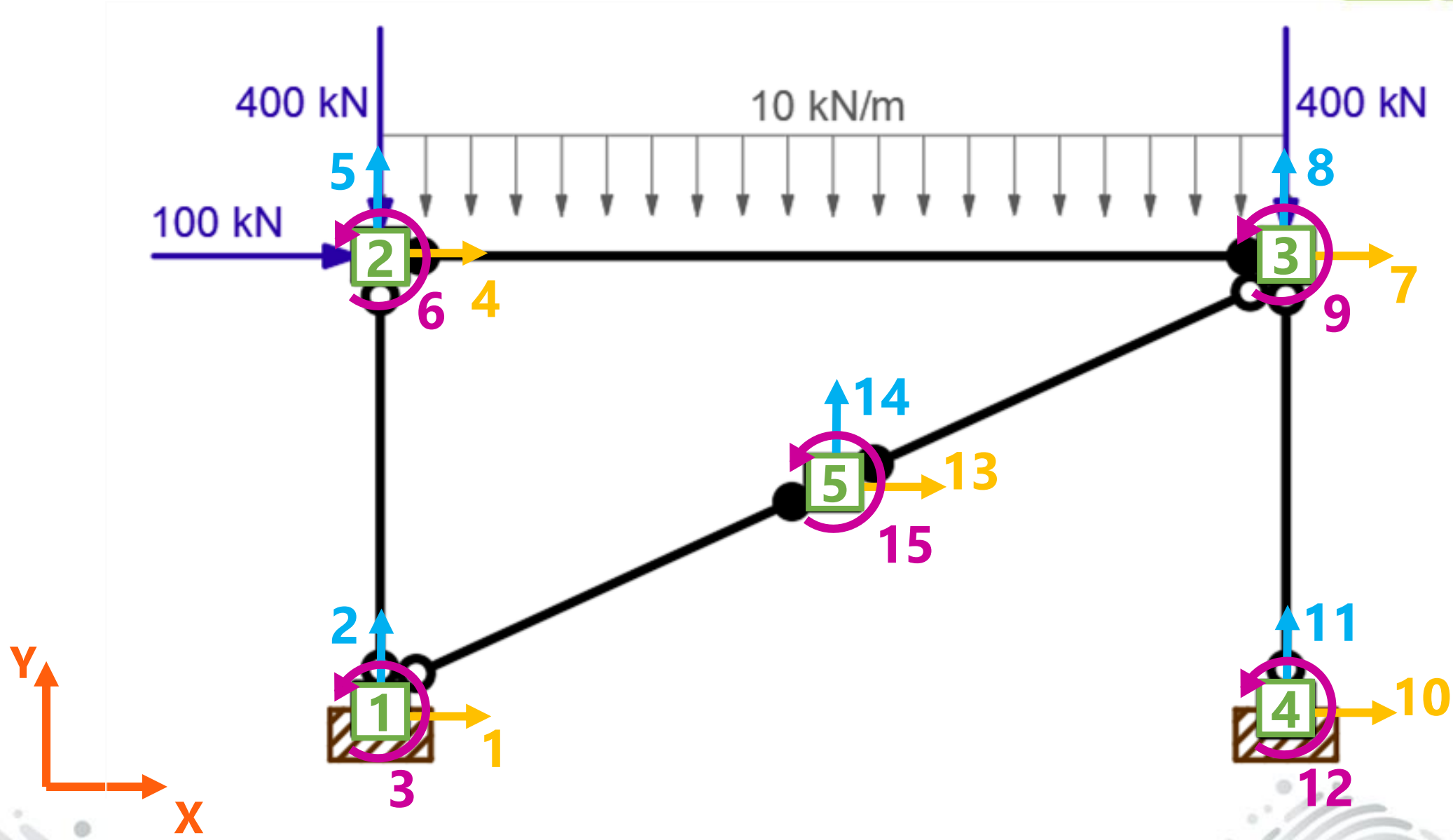
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	4.5
3	9.0	4.5
4	9.0	0.0
5	4.5	2.25

Módulo de elasticidad:

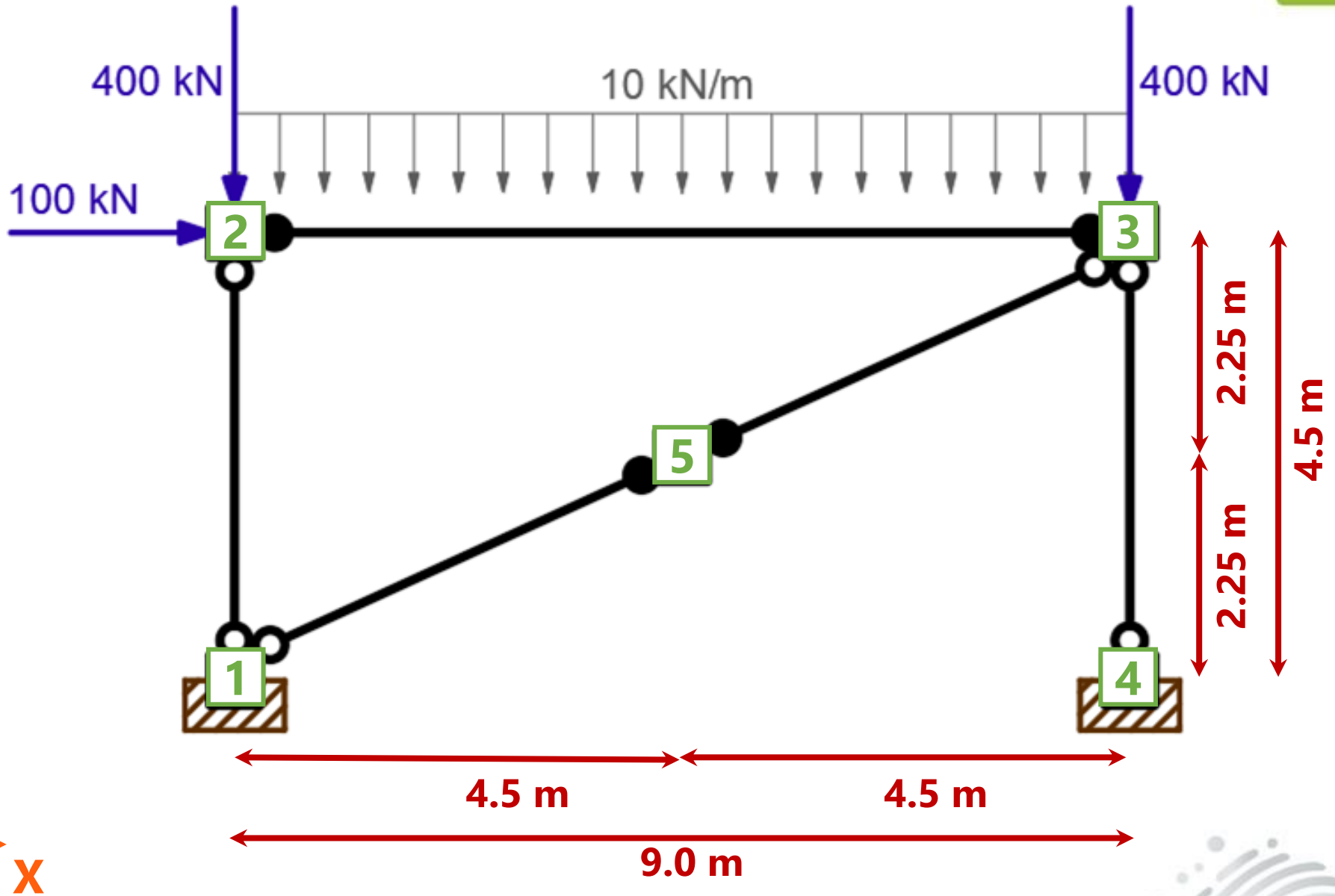
$$E = 2 \times 10^8 \ {}^{kN}/_{m^2}$$

#LaUISqueQueremos

GRADOS DE LIBERTAD



GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



#LaUISqueQueremos

ENSAMBLE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Matriz de rigidez local elemento con rótula en el nodo inicial:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 1\times10^{-16} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 1\times10^{-16} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & 1\times10^{-16} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix}$$

#LaUISqueQueremos

ENSAMBLE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Matriz de rigidez local elemento con rótula en el nodo final:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 1\times10^{-16} \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 1\times10^{-16} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 1\times10^{-16} \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \end{bmatrix}$$

#LaUISqueQueremos

ENSAMBLE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Matriz de rigidez local elemento con rótula en el nodo inicial y final:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \\ 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} & 0 & 1\times10^{-16} & 1\times10^{-16} \end{bmatrix}$$

#LaUISqueQueremos

ENSAMBLE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Matriz de rigidez local elemento sin rótulas:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

#LaUISqueQueremos

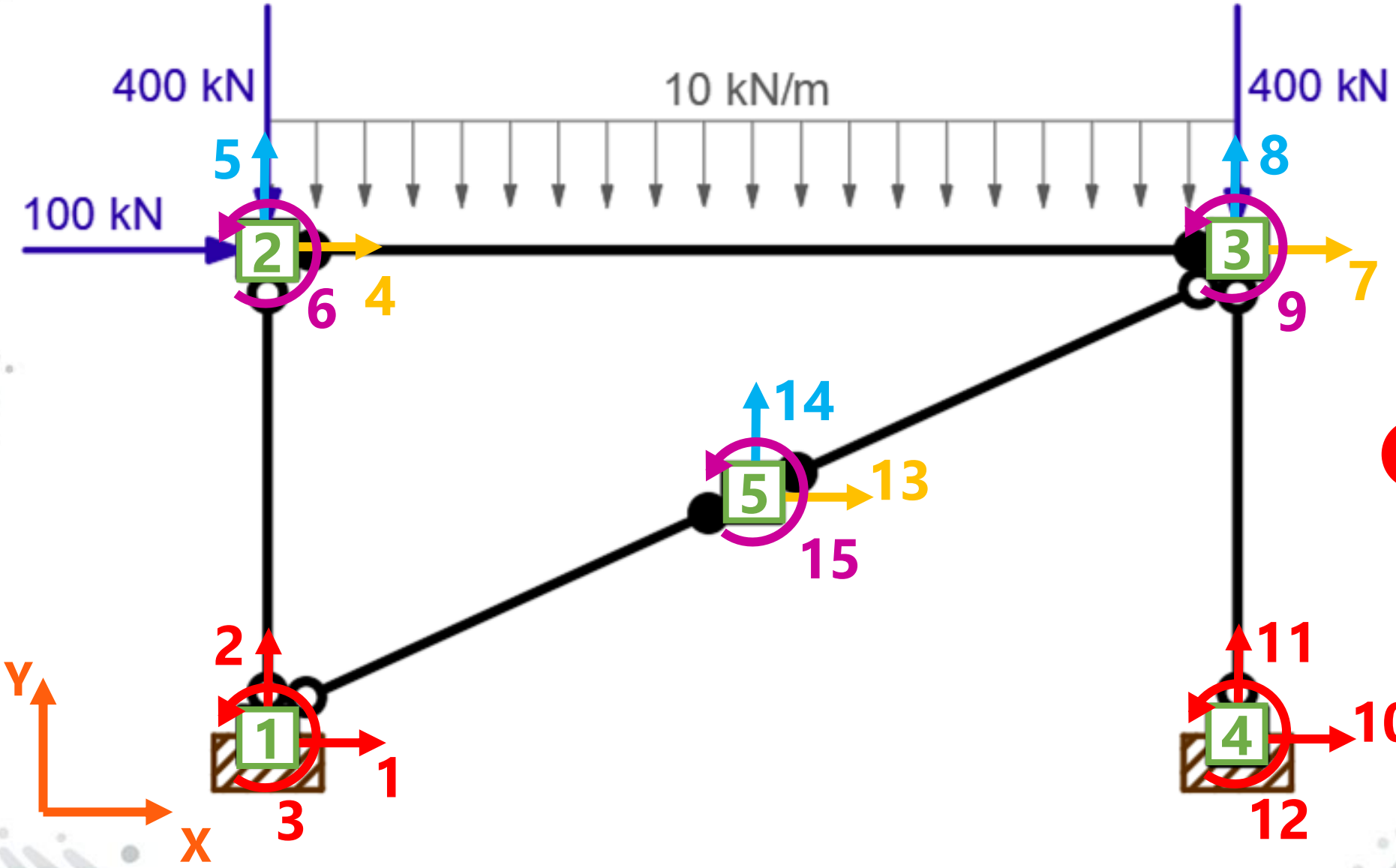
VECTOR FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

ELEM	TIPO	DIRECCIÓN	W (KN/m)	$\{F^{FEM}\}_L$					
				Rxi (kN)	Ryi (kN)	Mzi (kN-m)	Rxf (kN)	Ryf (kN)	Mzf (kN-m)
1	Sin carga	-	-	0	0	0	0	0	0
2	Sin carga	-	-	0	0	0	0	0	0
3	Uniforme	Local y	10	0	45	0	0	45	0
4	Sin carga	-	-	0	0	0	0	0	0
5	Sin carga	-	-	0	0	0	0	0	0

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CONTORNO



Grados de libertad restringidos

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Desplazamientos: $\{U\}_G = (\{F_{ext}\}_G - \{F^{FEM}\}_G) * [K]_G^{-1}$

Reacciones: $\{R\} = [k]_G\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_G$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_L$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

Fuerza axial: $N(x) = W \cdot x + N_i$

Fuerza cortante: $V(x) = W \cdot x + V_i$

Momento flector: $M(x) = W\frac{x^2}{2} + V_i \cdot x - M_i$

Si hay cargas distribuidas: W > 0

Si NO hay cargas distribuidas: W = 0 (La ecuación se simplifica)

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

REACCIONES

Nodo 1: Rx = -76.38 kN, Ry = 419.11 kN, Mz = 110.73 kN-m
Nodo 4: Rx = -23.62 kN, Ry = 470.89 kN, Mz = 106.28 kN-m

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
2	5.877e-03	-4.037e-04	-1.959e-03
3	5.640e-03	-4.272e-04	-1.880e-03
4	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5	7.051e-04	4.016e-03	-3.152e-19

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
1	-445.000	C	24.611	-24.611	110.749	0.000
2	-470.887	C	23.622	-23.622	106.285	0.014
3	-75.389	C	45.000	45.000	0.000	0.000
4	57.879	T	-0.003	0.003	-0.014	0.000
5	57.879	T	-0.003	0.003	0.000	-0.014

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Pórticos
Ejercicio 3
Modelo OpenSees

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

#LaUISqueQueremos

PÓRTICOS: EJERCICIO 3

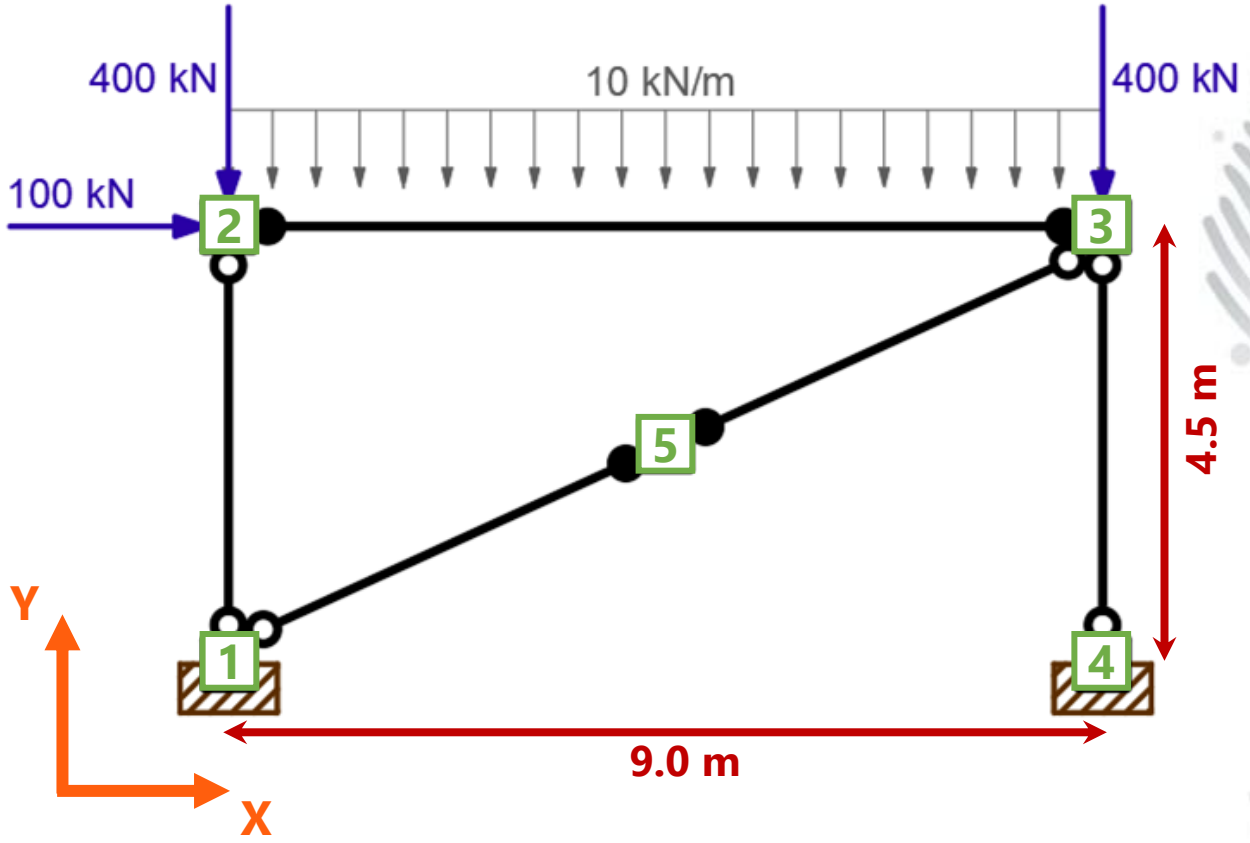
Se tiene el pórtico plano mostrado en la figura, sometido a cargas concentradas y una carga distribuida sobre la viga superior. La estructura presenta rótulas (articulaciones) en los extremos de la viga superior y en el punto medio del elemento diagonal, tal como se indica. Utilizando el método matricial de rigidez y considerando los ejes globales X, Y indicados, se solicita:

- Determinar los desplazamientos en los nodos 2 y 3 de la estructura.
- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Determinar las fuerzas internas en cada elemento (fuerza axial, fuerza cortante y momento flector).
- Construir los diagramas de fuerzas internas para cada elemento.

Para el análisis considere:

- Módulo de elasticidad: $E = 2 \times 10^8\ kN/m^2$ para todos los elementos.
- La viga tiene sección W18×76.
- Las columnas tienen sección W14×132.
- El elemento diagonal posee un área equivalente de $6\ cm^2$.

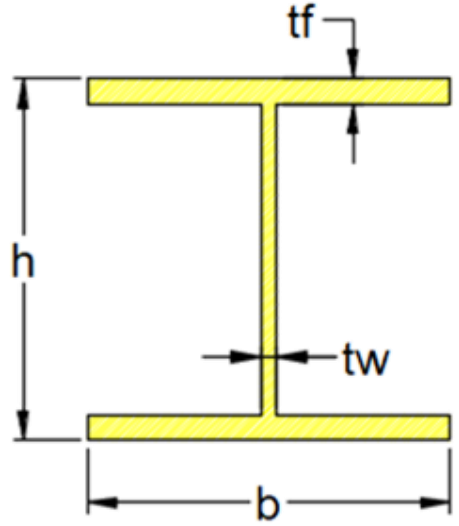
Desprecie el peso propio de los elementos y considere únicamente las cargas indicadas en la figura.



#LaUISqueQueremos

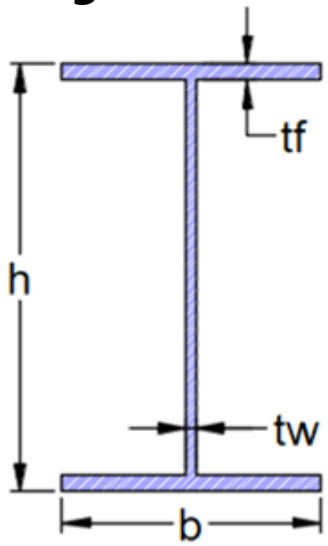
PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

Columna W14X132



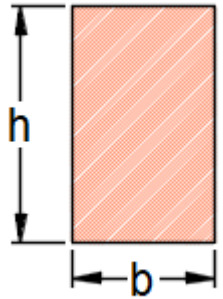
h (m)	0.3734
b (m)	0.3734
tf (m)	0.0262
tw (m)	0.0164
A (m^2)	0.0248
I (m^4)	6.360×10^{-4}

Viga W18X76



h (m)	0.4623
b (m)	0.2794
tf (m)	0.0173
tw (m)	0.0108
A (m^2)	0.0143
I (m^4)	5.492×10^{-4}

Diagonal



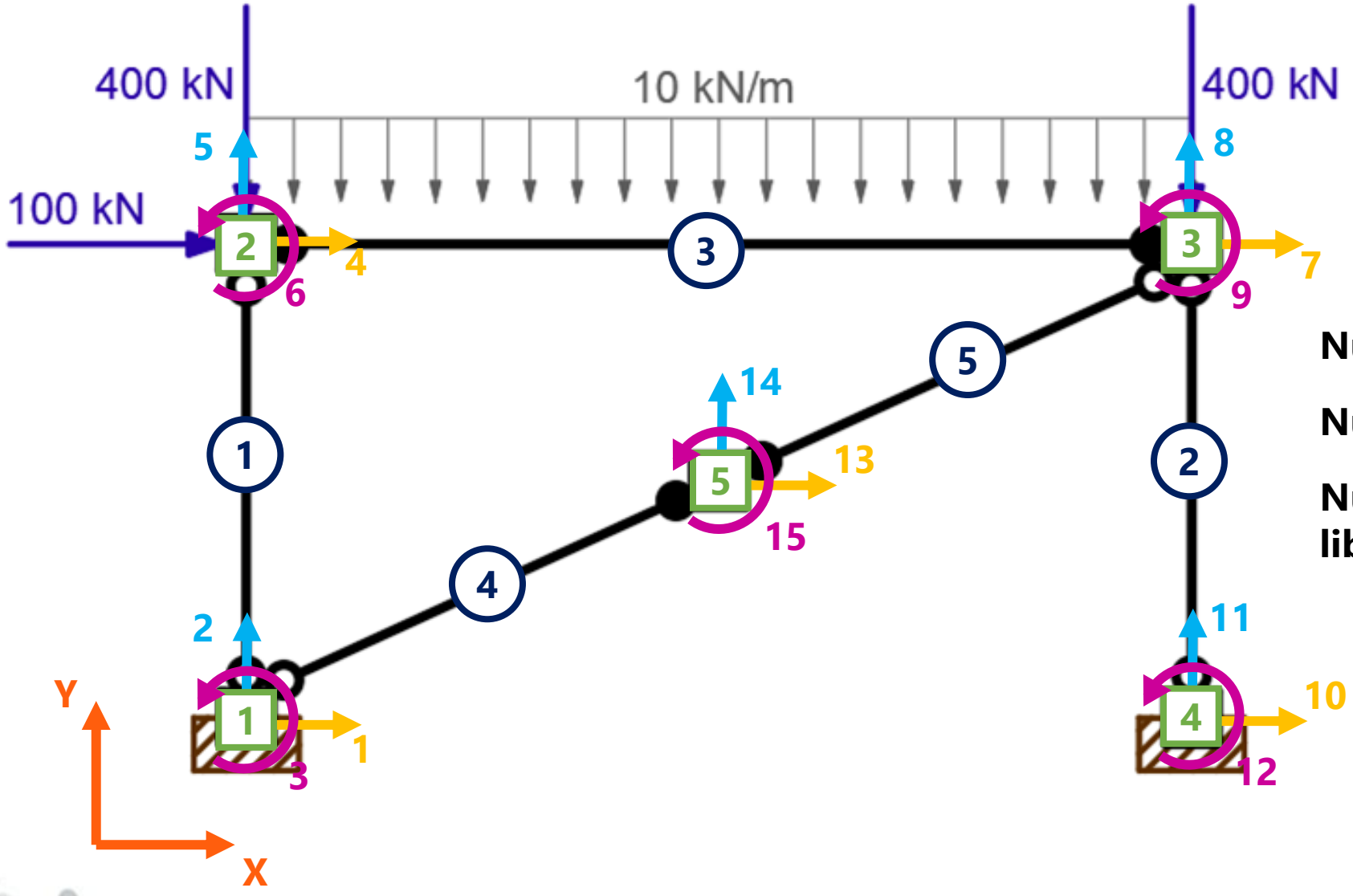
h (m)	0.06
b (m)	0.01
A (m^2)	6×10^{-4}
I (m^4)	1.8×10^{-7}

Módulo de elasticidad:

$$E = 2 \times 10^8 \ {}^{kN}/_{m^2}$$

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS



Número de nodos: 5

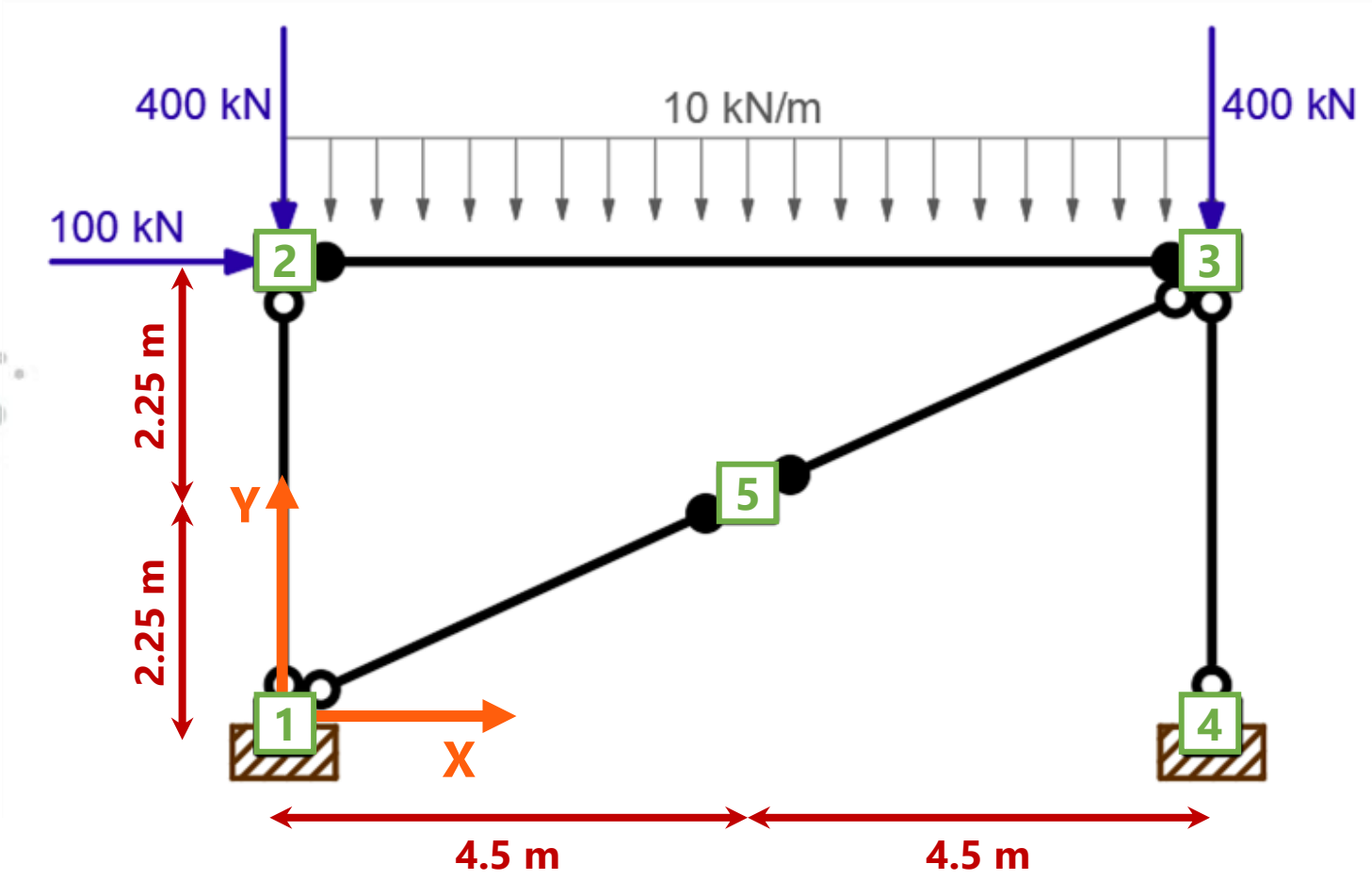
Número de elementos: 5

Número de grados de libertad: 15

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	4.5
3	9.0	4.5
4	9.0	0.0
5	4.5	2.25

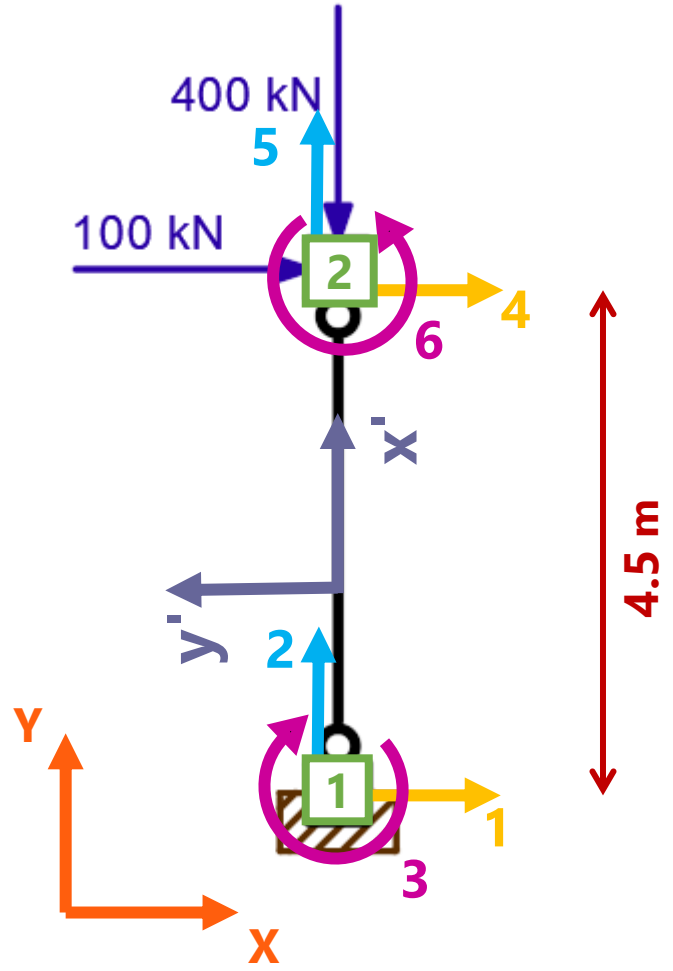
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	4.5	90

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



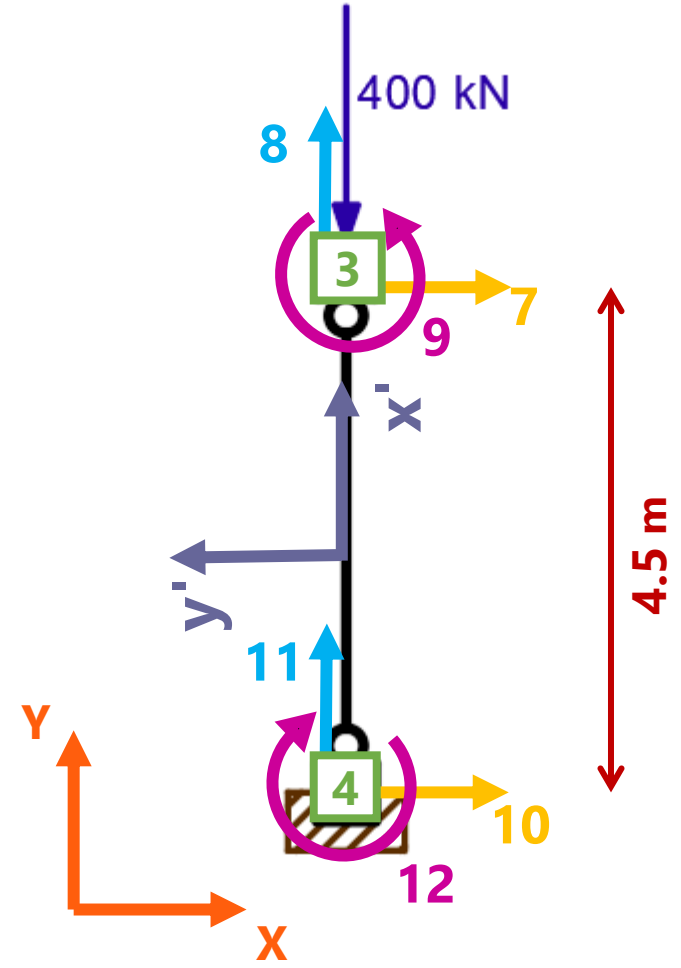
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	4.5	90
2	4	SR	3	SR	4.5	90

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



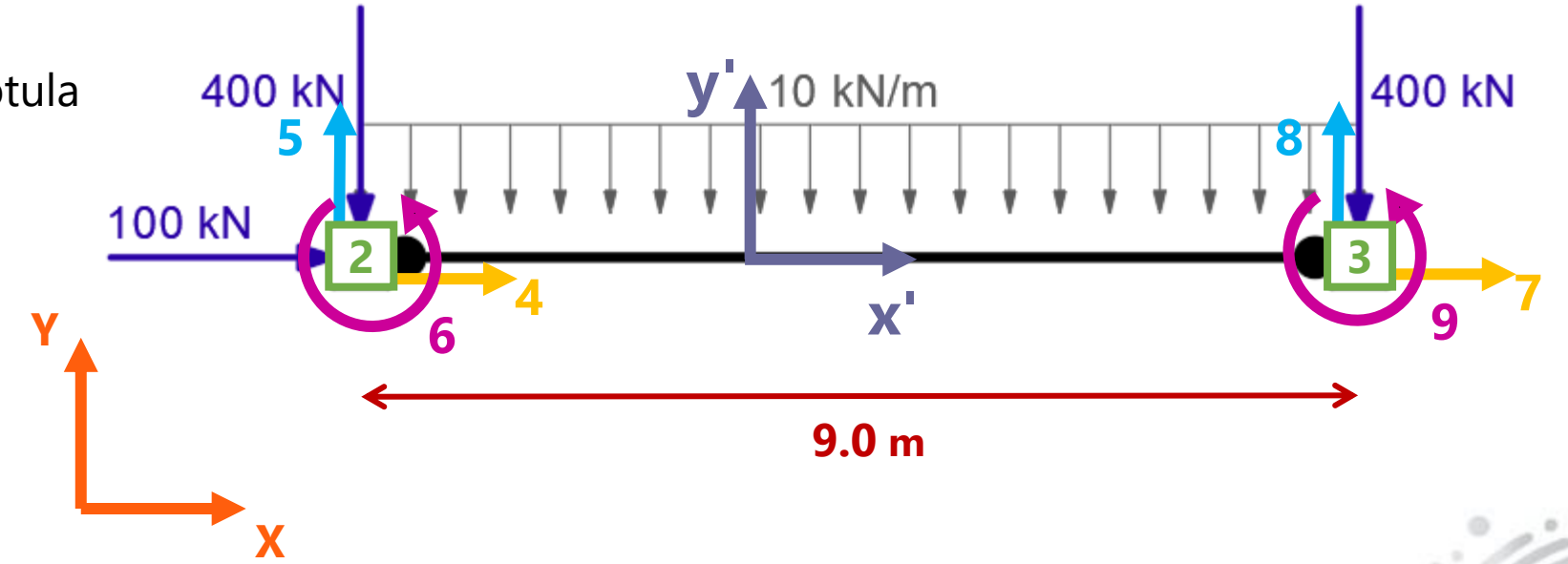
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	5.0	90
2	4	SR	3	SR	4.5	90
3	2	R	3	R	9.0	0

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



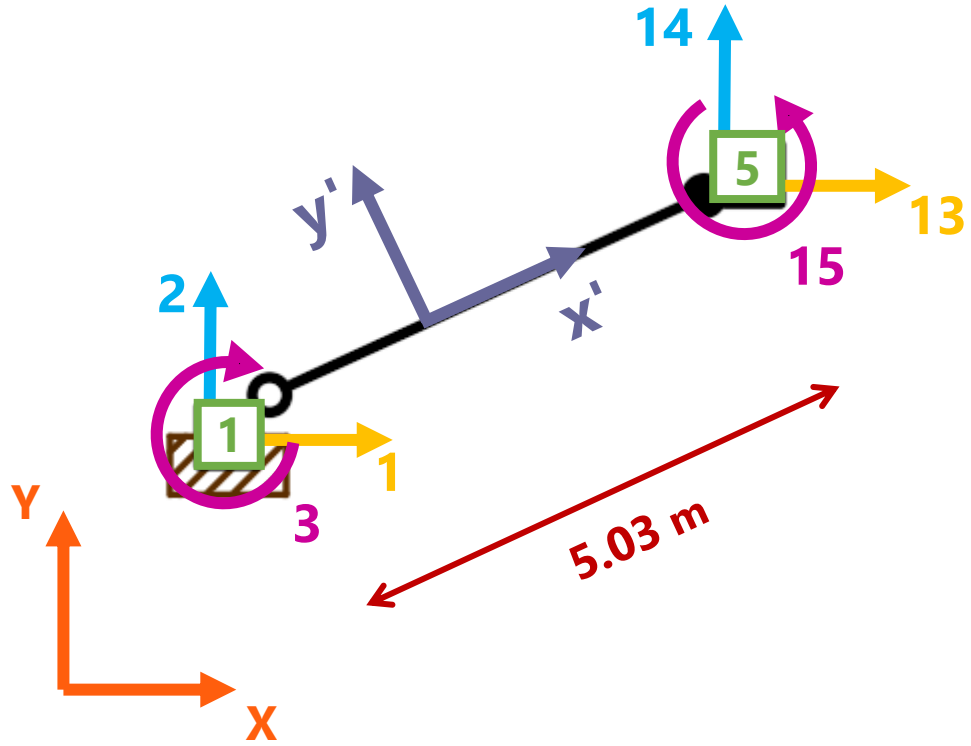
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 4

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	5.0	90
2	4	SR	3	SR	4.5	90
3	2	R	3	R	9.0	0
4	1	SR	5	R	5.03	26.57

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



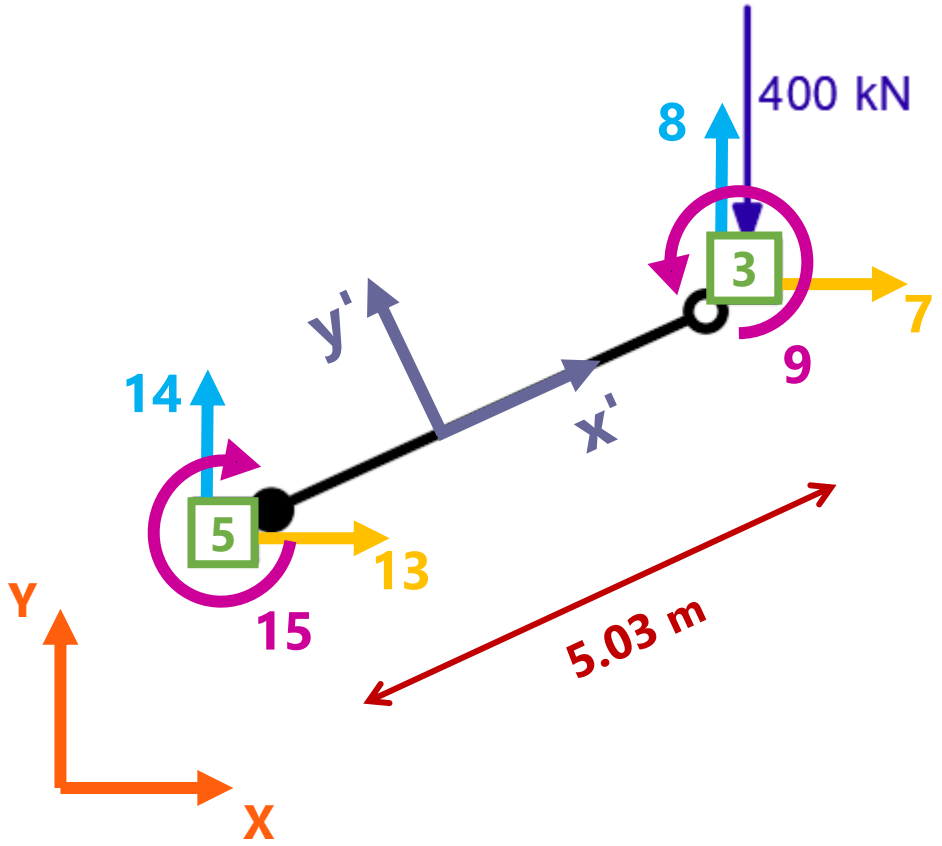
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 5

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	5.0	90
2	4	SR	3	SR	4.5	90
3	2	R	3	R	9.0	0
4	1	SR	5	R	5.03	26.57
5	5	R	3	SR	5.03	26.57

* SR: Sin rótula
* R: Rótula



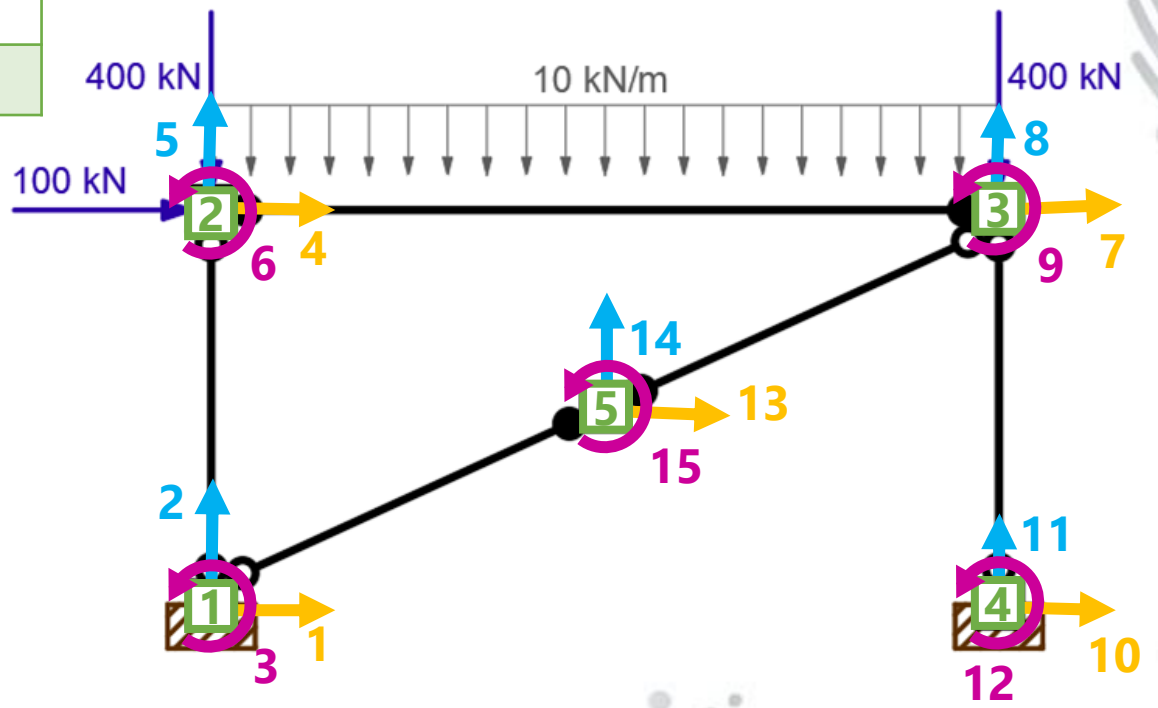
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTOS

ELEMENTO	NODO i		NODO f		L [m]	θ [°]
1	1	SR	2	SR	5.0	90
2	4	SR	3	SR	4.5	90
3	2	R	3	R	9.0	0
4	1	SR	5	R	5.03	26.57
5	5	R	3	SR	5.03	26.57

* SR: Sin rótula
* R: Rótula

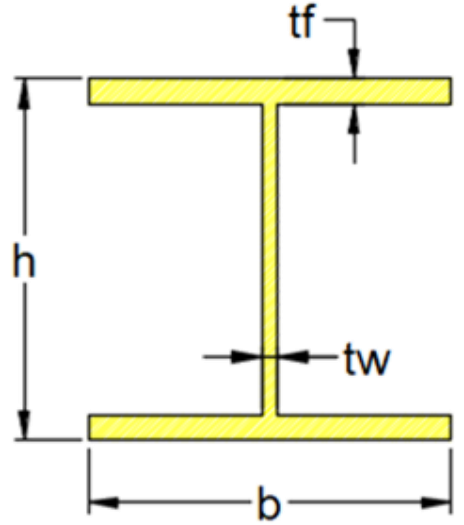


#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

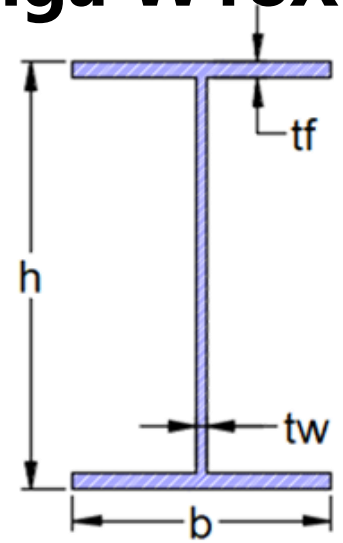
Módulo de elasticidad: $E = 2 \times 10^8 \ {}^{kN}/_{m^2}$

Columna W14X132



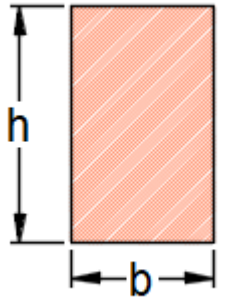
A (m^2)	0.0248
I (m^4)	6.360×10^{-4}

Viga W18X76



A (m^2)	0.0143
I (m^4)	5.492×10^{-4}

Diagonal

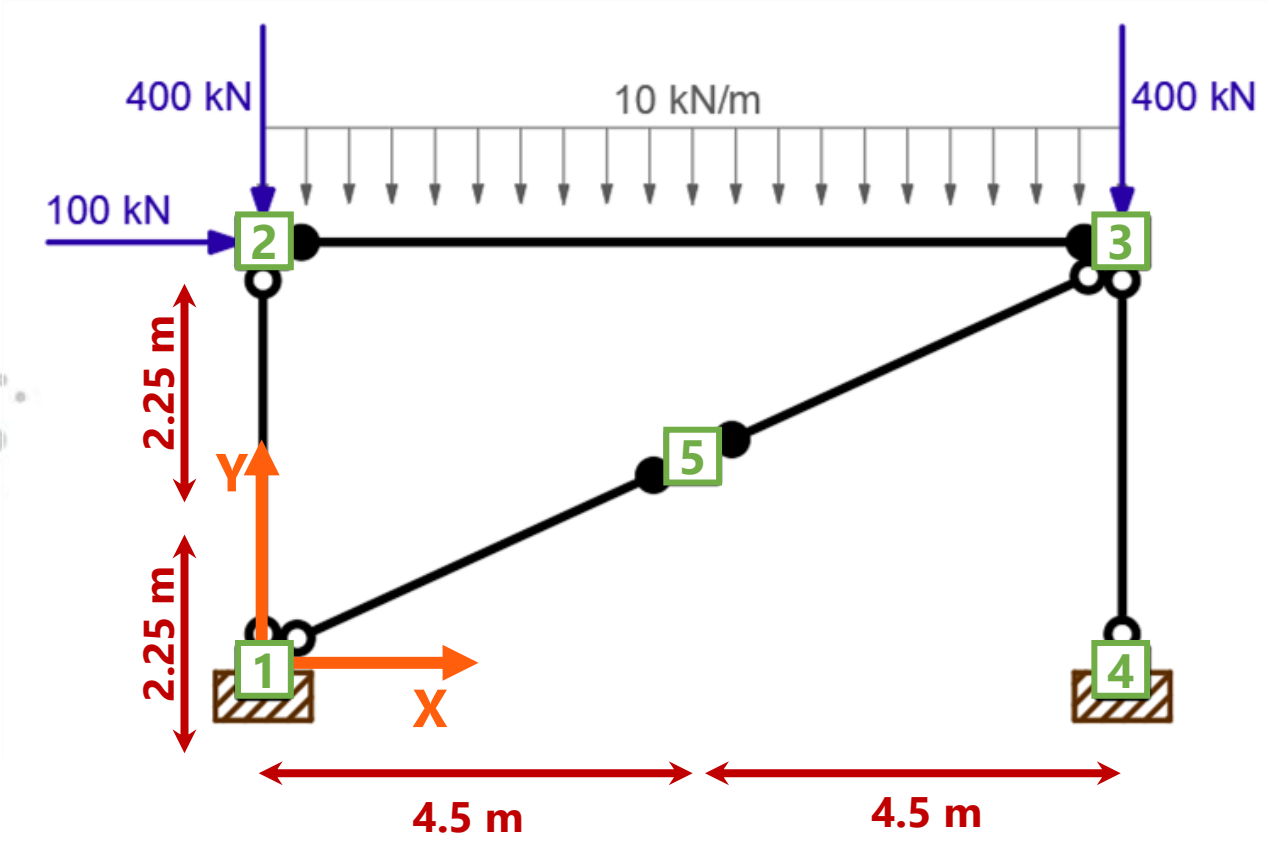


A (m^2)	6×10^{-4}
I (m^4)	1.8×10^{-7}

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

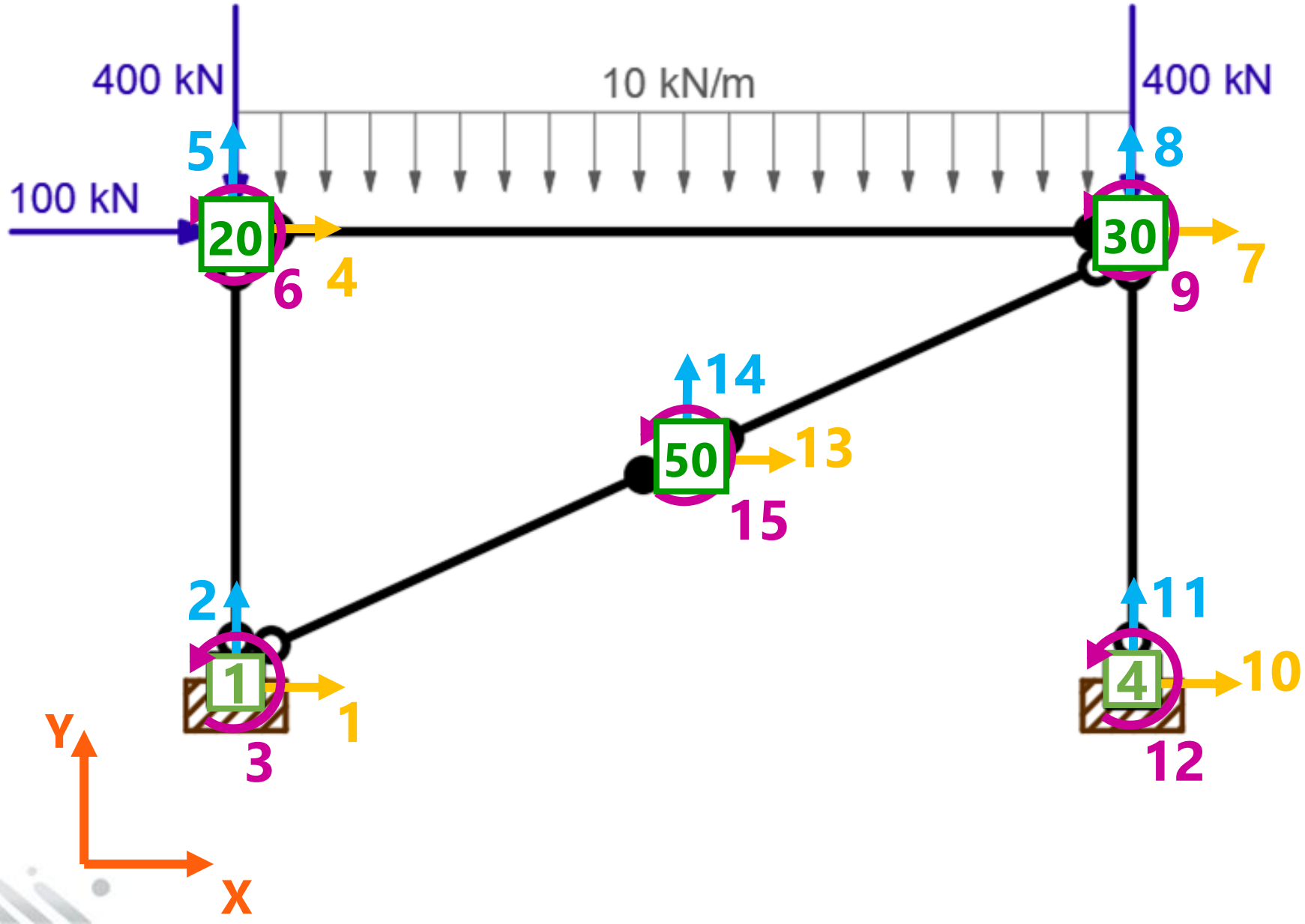
Coordenadas de los nodos



NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	4.5
3	9.0	4.5
4	9.0	0.0
5	4.5	2.25

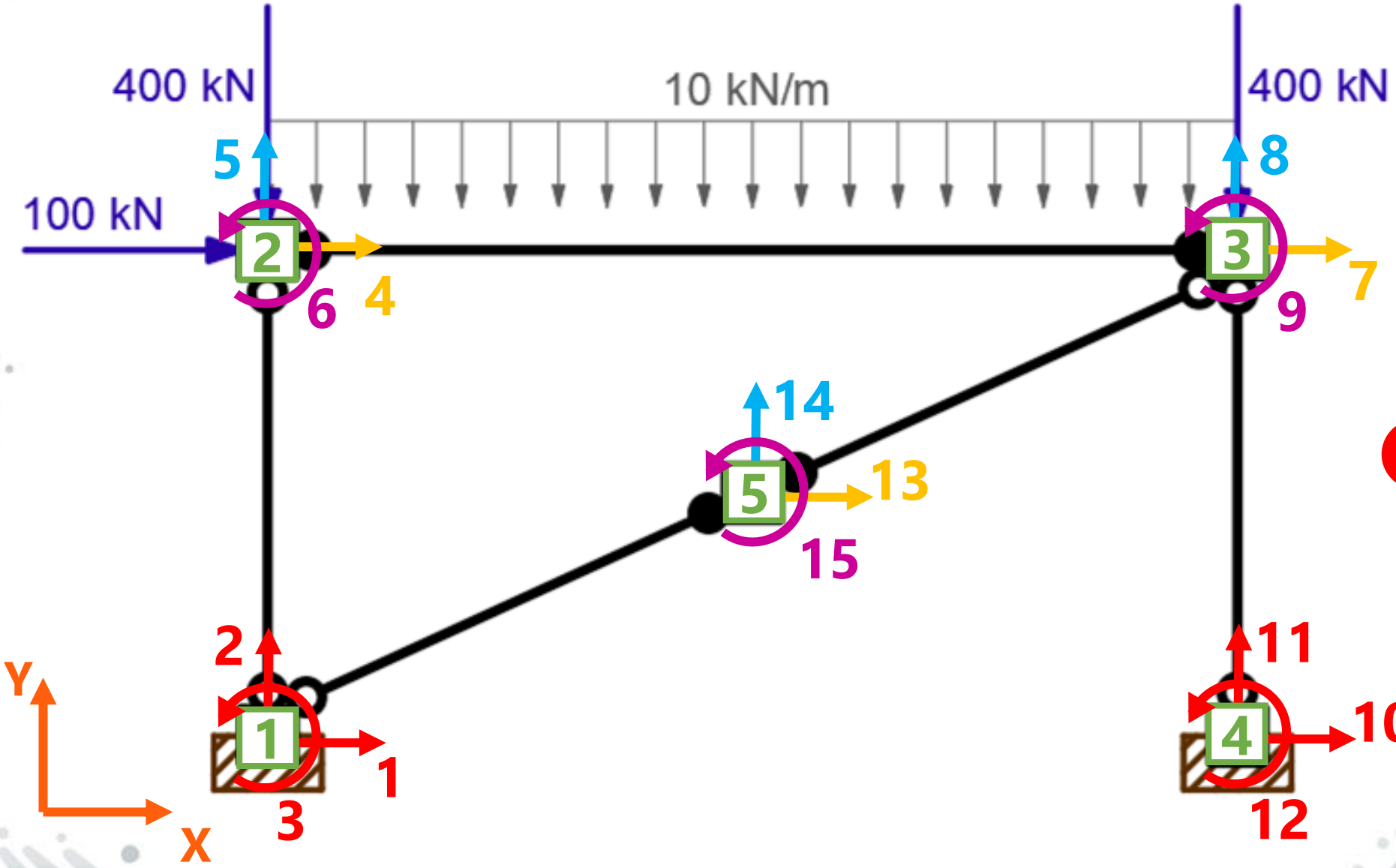
#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA



Para incorporar rótulas, se emplean nodos auxiliares en la misma coordenada, vinculados al nodo principal mediante elementos que permiten la rotación libre.

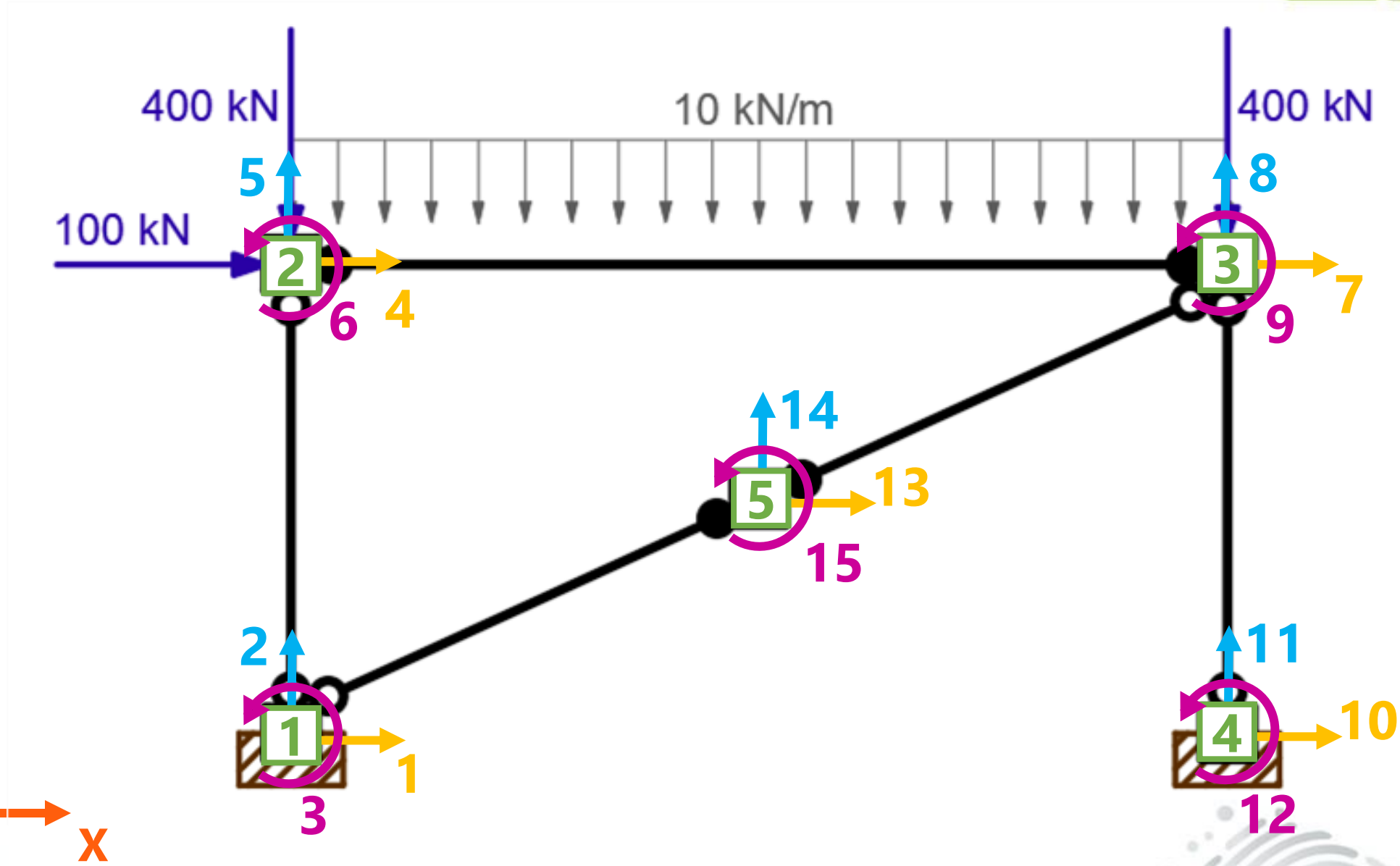
CONDICIONES DE CONTORNO



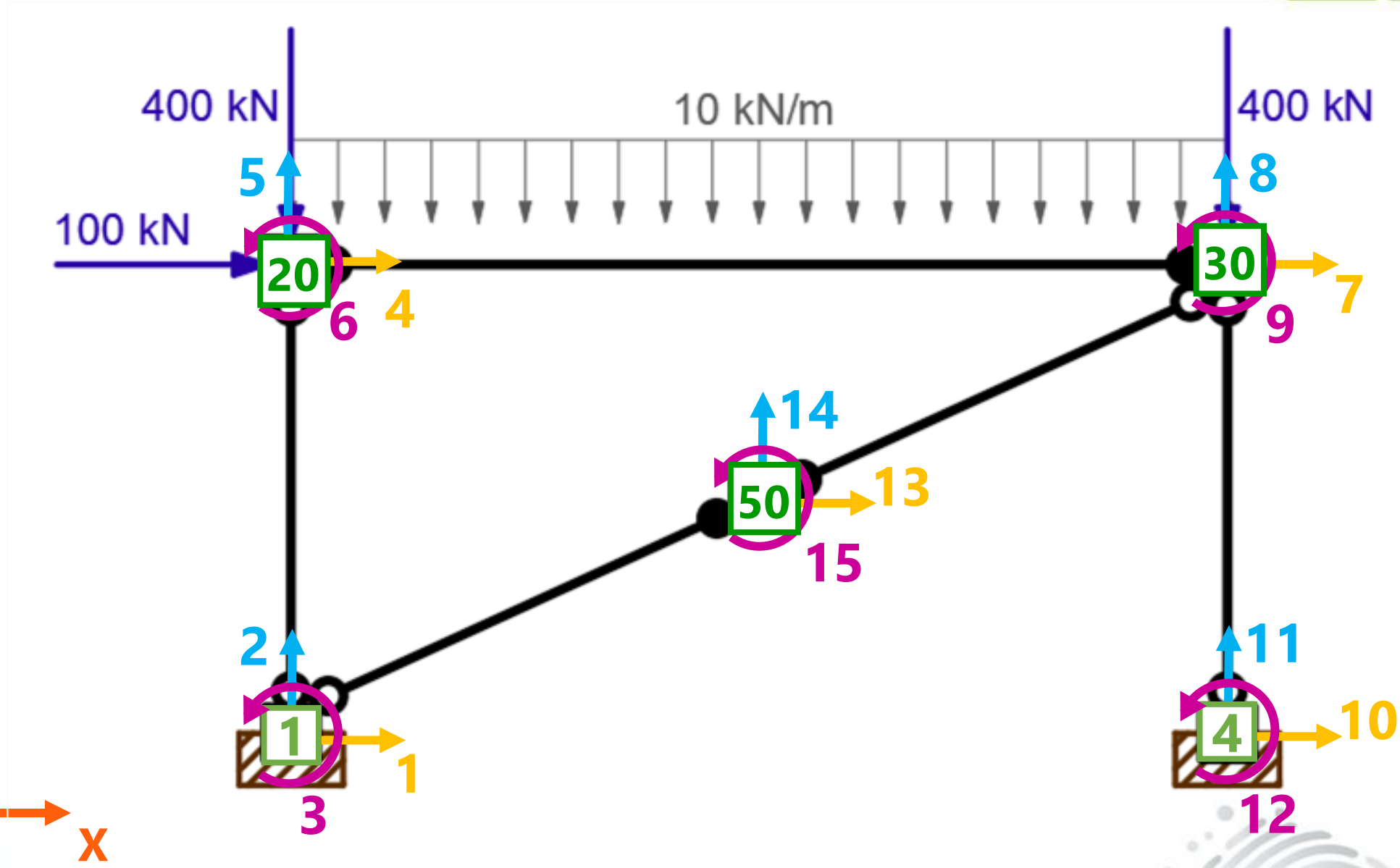
Grados de libertad restringidos

#LaUISqueQueremos

DEFINICIÓN DE ELEMENTOS

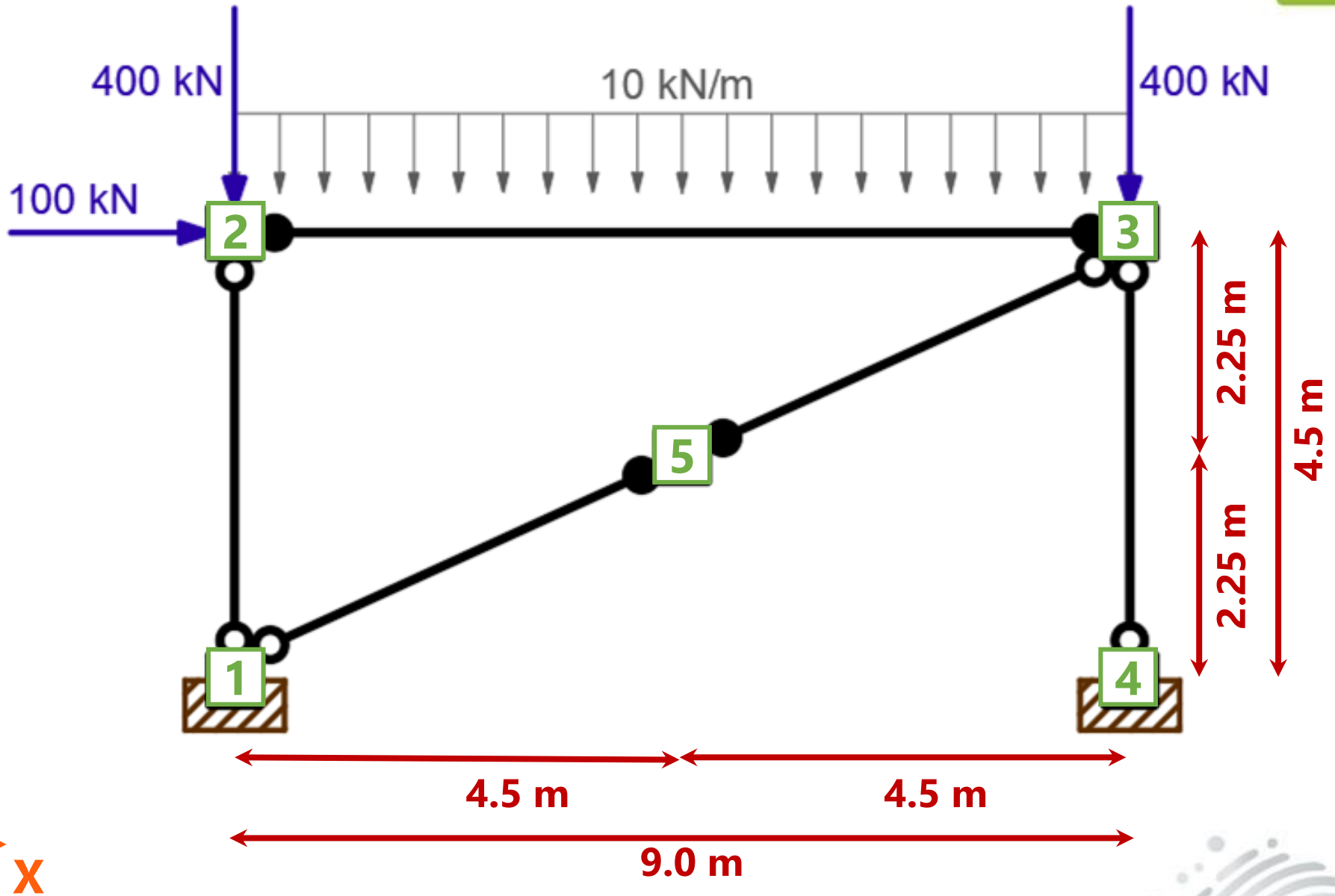


DEFINICIÓN DE ELEMENTOS



#LaUISqueQueremos

GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

REACCIONES

Nodo 1: Rx = -76.378 kN, Ry = 419.113 kN, Rz = 110.735 kN-m
Nodo 4: Rx = -23.622 kN, Ry = 470.887 kN, Rz = 106.285 kN-m

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
2	5.877e-03	-4.037e-04	-1.959e-03
3	5.640e-03	-4.272e-04	-1.880e-03
4	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
5	7.051e-04	4.016e-03	9.769e-04

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
1	445.000	C	24.611	-24.611	110.749	0.000
2	470.887	C	23.622	-23.622	106.285	0.014
3	75.389	C	45.000	45.000	0.000	0.000
4	-57.879	T	-0.003	0.003	-0.014	-0.000
5	-57.879	T	-0.003	0.003	-0.000	-0.014

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

Sistemas Mixtos

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Sistemas Mixtos
Ejercicio 1
Método Matricial de rigidez en Python

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

#LaUISqueQueremos

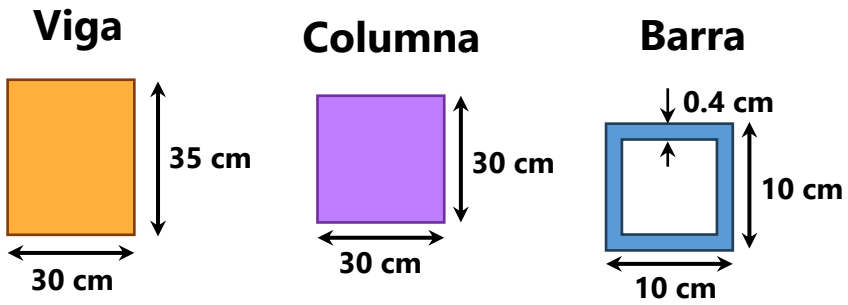
SISTEMAS MIXTOS: EJERCICIO 1

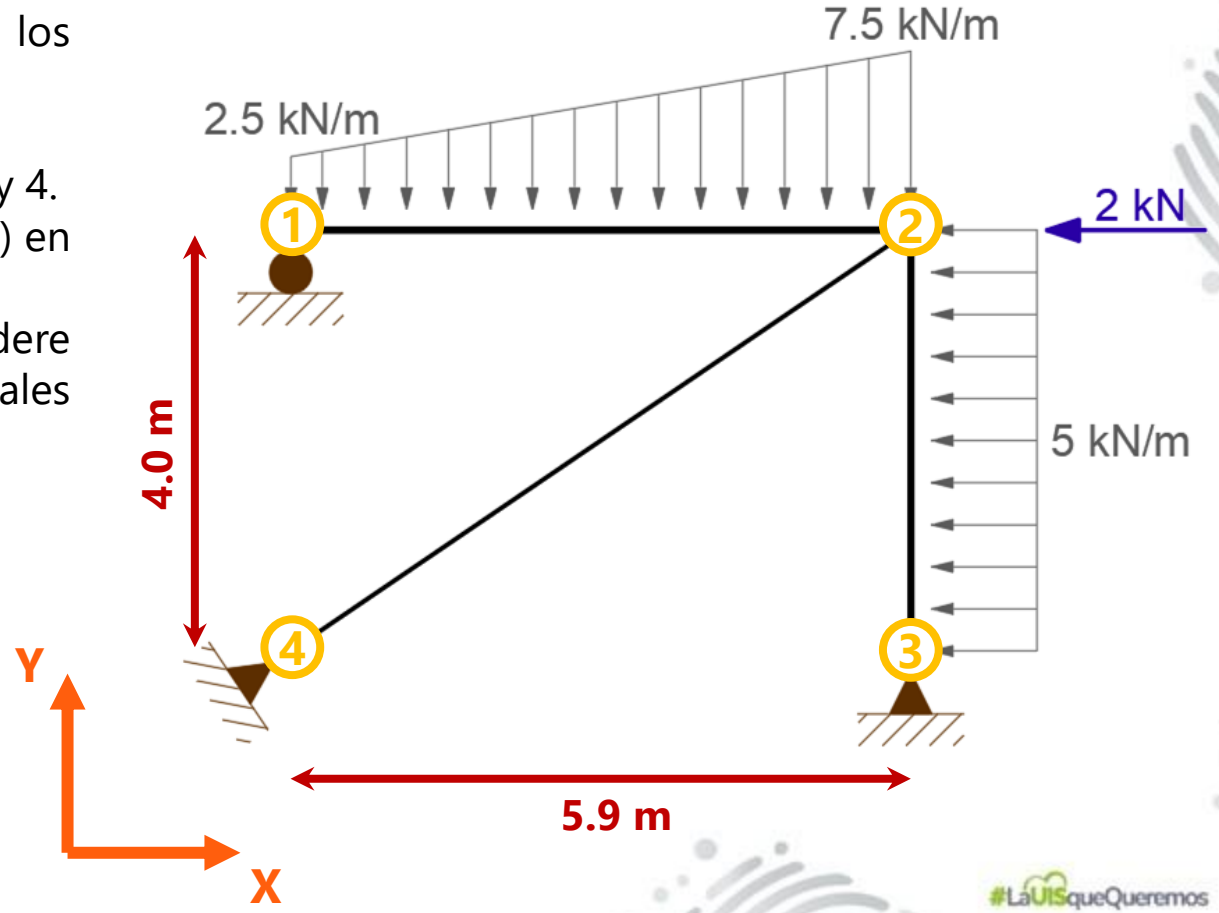
Se tiene el sistema estructural plano mostrado en la figura, conformado por una viga, una columna y una barra diagonal. La viga y la columna son de concreto ($f'c$=28 MPa) y la barra diagonal es de acero (E=200 GPa).El sistema está sometido a una carga distribuida vertical linealmente variable sobre la viga, una carga uniformemente distribuida sobre la columna y una carga puntual horizontal en el nodo 2.

Utilizando el método matricial de rigidez y considerando los ejes globales XY, se solicita:

- Determinar los desplazamientos en el nodo 2.
- Calcular las reacciones en los apoyos de los nodos 1, 3 y 4.
- Obtener las fuerzas internas (axial, cortante y momento) en cada elemento y realizar el diagrama correspondiente.

Desprecie el peso propio de los elementos, considere únicamente las cargas indicadas y las secciones transversales que se indican a continuación:





#LaUISqueQueremos

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

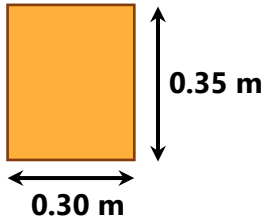
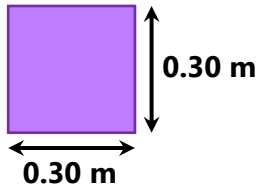
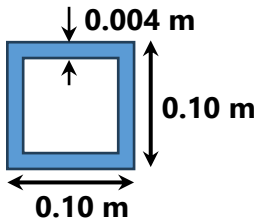
Módulo de elasticidad concreto: $E_c = 4700\sqrt{f'c}\ (MPa)$

Para $f'c = 28\ MPa$: $E_c = 4700\sqrt{28}\ MPa = 24870.06232\ MPa$

$$\boldsymbol{E_c = 24870062.32\ kN/m^2}$$

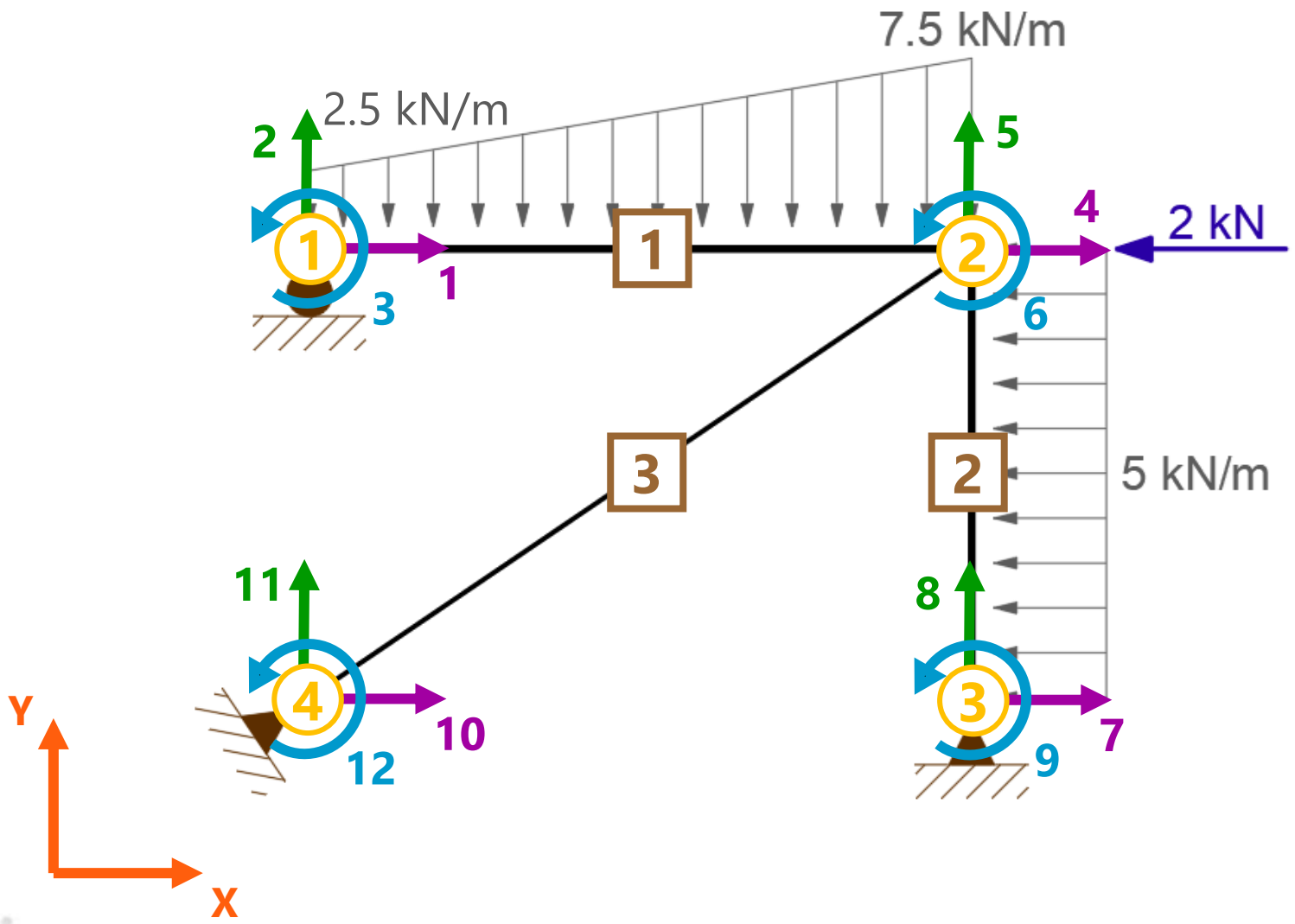
Módulo de elasticidad acero: $E_s = 200GPa$

$$\boldsymbol{E_s = 2 \times 10^8\ kN/m^2}$$

Elemento	Viga	Columna	Barra
			
Área transversal (m^2)	$b \cdot h$	$b \cdot h$	$4e(L-e)$
Momento de inercia (m^4)	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS



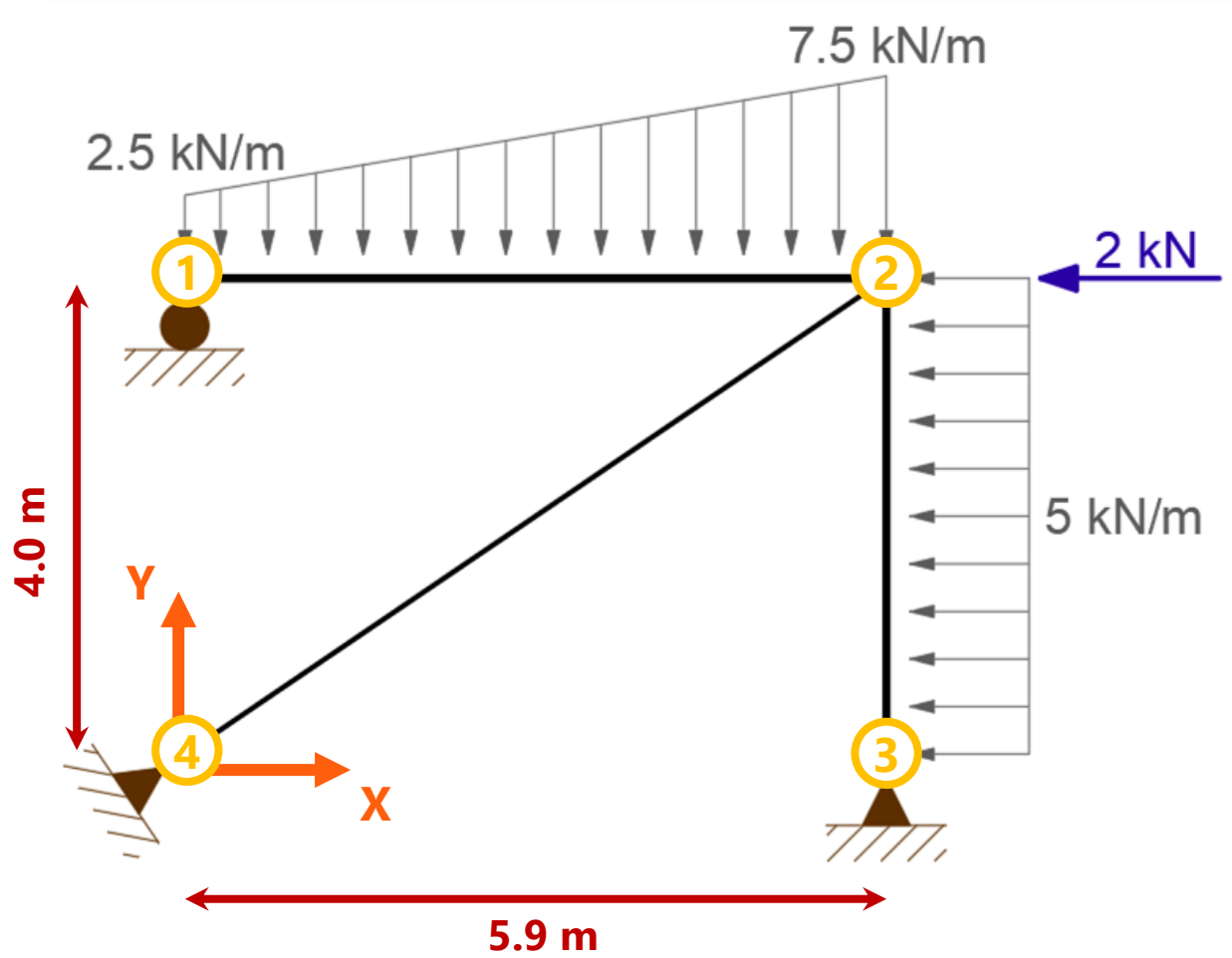
Número de nodos: 4

Número de elementos: 3

Número de grados de libertad: 12

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



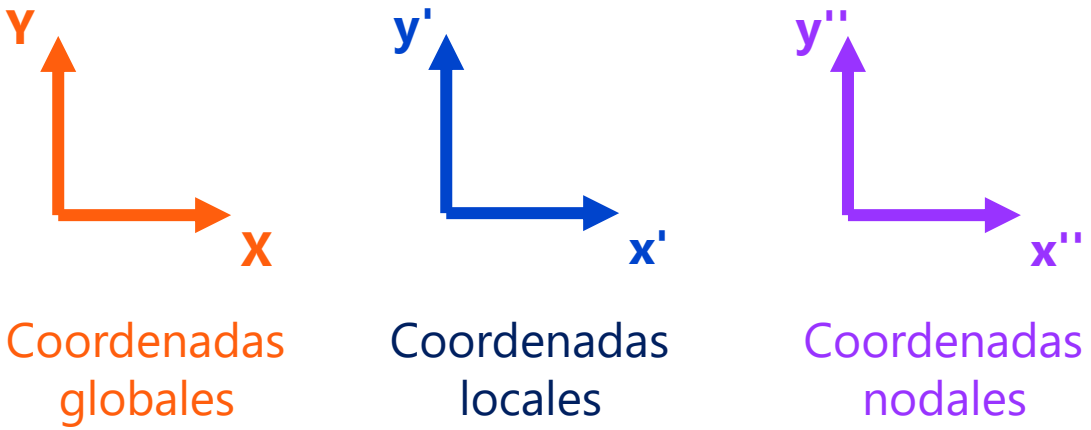
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	4.0
2	5.9	4.0
3	5.9	0.0
4	0.0	0.0

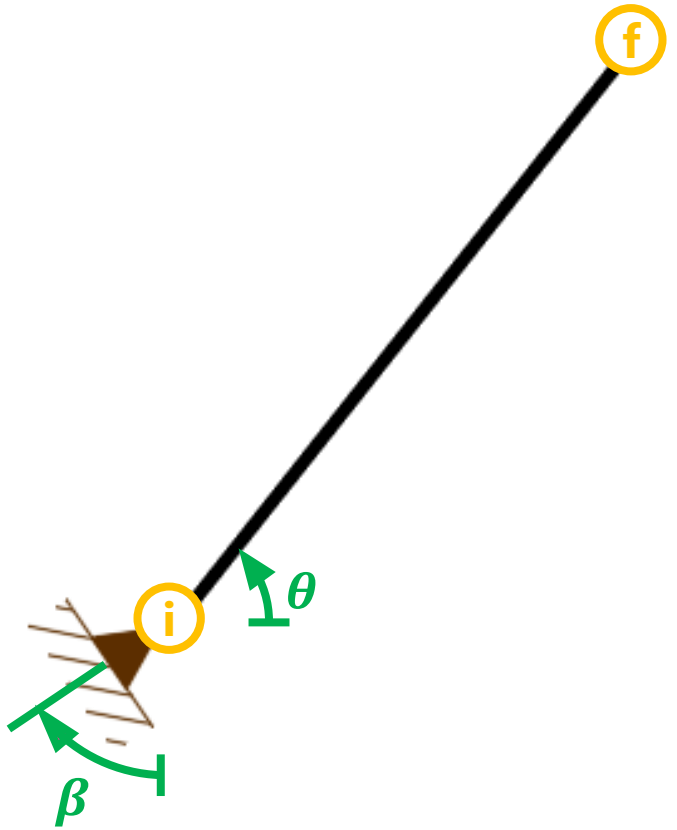
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ÁNGULO DE INCLINACIÓN CON APOYOS INCLINADOS

En el análisis con apoyos inclinados se definen tres ejes de referencia:
- **Coordenadas globales (X, Y):** Sistema único para toda la estructura.
- **Coordenadas locales (x', y'):** Sistema asociado a la orientación de cada elemento.
- **Coordenadas nodales (x'', y''):** Sistema asociado a la dirección del apoyo en un nodo específico. Solo se definen cuando el nodo tiene un apoyo inclinado.



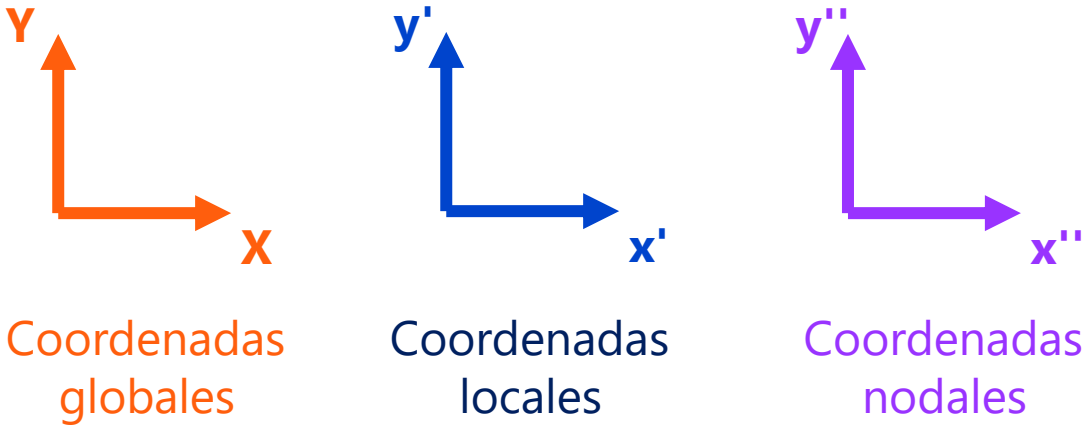


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ÁNGULO DE INCLINACIÓN CON APOYOS INCLINADOS

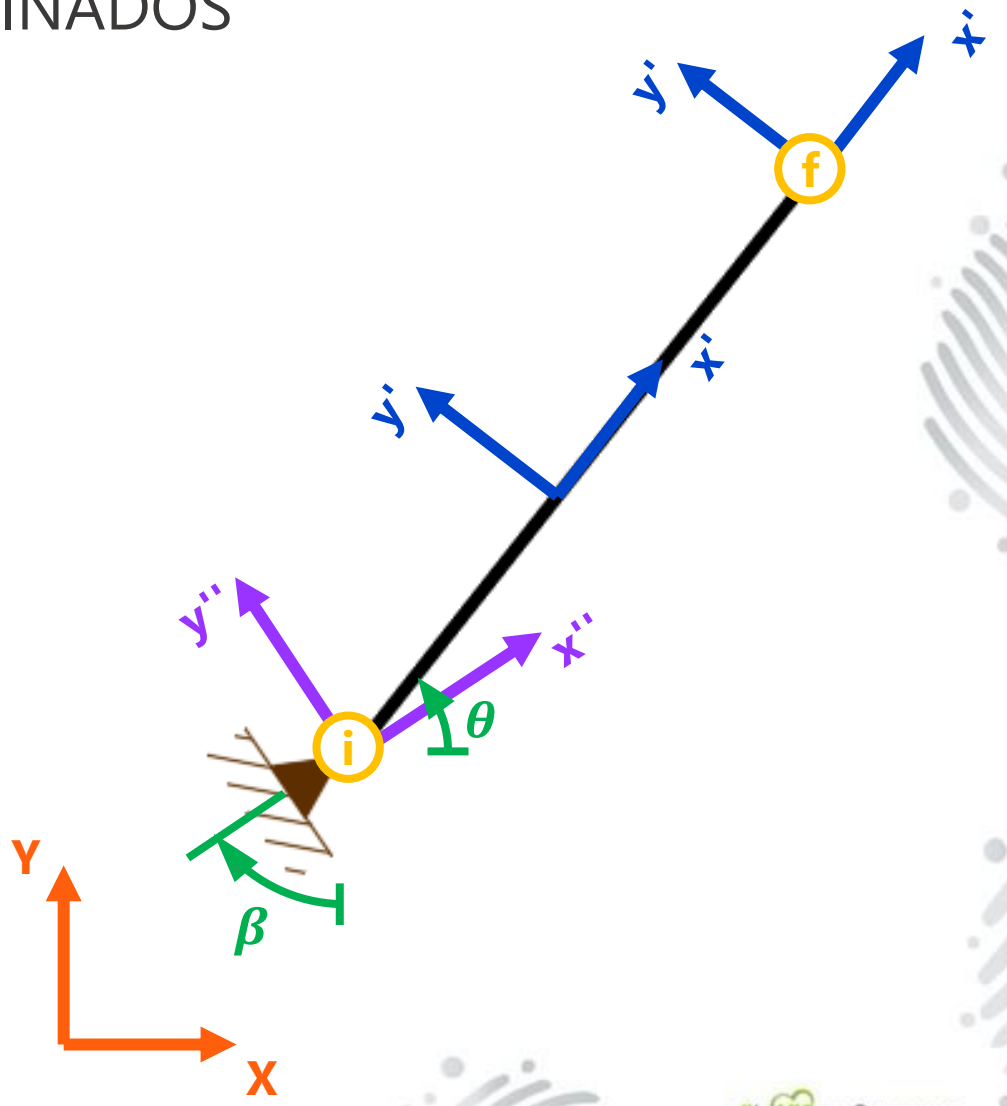
En el análisis con apoyos inclinados se definen tres ejes de referencia:
- **Coordenadas globales (X, Y):** Sistema único para toda la estructura.
- **Coordenadas locales (x', y'):** Sistema asociado a la orientación de cada elemento.
- **Coordenadas nodales (x'', y''):** Sistema asociado a la dirección del apoyo en un nodo específico. Solo se definen cuando el nodo tiene un apoyo inclinado.



Coordenadas globales

Coordenadas locales

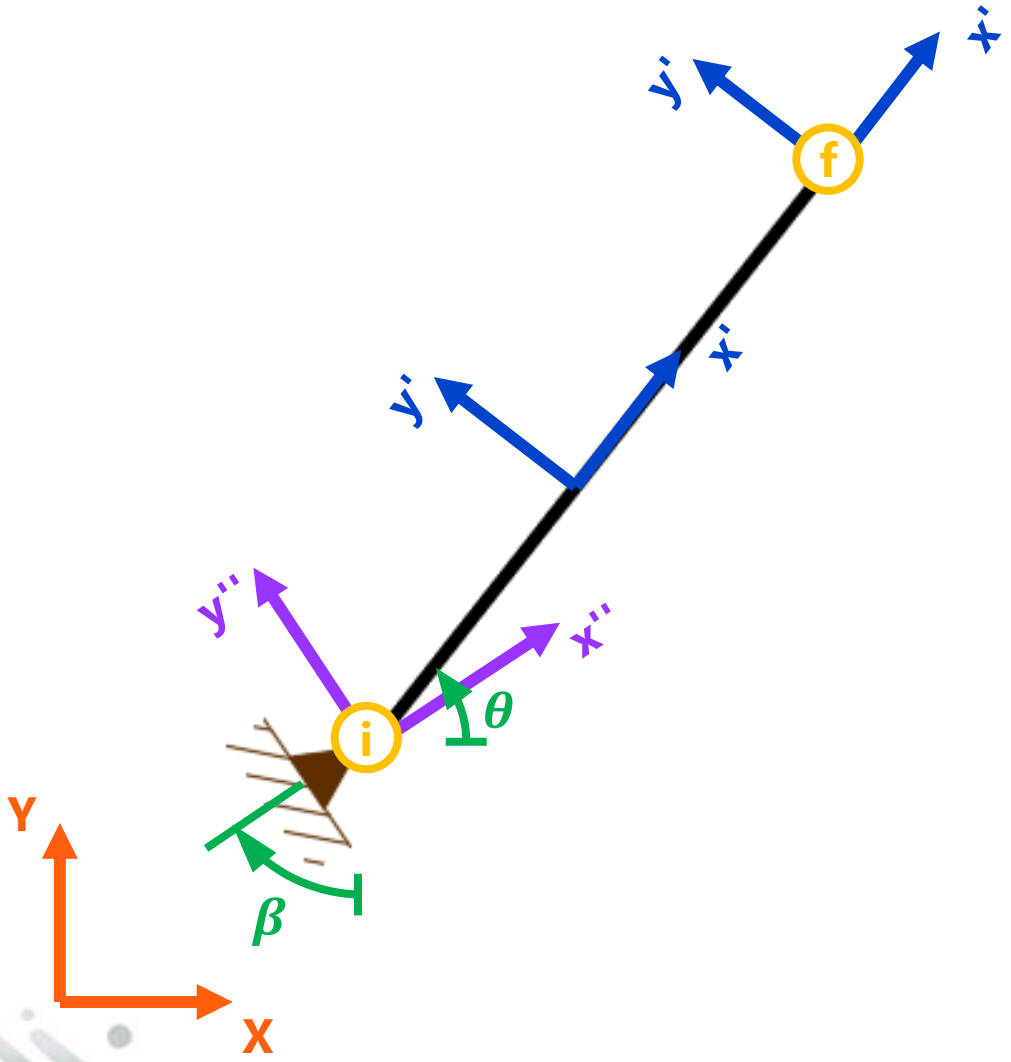
Coordenadas nodales

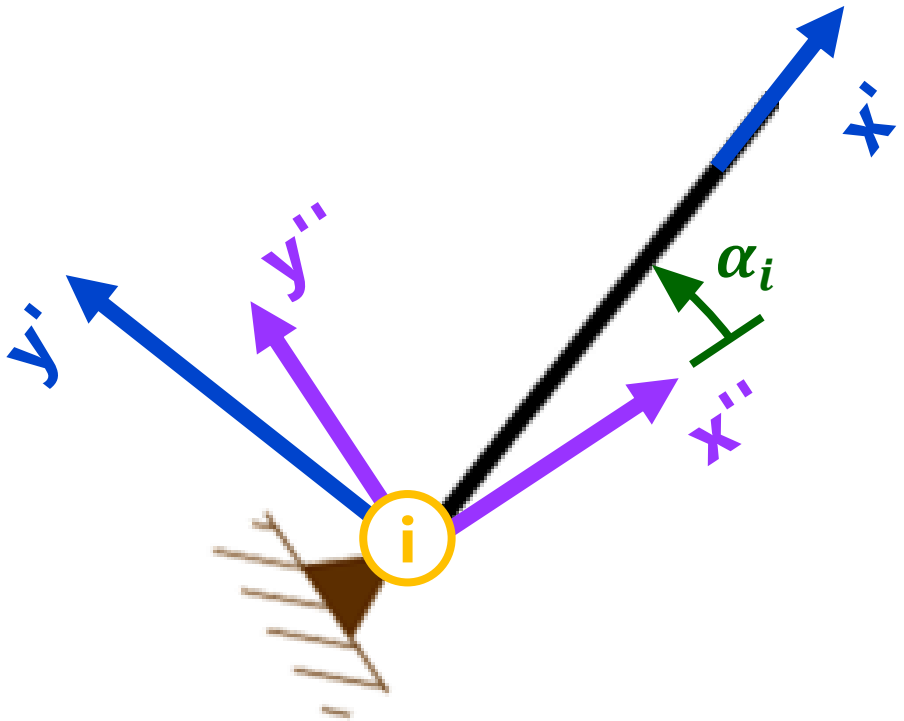


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ÁNGULO DE INCLINACIÓN CON APOYOS INCLINADOS



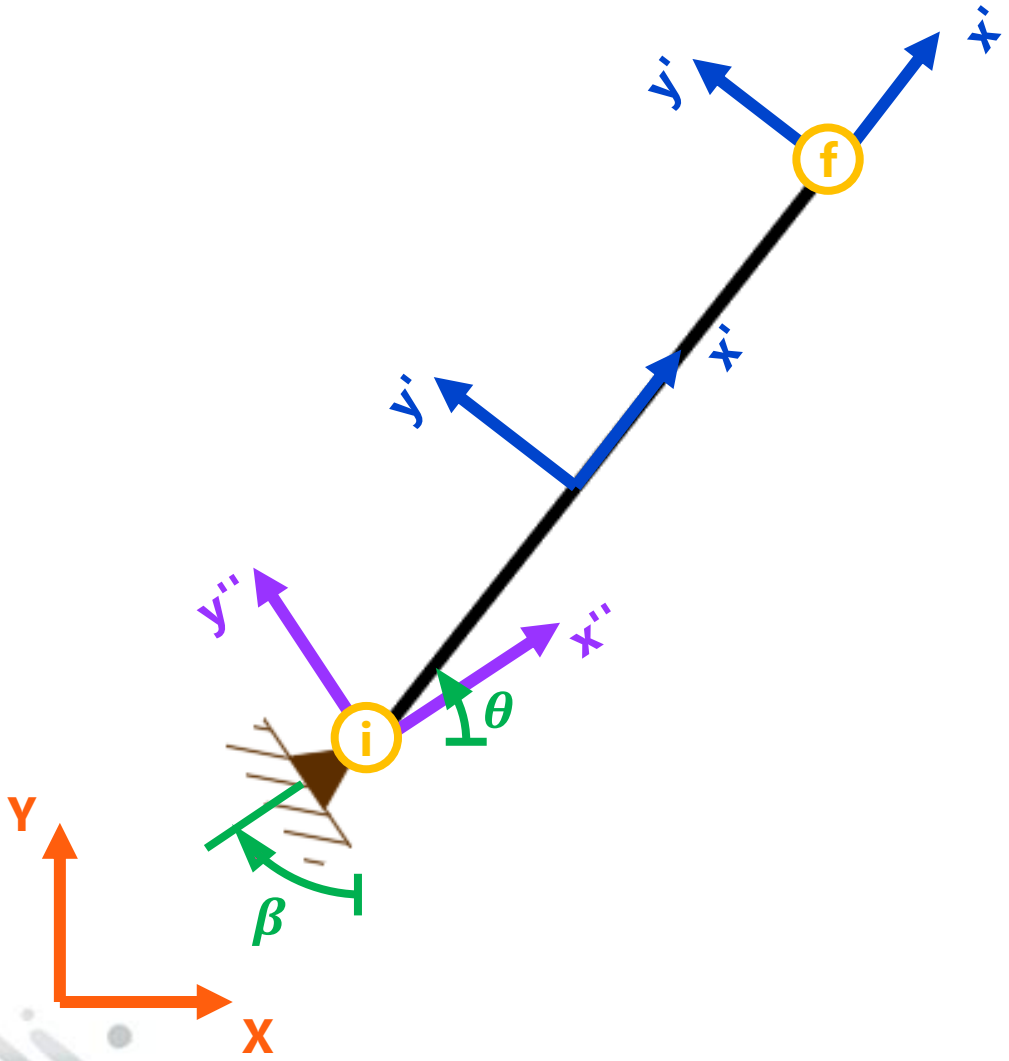


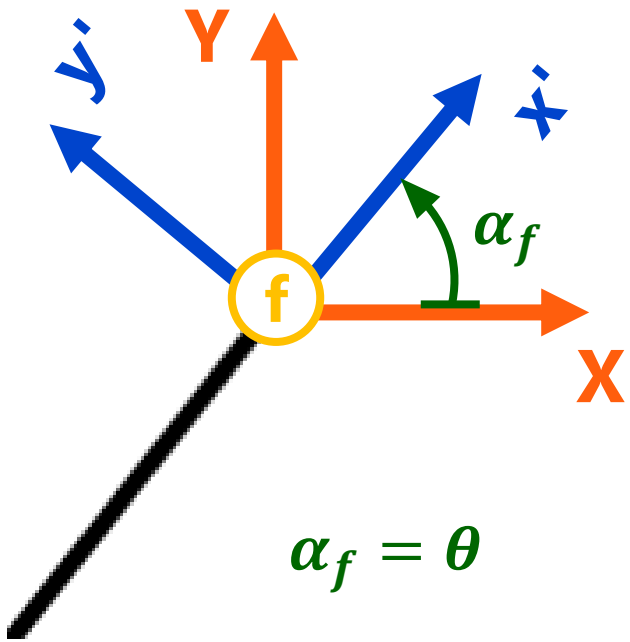
$$\alpha_i = \beta + \theta - 90°$$

Nodo **con** apoyo inclinado

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ÁNGULO DE INCLINACIÓN CON APOYOS INCLINADOS





$$\alpha_f = \theta$$

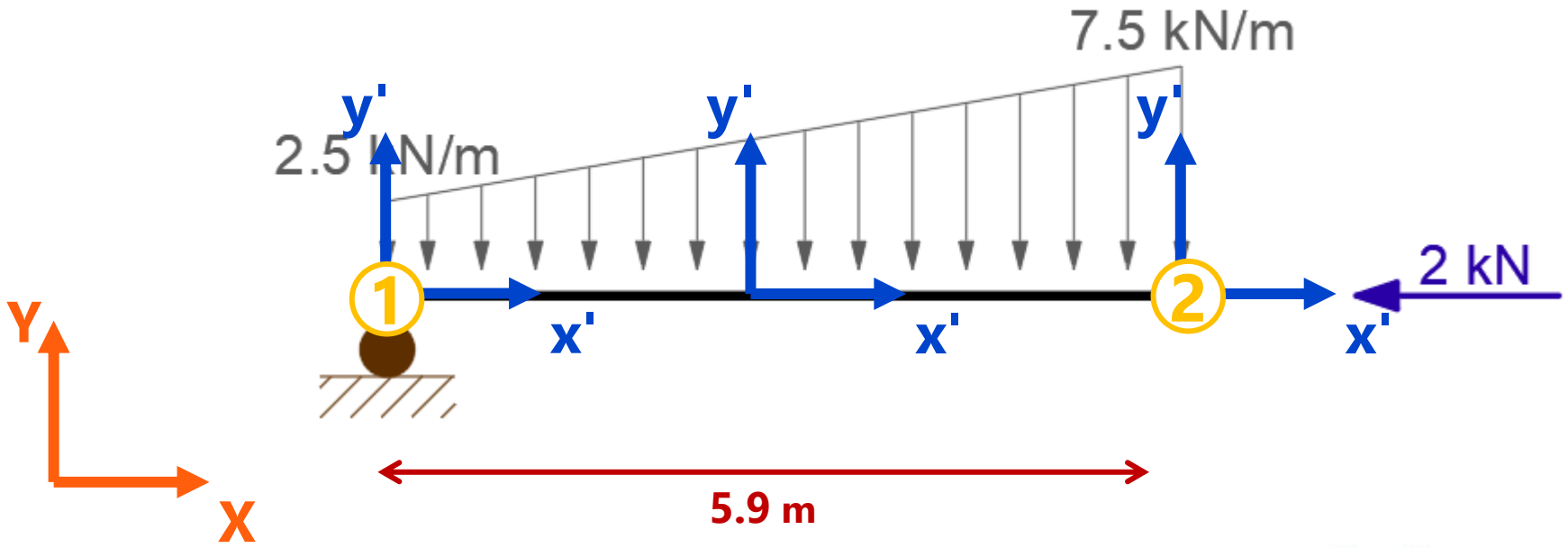
Nodo **sin** apoyo inclinado

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	α_i [°]	α_f [°]
1	1	2	5.9	0	0

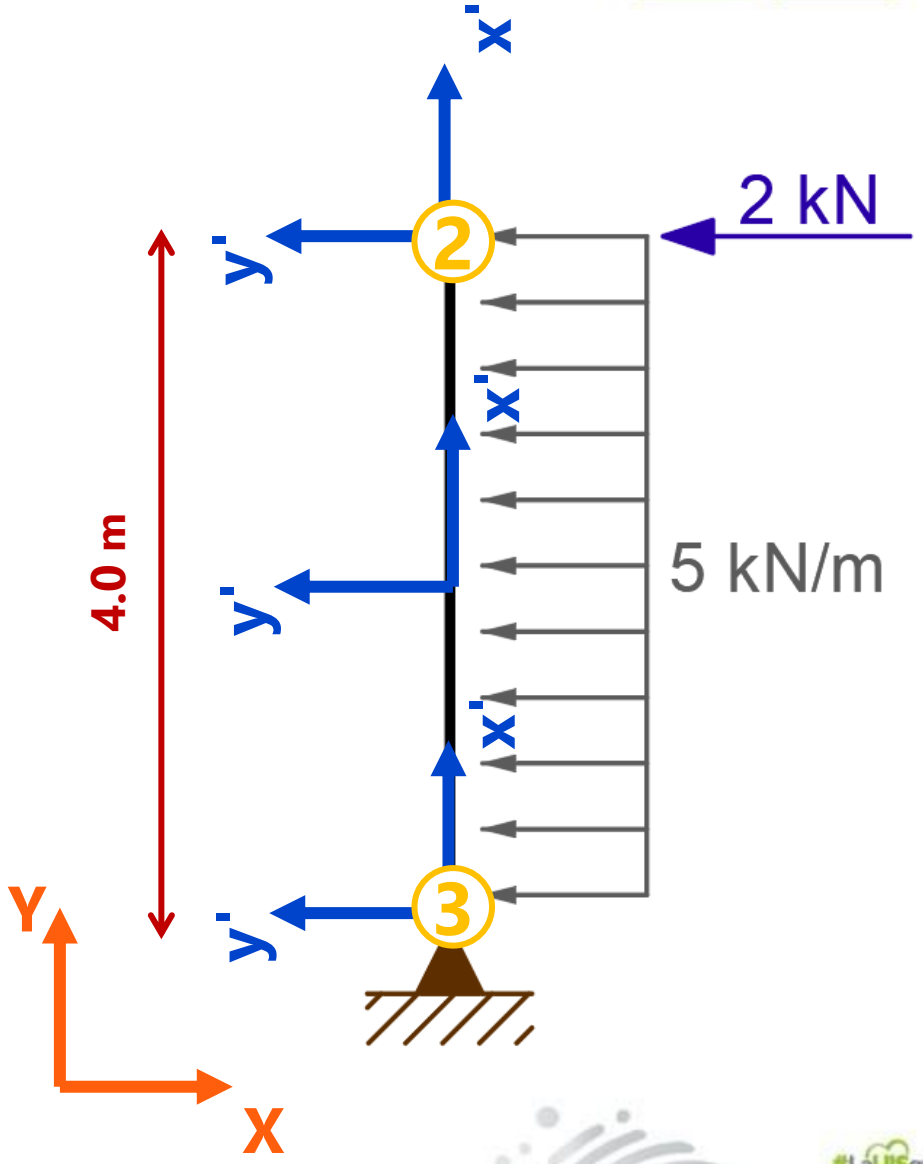


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	α_i [°]	α_f [°]
1	1	2	5.9	0	0
2	3	2	4.0	90	90

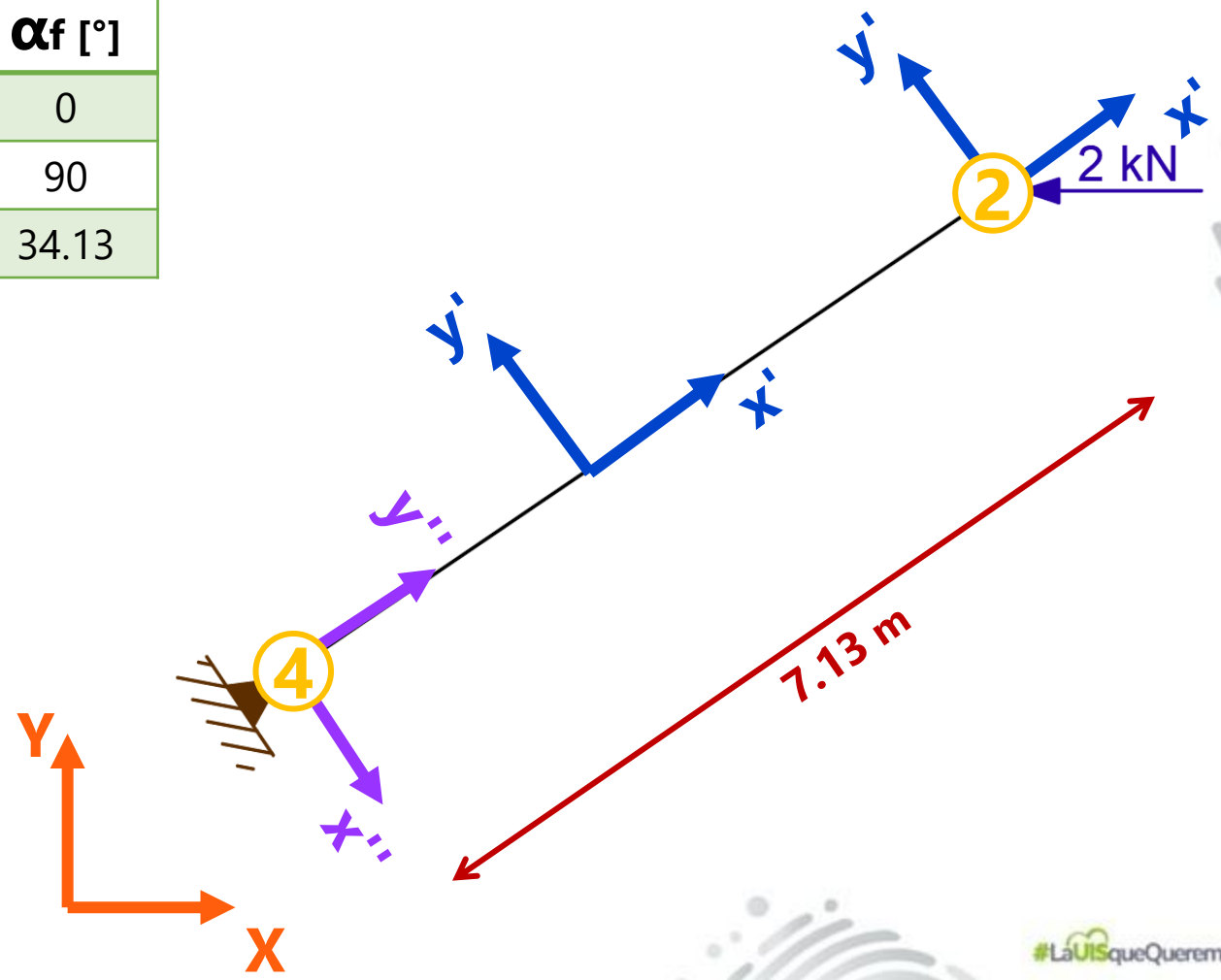


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	αi [°]	αf [°]
1	1	2	5.9	0	0
2	3	2	4.0	90	90
3	4	2	7.13	90	34.13

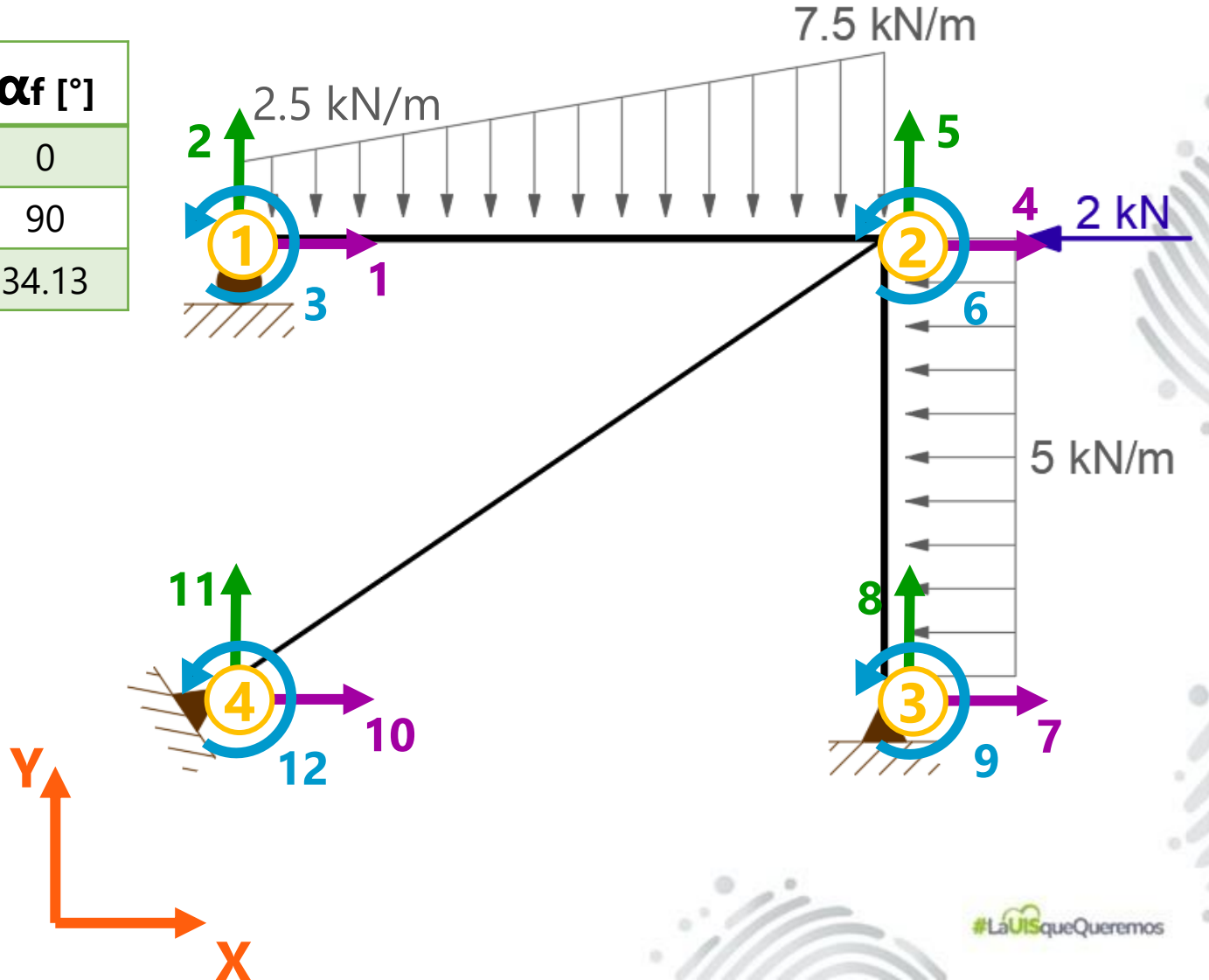


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTOS

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	αi [°]	αf [°]
1	1	2	5.9	0	0
2	3	2	4.0	90	90
3	4	2	7.13	90	34.13



#LaUISqueQueremos

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Matriz de rigidez local:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$[T] = \begin{bmatrix} c_i & s_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_i & c_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_f & s_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_f & c_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

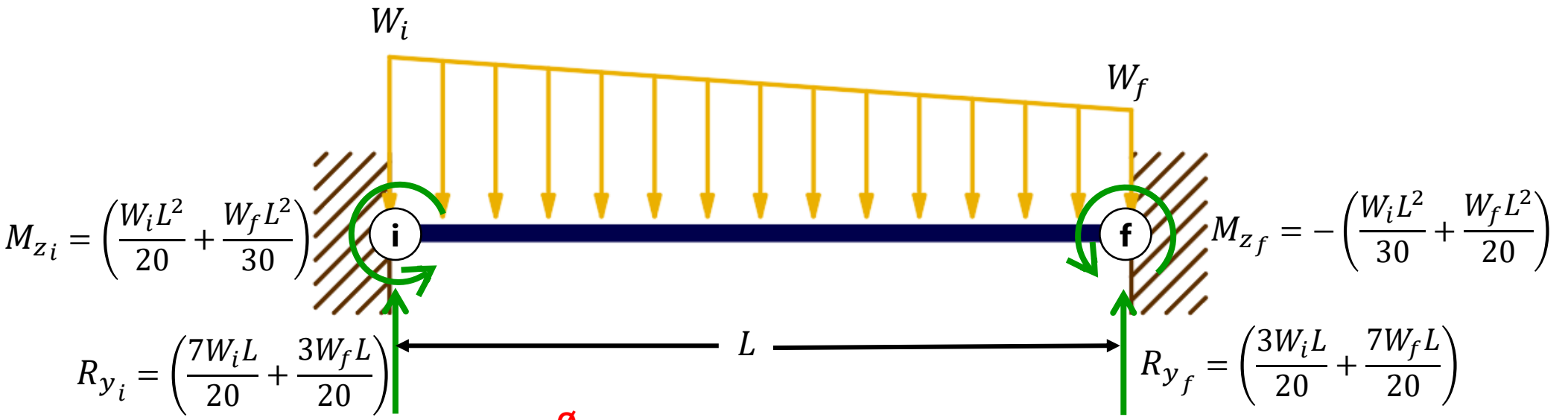
Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_L$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



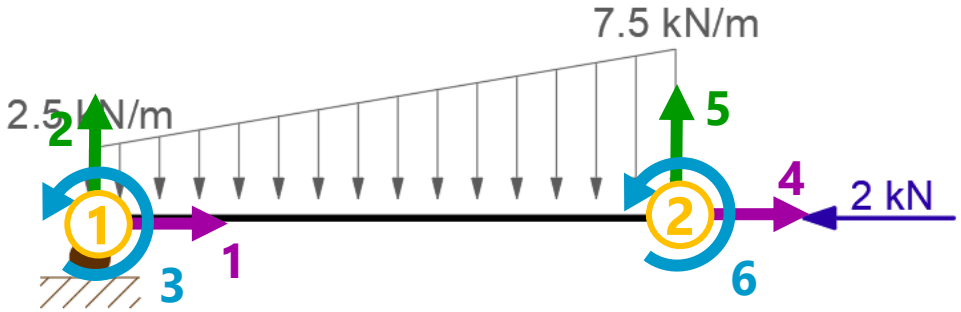
Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} \cancel{R_{x_i}} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ \cancel{R_{x_f}} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix}$ Ø Ø

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

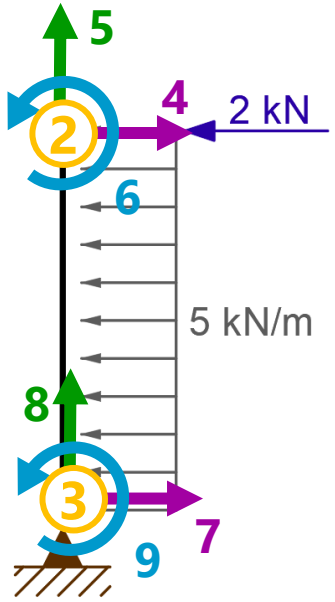
#LaUISqueQueremos

CARGAS SOBRE LOS ELEMENTOS

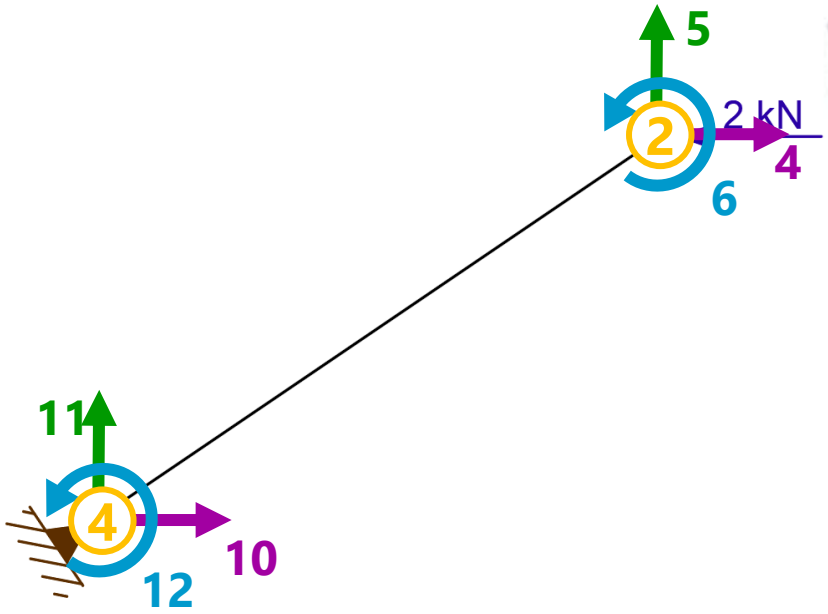
ELEMENTO	TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (kN/m)	Wf (kN/m)
1	Uniforme	Local y	-2.5	-7.5
2	Uniforme	Local y	5.0	5.0
3	-	-	-	-



ELEMENTO 1



ELEMENTO 2

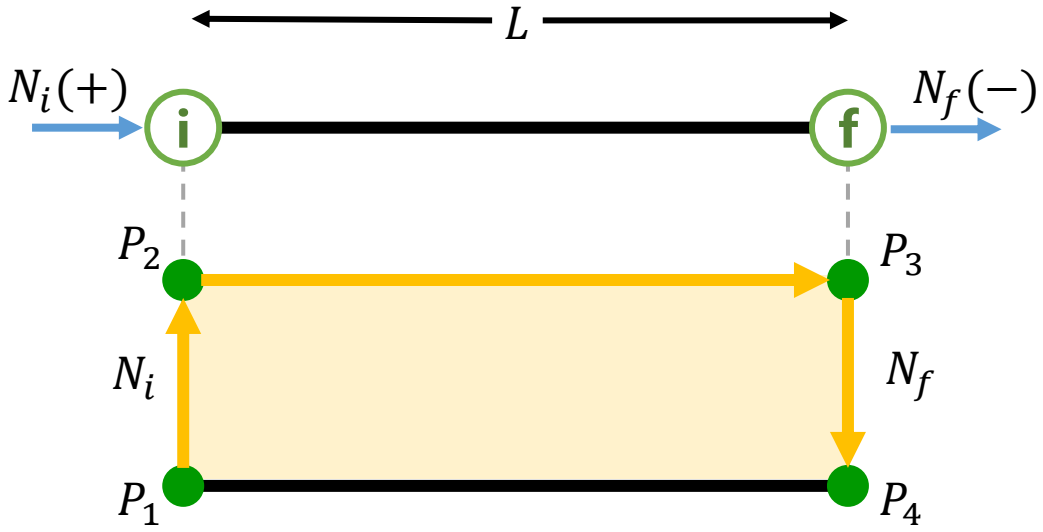


ELEMENTO 3

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA AXIAL (N)
SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



Coord. Nodo inicial: (x_i, y_i) Coord. Nodo final: (x_f, y_f)

Vector director: $\vec{u} = (e_x, e_y)$ Vector normal: $\vec{n} = (n_x, ny)$

Coordenadas Punto 1: $P_1 = (x_i, y_i)$

Coordenadas Punto 2: $P_2 = P_1 + N_i \cdot \vec{n}$

Coordenadas Punto 3: $P_3 = P_2 + L \cdot \vec{u}$

Coordenadas Punto 4: $P_4 = P_3 + N_f \cdot \vec{n}$

- El diagrama se dibuja **perpendicular** al elemento para que sean visualmente distinguibles.
- El elemento NO tiene cargas axiales aplicadas a lo largo de su eje, por lo tanto el diagrama es CONSTANTE.
- Se cumple: |Ni| = |Nf| (mismo valor y distinto signo)

Forma: Prisma recto
Ecuación: Constante
Puntos de control: P_1, P_2, P_3, P_4

Convención de signos:
Nf > 0 → Tracción (el elemento se estira)
Nf < 0 → Compresión (el elemento se acorta)

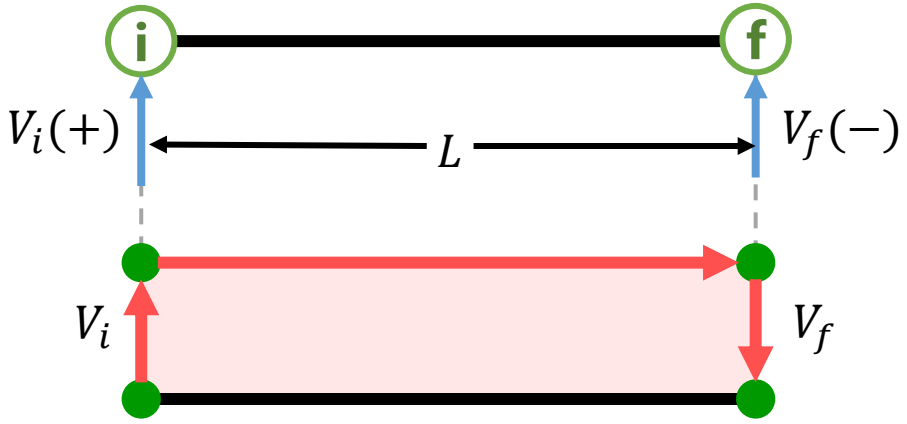
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

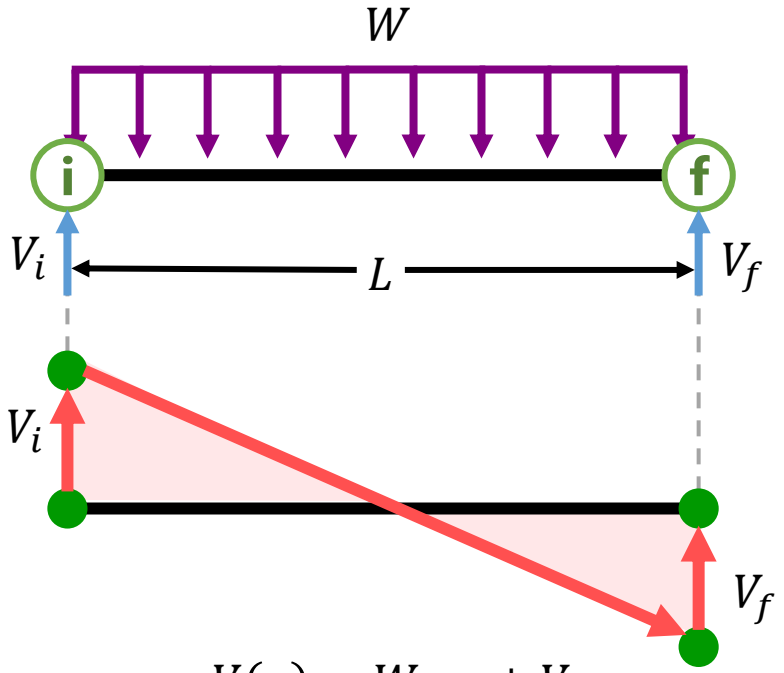
CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$V(x) = V_i$$

Se cumple: |Vi| = |Vf| (mismo valor y distinto signo)

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



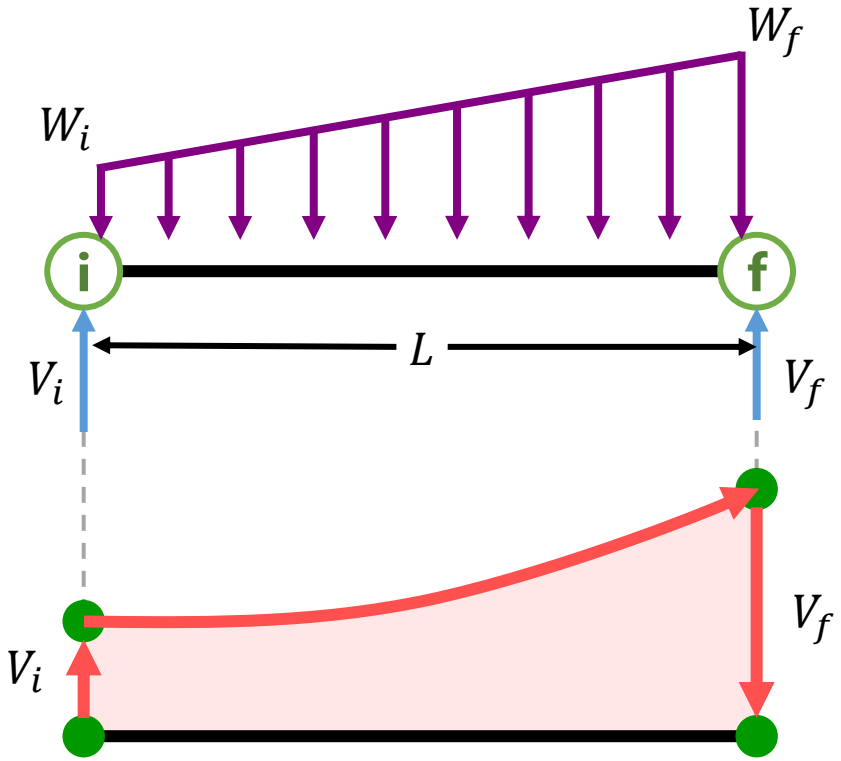
$$V(x) = W \cdot x + V_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

CASO III: CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

$$V(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^2}{2} + W_i \cdot x + V_i$$

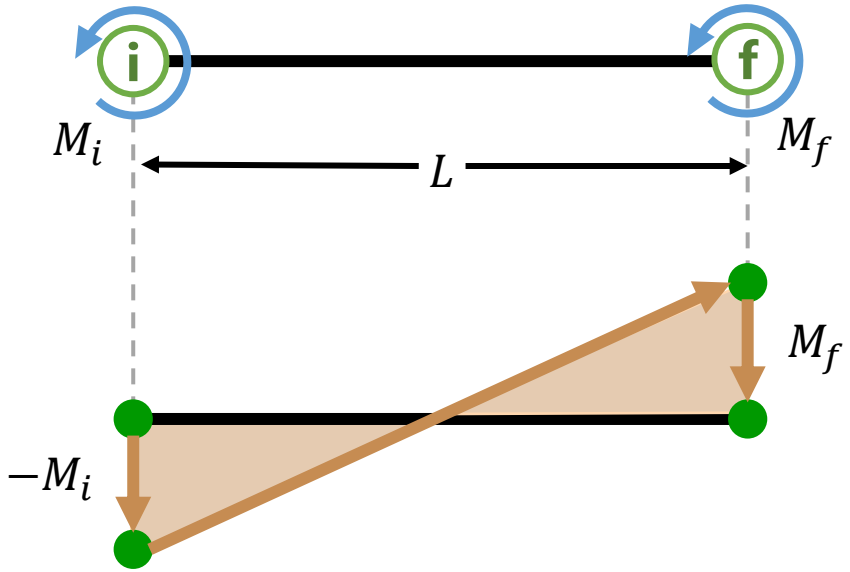
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

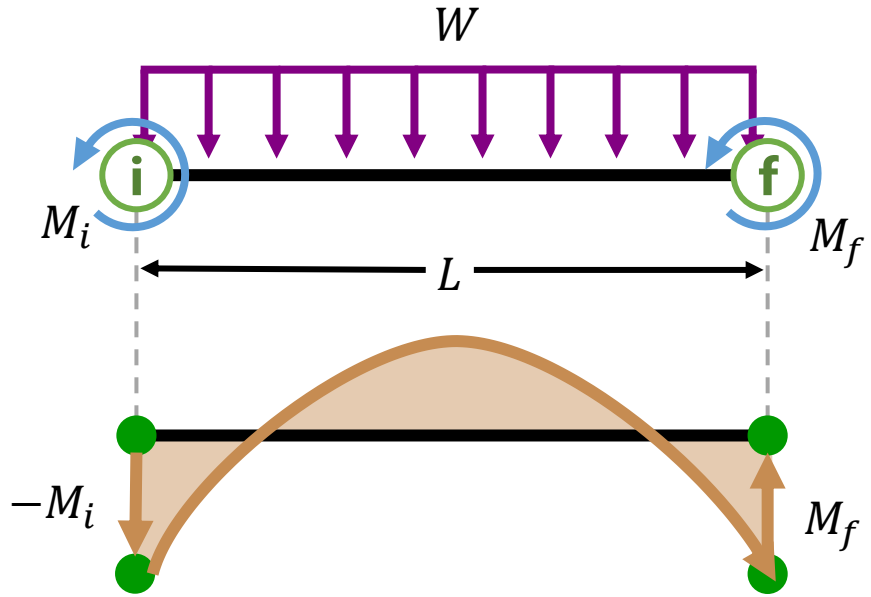
Ecuación: $M(x) = \int V(x)\,dx - M_i$

CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$M(x) = V_i \cdot x - M_i$$

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



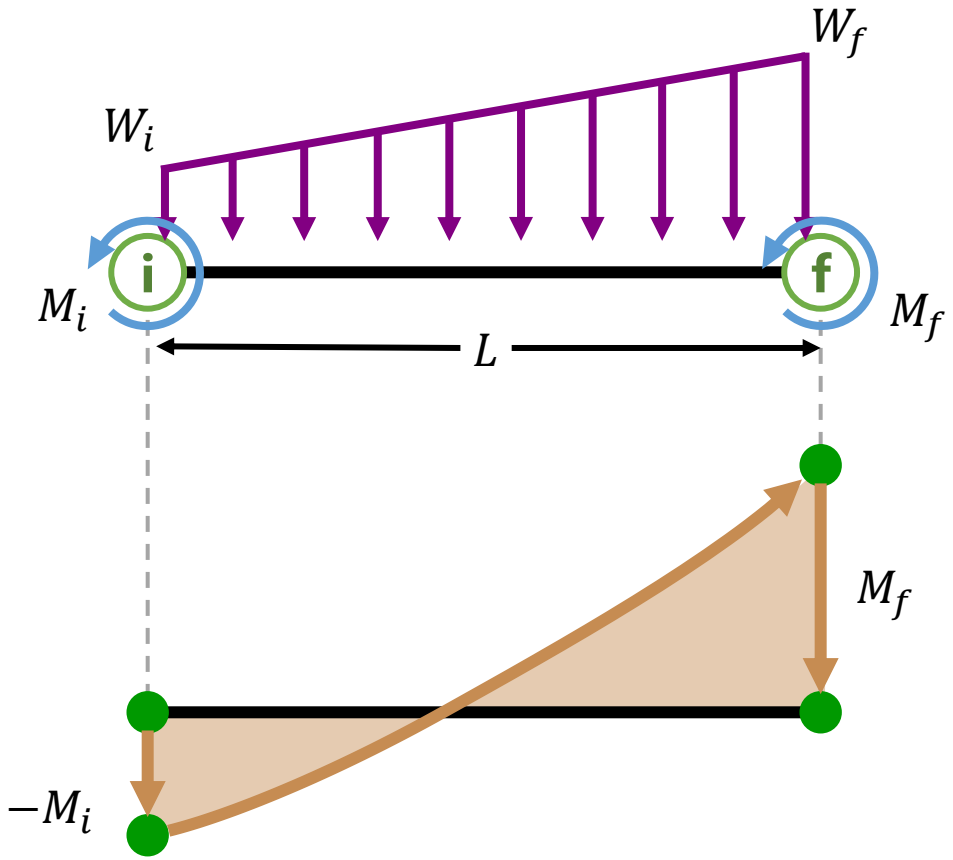
$$M(x) = \frac{W}{2}x^2 + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

CASO III: CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

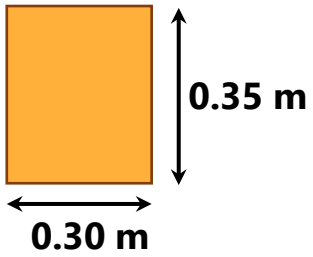
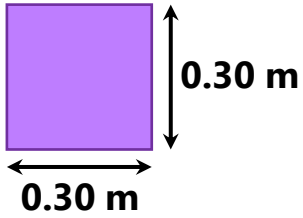
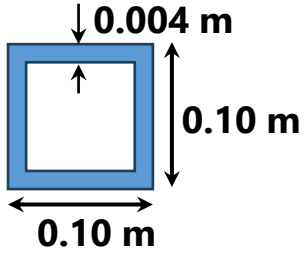
$$M(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^3}{6} + W_i\frac{x^2}{2} + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

Módulo de elasticidad del concreto: $E_c = 24870062.32\ {}^{kN}/_{m^2}$

Módulo de elasticidad del acero: $E_s = 2 \times 10^8\ {}^{kN}/_{m^2}$

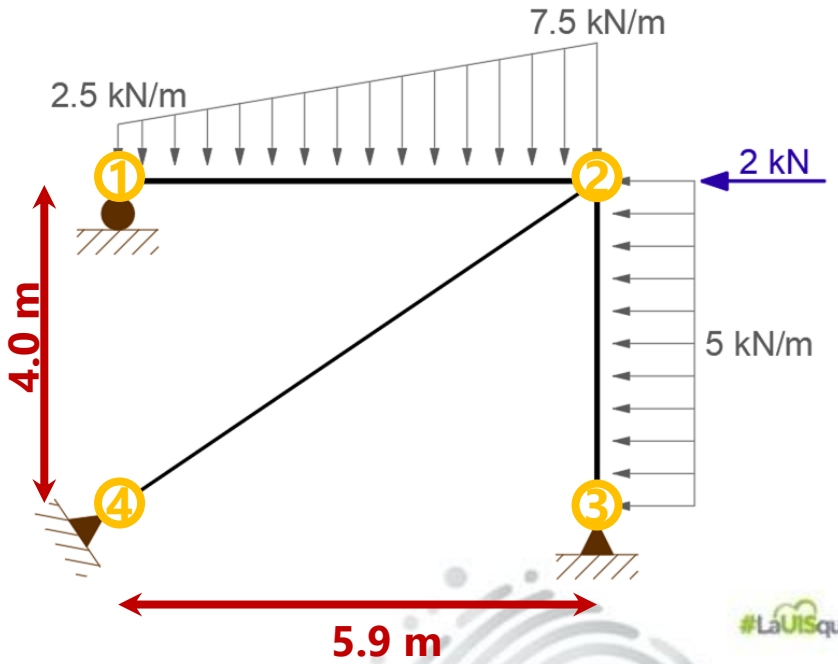
Elemento	Viga	Columna	Barra
			
Área transversal (m^2)	$b \cdot h$	$b \cdot h$	$4e(L-e)$
Momento de inercia (m^4)	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

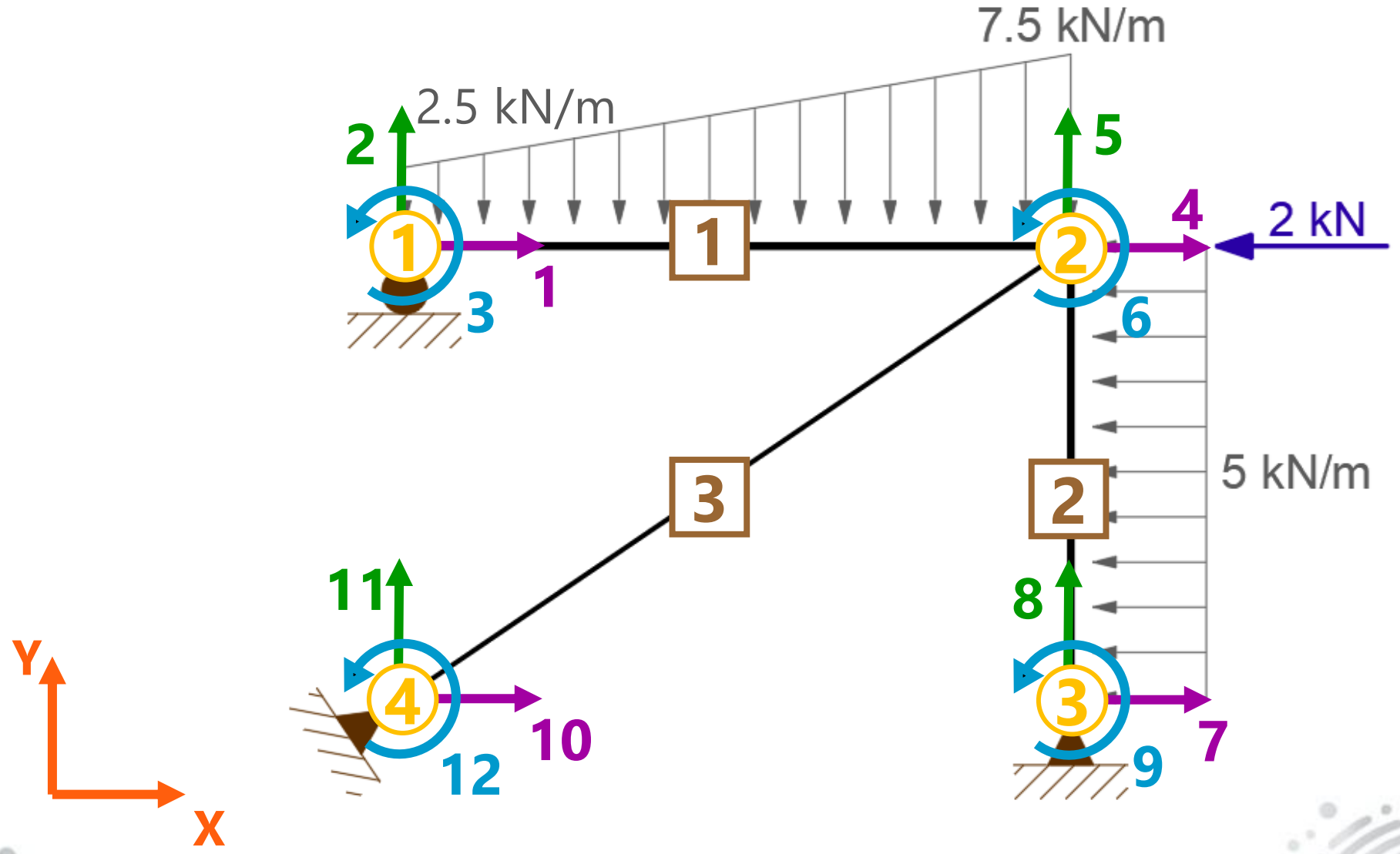
ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	α_i [°]	α_f [°]	TIPO
1	1	2	5.9	0	0	Viga
2	3	2	4.0	90	90	Columna
3	4	2	7.13	90	34.13	Barra

NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	4.0
2	5.9	4.0
3	5.9	0.0
4	0.0	0.0



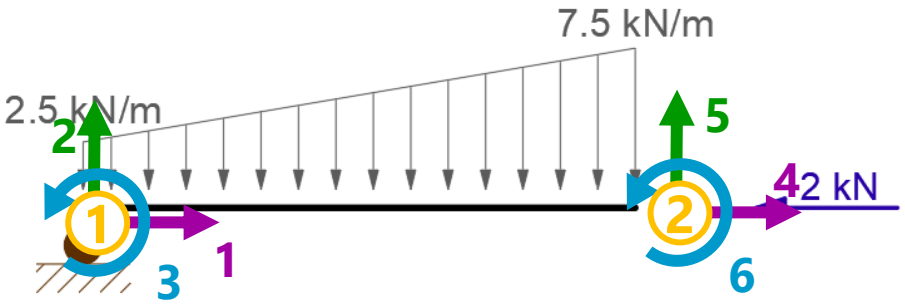
#LaUISqueQueremos

GRADOS DE LIBERTAD

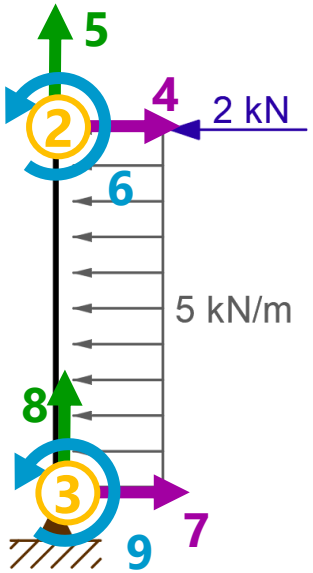


CARGAS SOBRE LOS ELEMENTOS

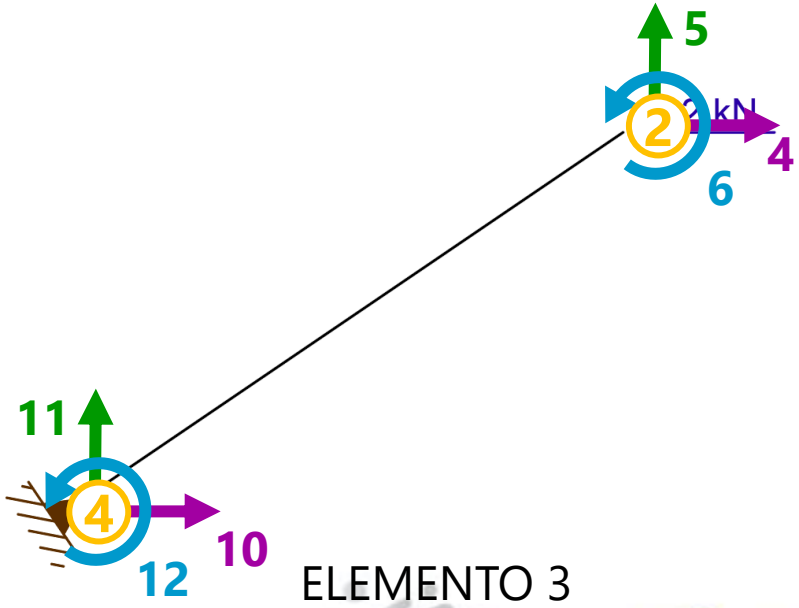
ELEMENTO	TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (kN/m)	Wf (kN/m)
1	Uniforme	Local y	-2.5	-7.5
2	Uniforme	Local y	5.0	5.0
3	-	-	-	-



ELEMENTO 1



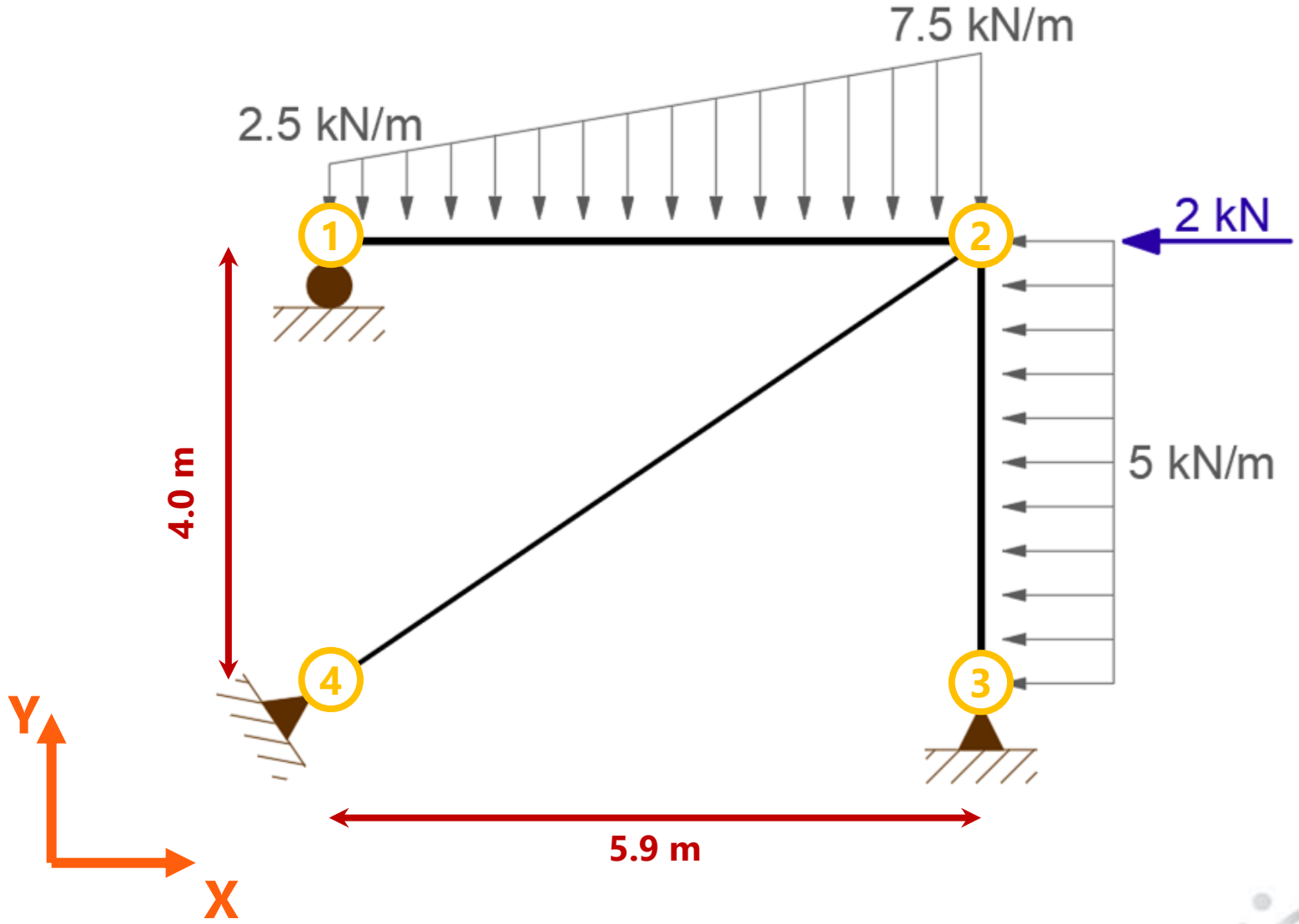
ELEMENTO 2



ELEMENTO 3

#LaUISqueQueremos

GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



ENSAMBLE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Matriz de rigidez local:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

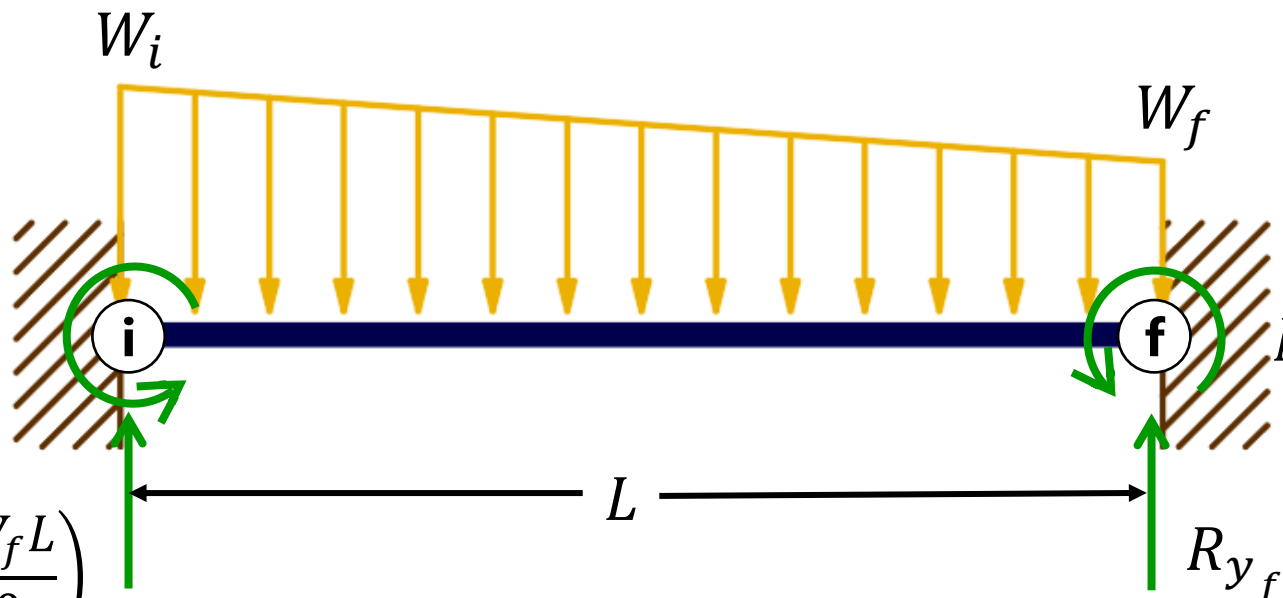
$$[T] = \begin{bmatrix} c_i & s_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_i & c_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_f & s_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_f & c_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

#LaUISqueQueremos

VECTOR FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO



$$M_{z_i} = \left(\frac{W_i L^2}{20} + \frac{W_f L^2}{30}\right)$$

$$M_{z_f} = -\left(\frac{W_i L^2}{30} + \frac{W_f L^2}{20}\right)$$

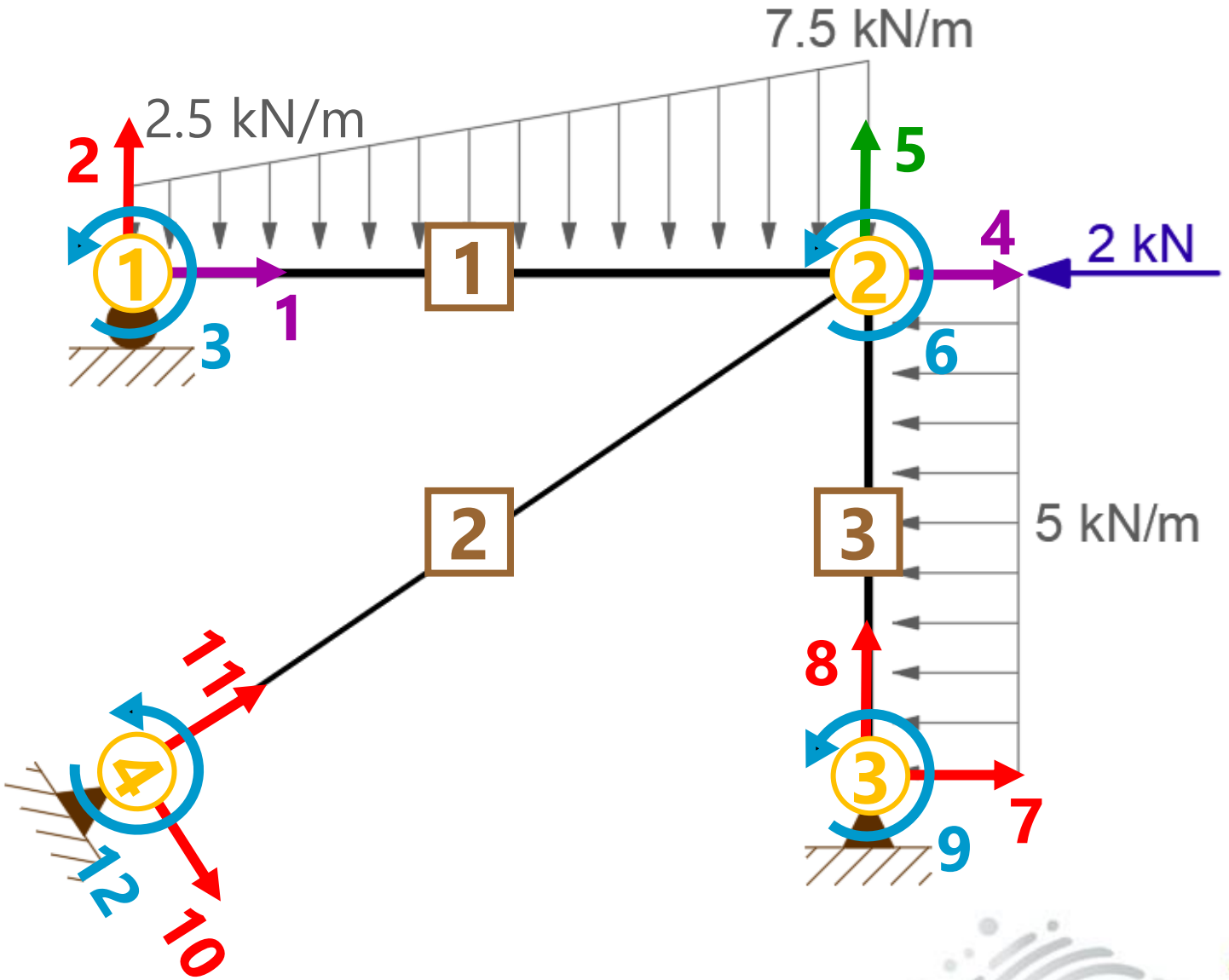
$$R_{y_i} = \left(\frac{7W_i L}{20} + \frac{3W_f L}{20}\right)$$

$$R_{y_f} = \left(\frac{3W_i L}{20} + \frac{7W_f L}{20}\right)$$

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

CONDICIONES DE CONTORNO

- Grados de libertad restringidos



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Desplazamientos: $\{U\}_G = (\{F_{ext}\}_G - \{F^{FEM}\}_G) * [K]_G^{-1}$

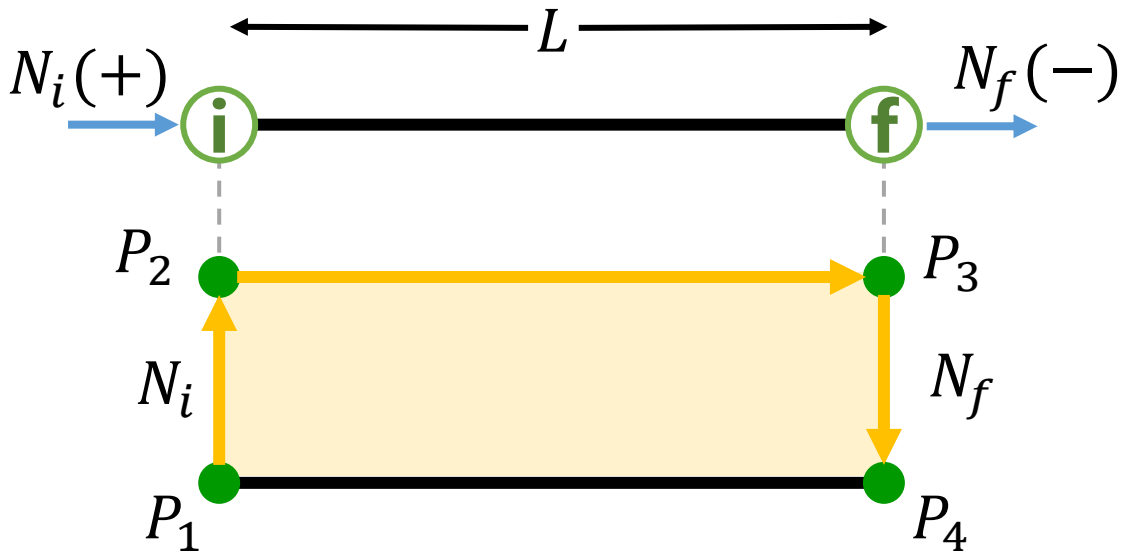
Reacciones: $\{R\} = [k]_G\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_G$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_L$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

Fuerza axial:



P1: $P_1 = (x_i, y_i)$

P2: $P_2 = P_1 + N_i \cdot \vec{n}$

P3: $P_3 = P_2 + L \cdot \vec{u}$

P4: $P_4 = P_3 + N_f \cdot \vec{n}$

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

Fuerza cortante: $V(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^2}{2} + W_i \cdot x + V_i$

Momento flector: $M(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^3}{6} + W_i\frac{x^2}{2} + V_i \cdot x - M_i$

Si NO hay cargas distribuidas: Wi = Wf = 0 (La ecuación se simplifica)

Si hay cargas uniformes: Wi = Wf

Si hay cargas lineales: Wi ≠ Wf

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 1

REACCIONES

Nodo 1: Ry = 9.73 kN
Nodo 3: Rx = 6.22 kN, Ry = 9.07 kN
Nodo 4: Rx = -0.00 kN, Ry = 19.07 kN

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	-5.236e-04	0.000e+00	-9.959e-04
2	-5.236e-04	-1.621e-05	5.390e-04
3	0.000e+00	0.000e+00	3.240e-04
4	0.000e+00	0.000e+00	-2.105e-04

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 1

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N (kN)**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
1	0.000	Nulo	9.726	19.774	-0.000	-15.138
2	-9.073	Compresión	-6.215	-13.785	0.000	15.138
3	-19.070	Compresión	0.000	-0.000	-0.000	0.000

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Sistemas Mixtos
Ejercicio 1
Modelo OpenSees

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

#LaUISqueQueremos

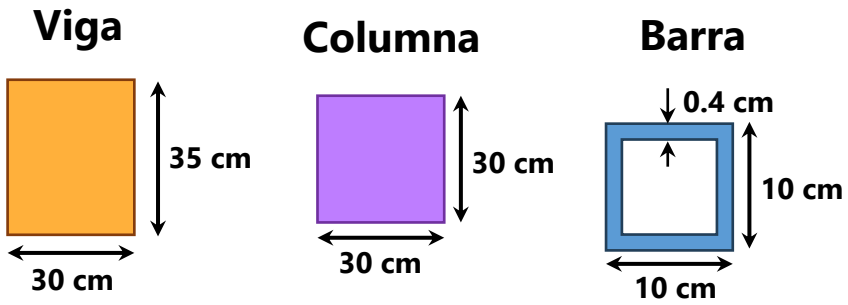
SISTEMAS MIXTOS: EJERCICIO 1

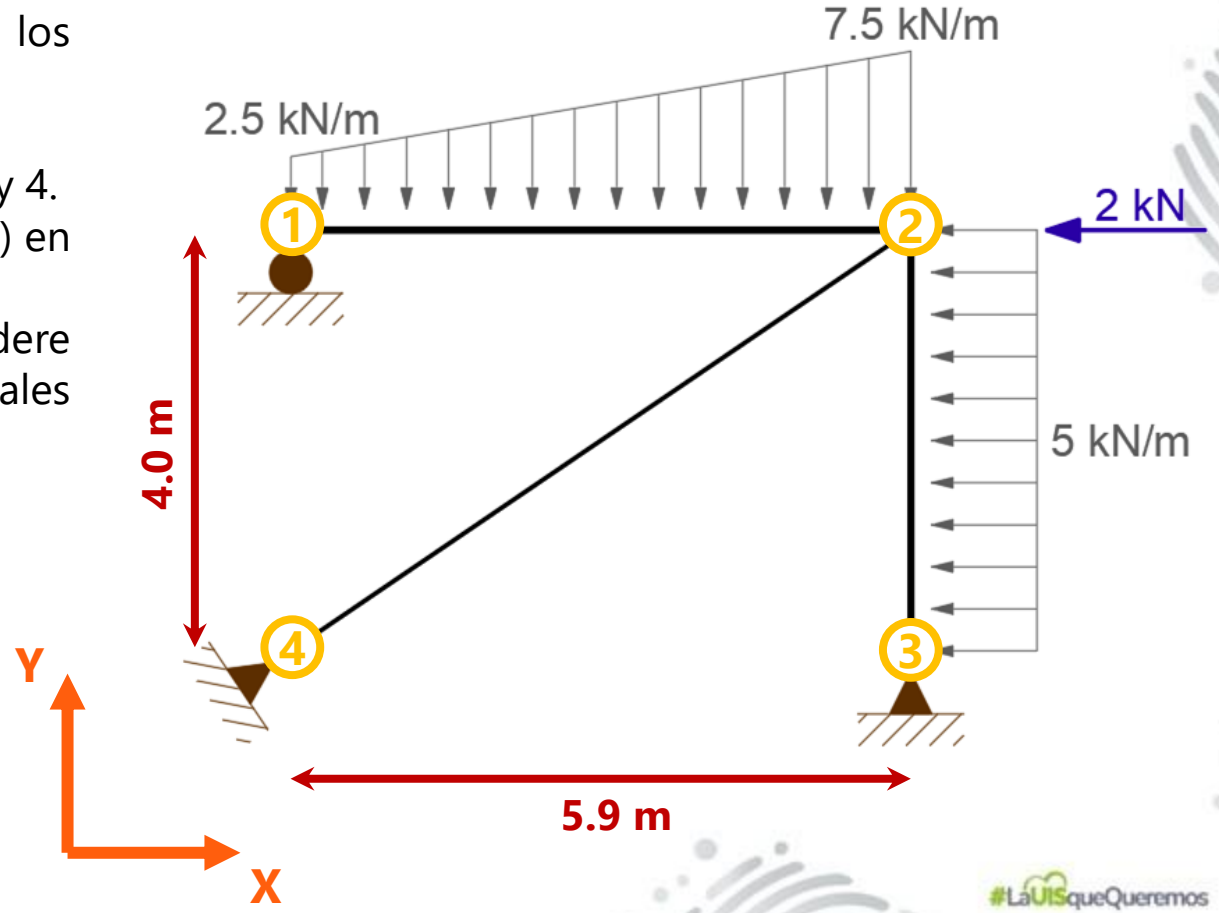
Se tiene el sistema estructural plano mostrado en la figura, conformado por una viga, una columna y una barra diagonal. La viga y la columna son de concreto ($f'c$=28 MPa) y la barra diagonal es de acero (E=200 GPa).El sistema está sometido a una carga distribuida vertical linealmente variable sobre la viga, una carga uniformemente distribuida sobre la columna y una carga puntual horizontal en el nodo 2.

Utilizando el método matricial de rigidez y considerando los ejes globales XY, se solicita:

- Determinar los desplazamientos en el nodo 2.
- Calcular las reacciones en los apoyos de los nodos 1, 3 y 4.
- Obtener las fuerzas internas (axial, cortante y momento) en cada elemento y realizar el diagrama correspondiente.

Desprecie el peso propio de los elementos, considere únicamente las cargas indicadas y las secciones transversales que se indican a continuación:





#LaUISqueQueremos

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

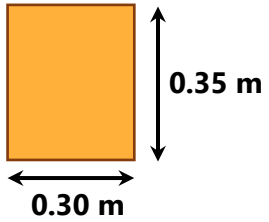
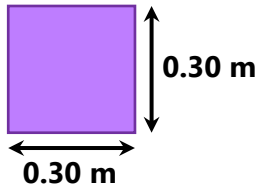
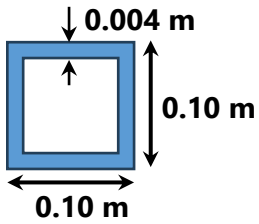
Módulo de elasticidad concreto: $E_c = 4700\sqrt{f'c}\ (MPa)$

Para $f'c = 28\ MPa$: $E_c = 4700\sqrt{28}\ MPa = 24870.06232\ MPa$

$$\boldsymbol{E_c = 24870062.32\ kN/m^2}$$

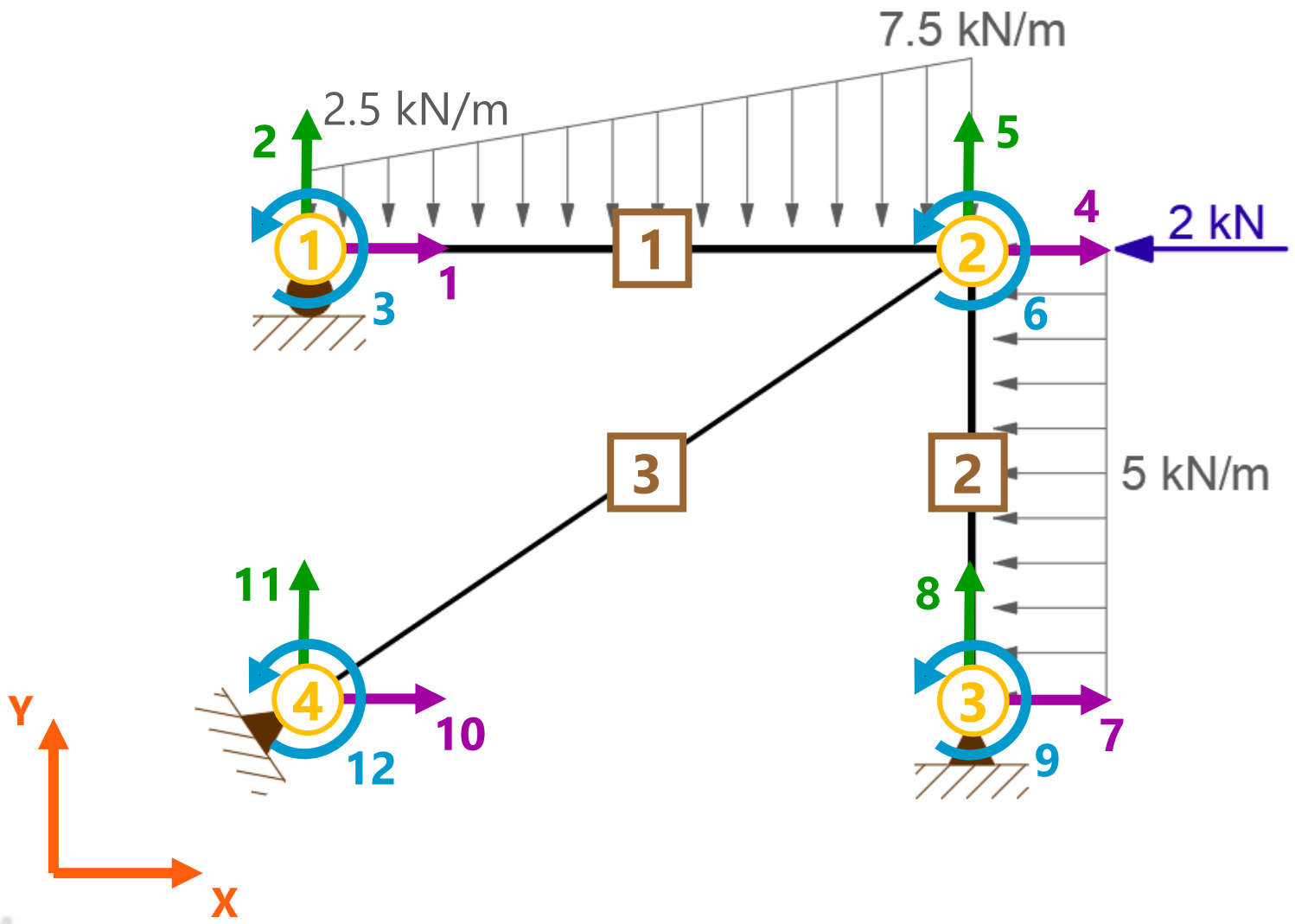
Módulo de elasticidad acero: $E_s = 200GPa$

$$\boldsymbol{E_s = 2 \times 10^8\ kN/m^2}$$

Elemento	Viga	Columna	Barra
			
Área transversal (m^2)	$b \cdot h$	$b \cdot h$	$4e(L-e)$
Momento de inercia (m^4)	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS



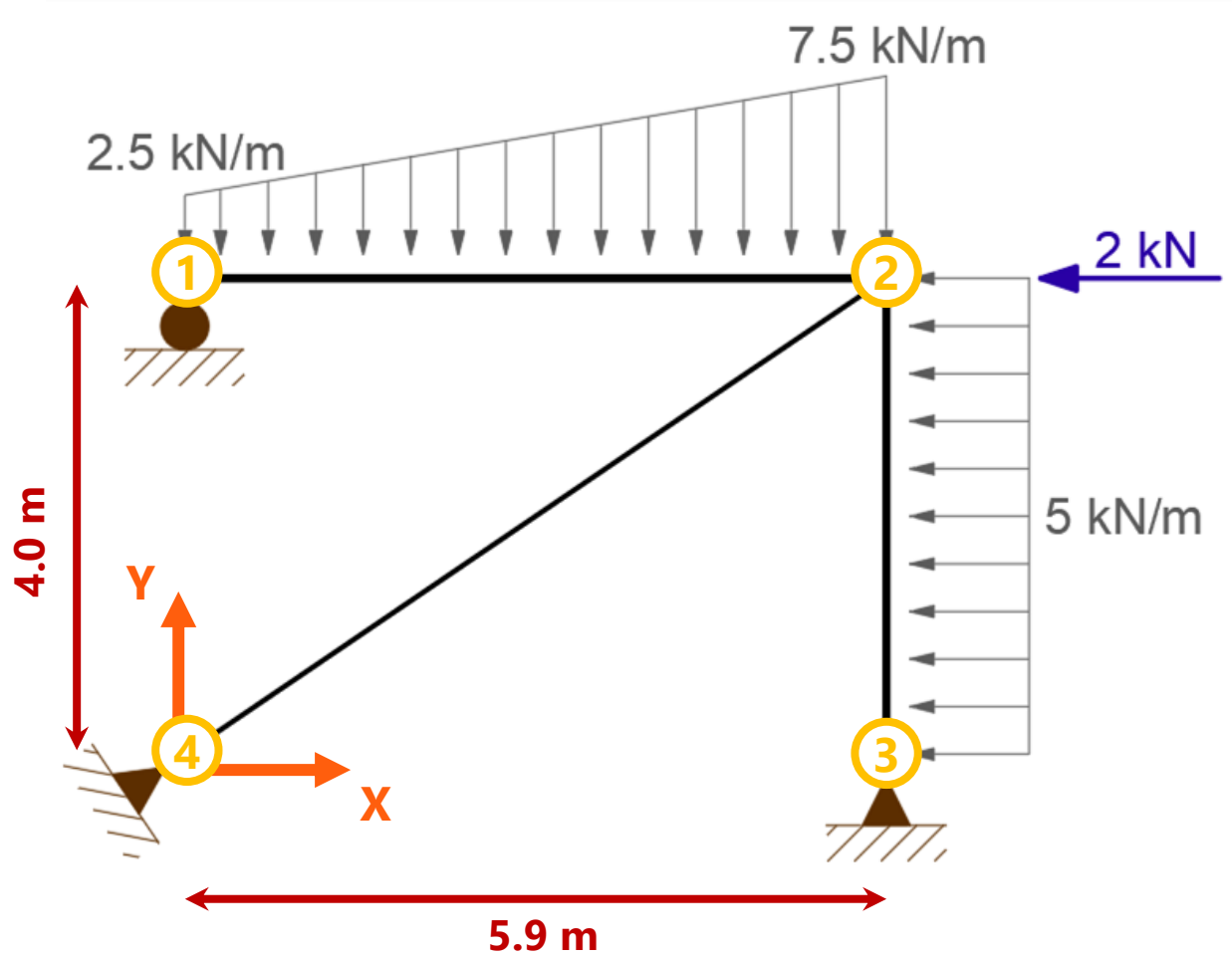
Número de nodos: 4

Número de elementos: 3

Número de grados de libertad: 12

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



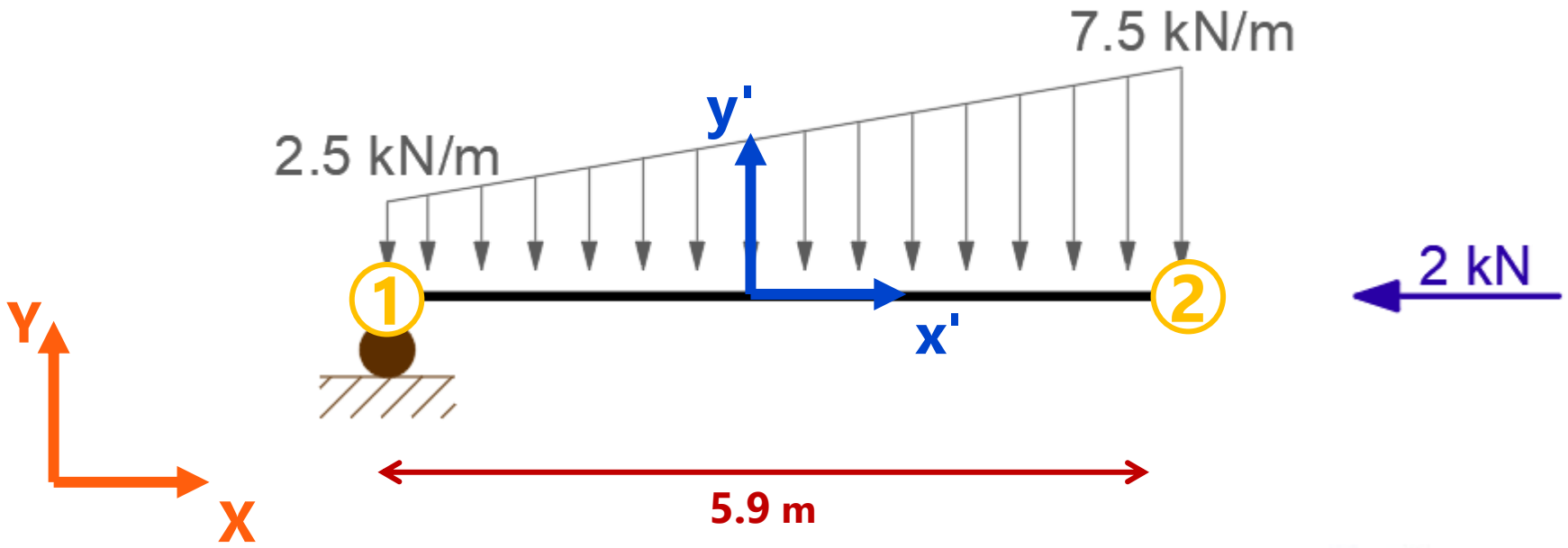
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	4.0
2	5.9	4.0
3	5.9	0.0
4	0.0	0.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]
1	1	2	5.9

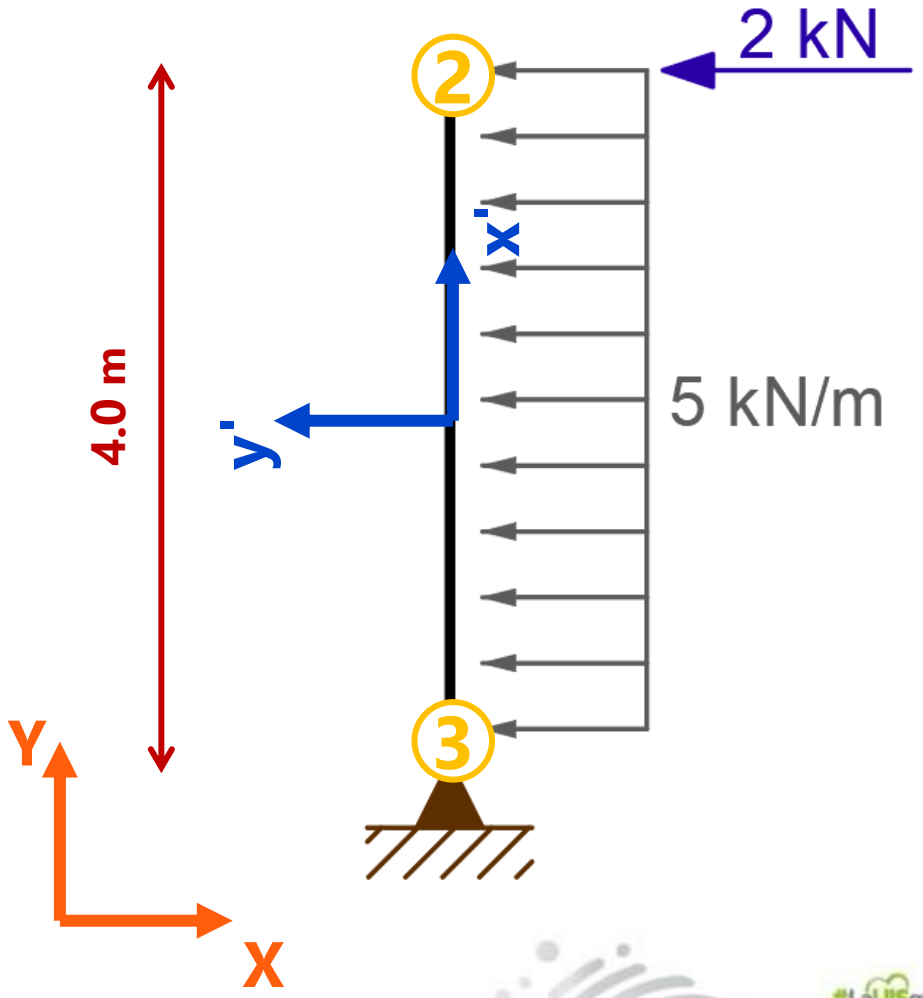


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]
1	1	2	5.9
2	3	2	4.0

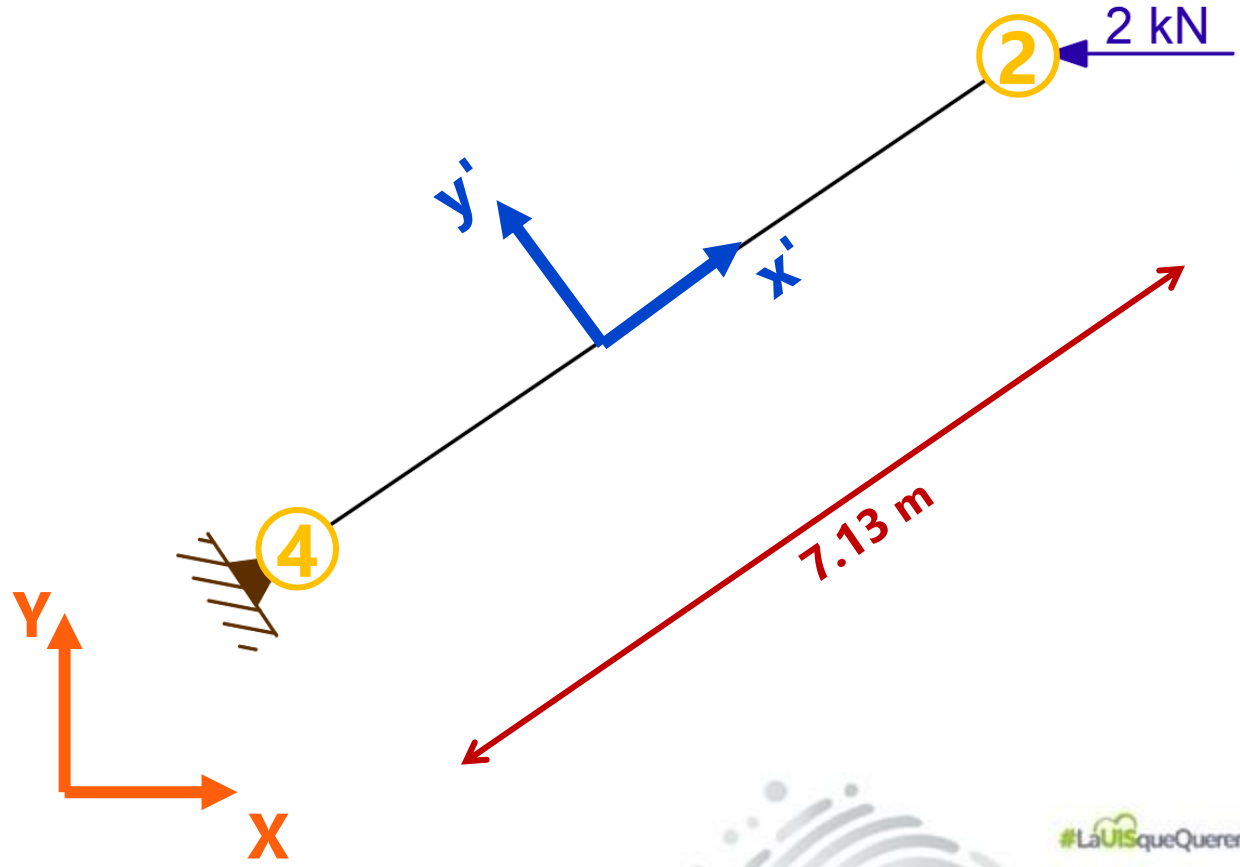


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]
1	1	2	5.9
2	3	2	4.0
3	4	2	7.13

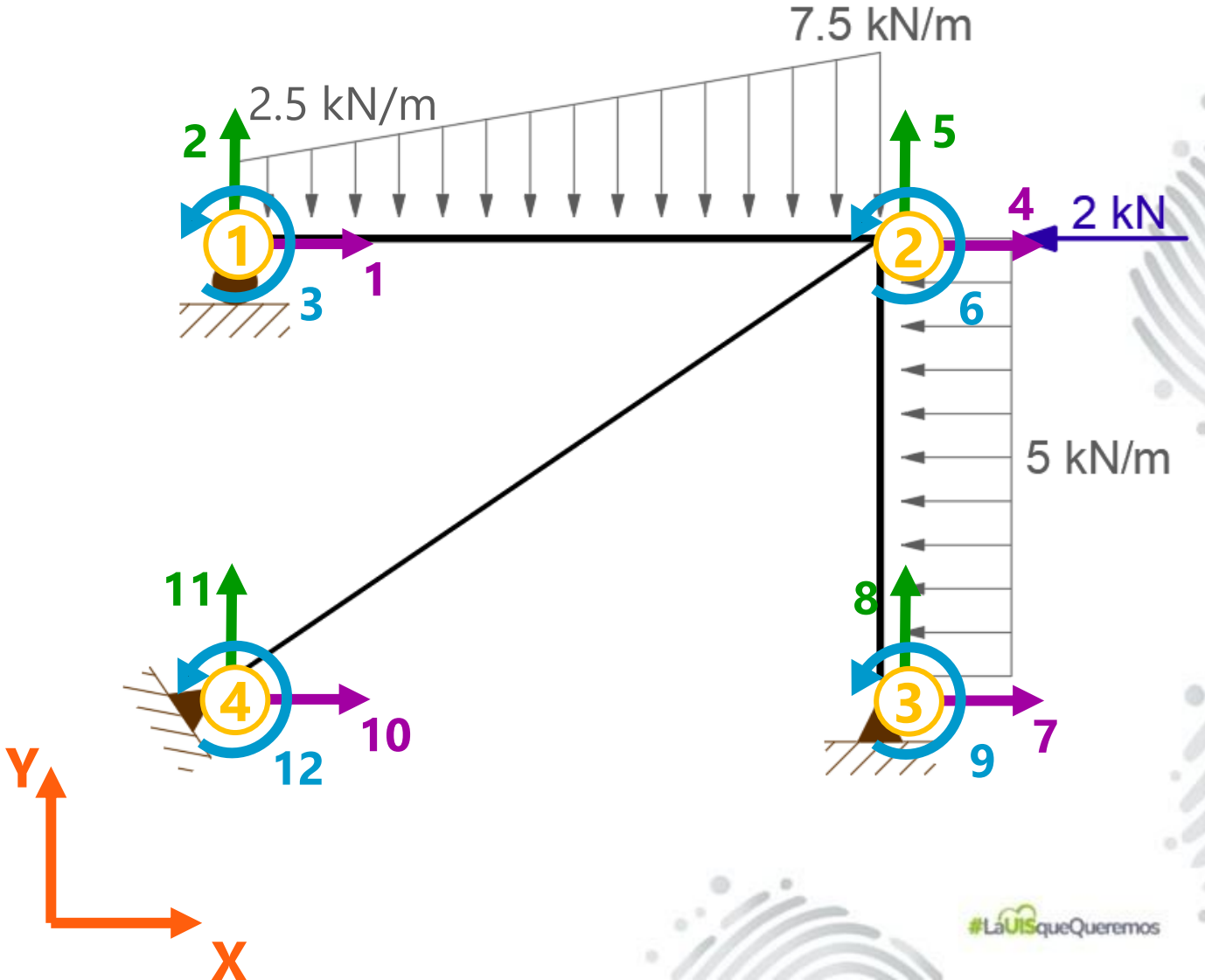


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTOS

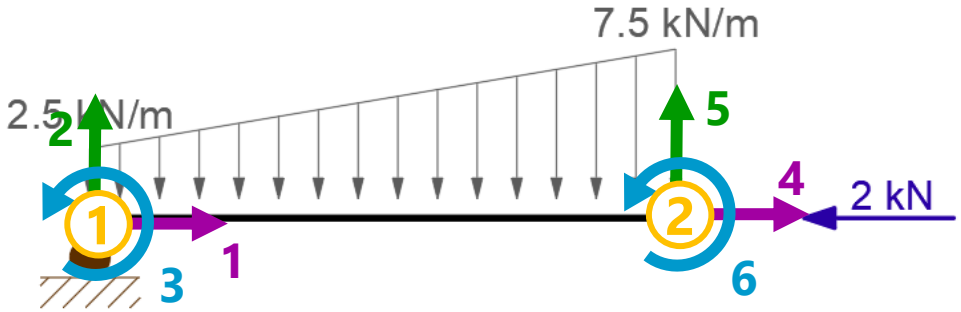
ELEM	NODO i	NODO f	L [m]
1	1	2	5.9
2	3	2	4.0
3	4	2	7.13



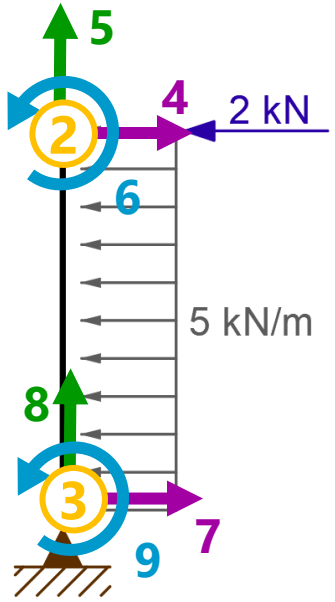
#LaUISqueQueremos

CARGAS SOBRE LOS ELEMENTOS

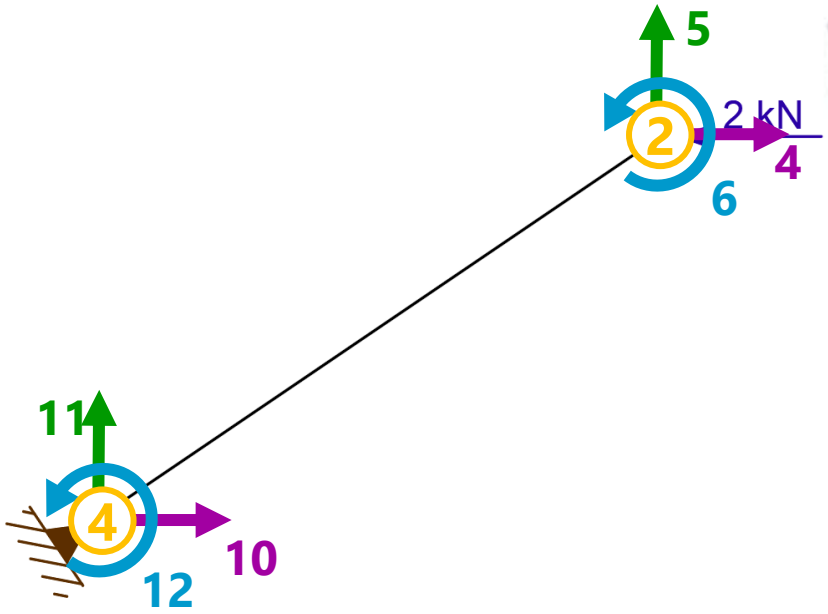
ELEMENTO	TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (kN/m)	Wf (kN/m)
1	Uniforme	Local y	-2.5	-7.5
2	Uniforme	Local y	5.0	5.0
3	-	-	-	-



ELEMENTO 1



ELEMENTO 2



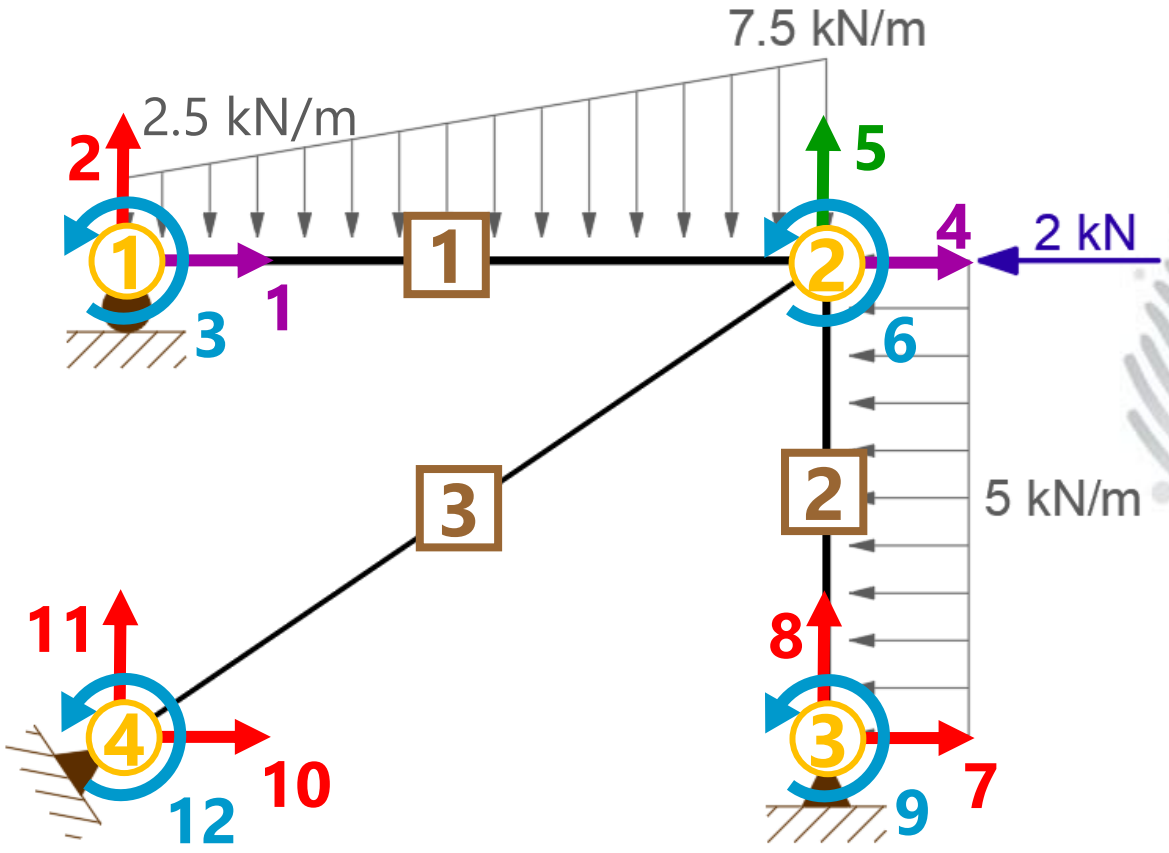
ELEMENTO 3

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	4.0
2	5.9	4.0
3	5.9	0.0
4	0.0	0.0

ELEM	Ni	Nf	TIPO
1	1	2	Viga
2	3	2	Columna
3	4	2	Barra



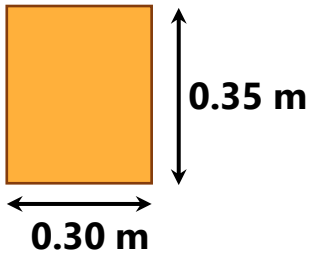
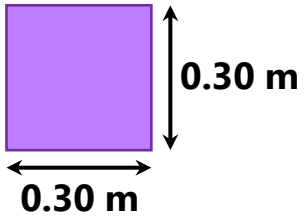
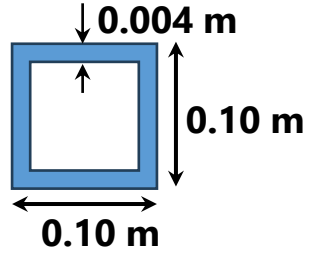
Grados de libertad restringidos

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

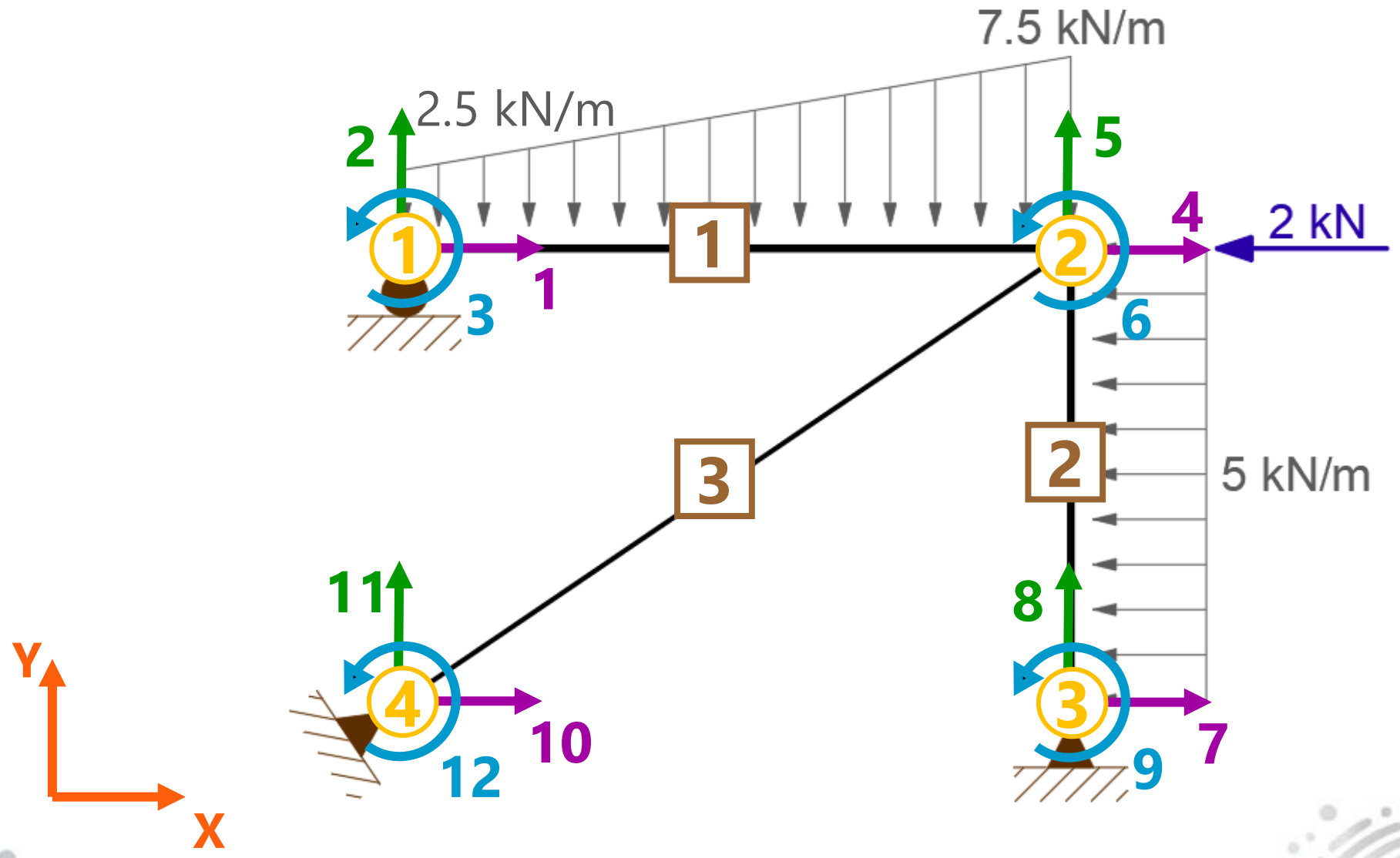
Módulo de elasticidad del concreto: $E_c = 24870062.32\ {}^{kN}/_{m^2}$

Módulo de elasticidad del acero: $E_s = 2 \times 10^8\ {}^{kN}/_{m^2}$

Elemento	Viga	Columna	Barra
			
Área transversal (m^2)	0.105	0.09	$1.536x10^{-3}$
Momento de inercia (m^4)	$1.071875x10^{-3}$	$6.75x10^{-4}$	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

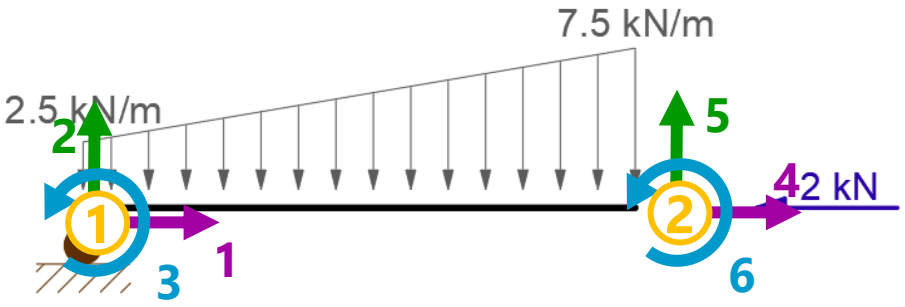
CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS



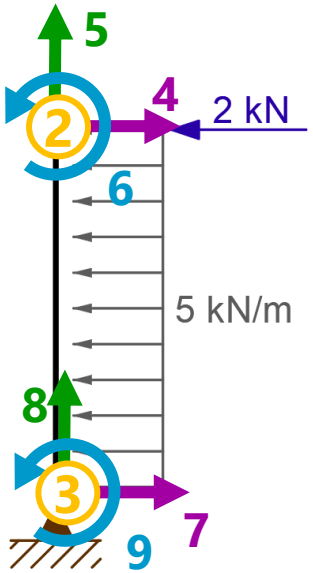
#LaUISqueQueremos

CARGAS SOBRE LOS ELEMENTOS

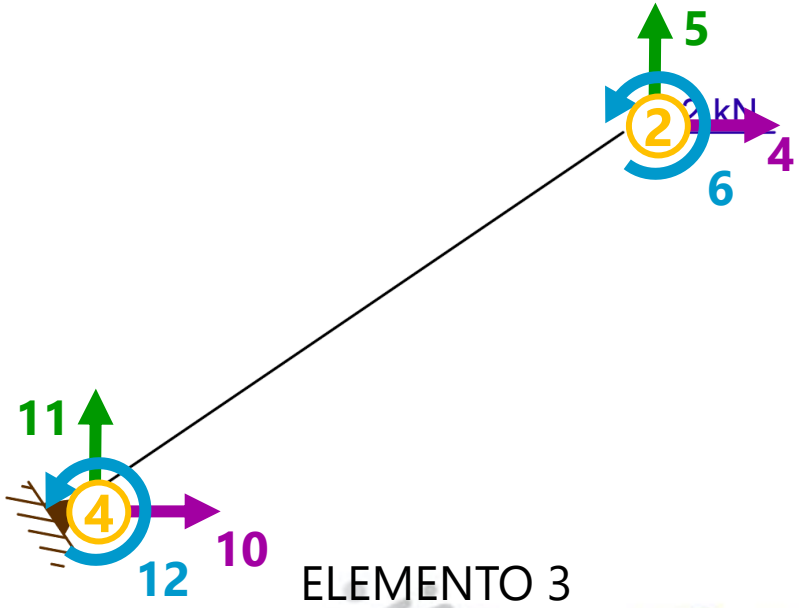
ELEMENTO	TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (kN/m)	Wf (kN/m)
1	Uniforme	Local y	-2.5	-7.5
2	Uniforme	Local y	5.0	5.0
3	-	-	-	-



ELEMENTO 1



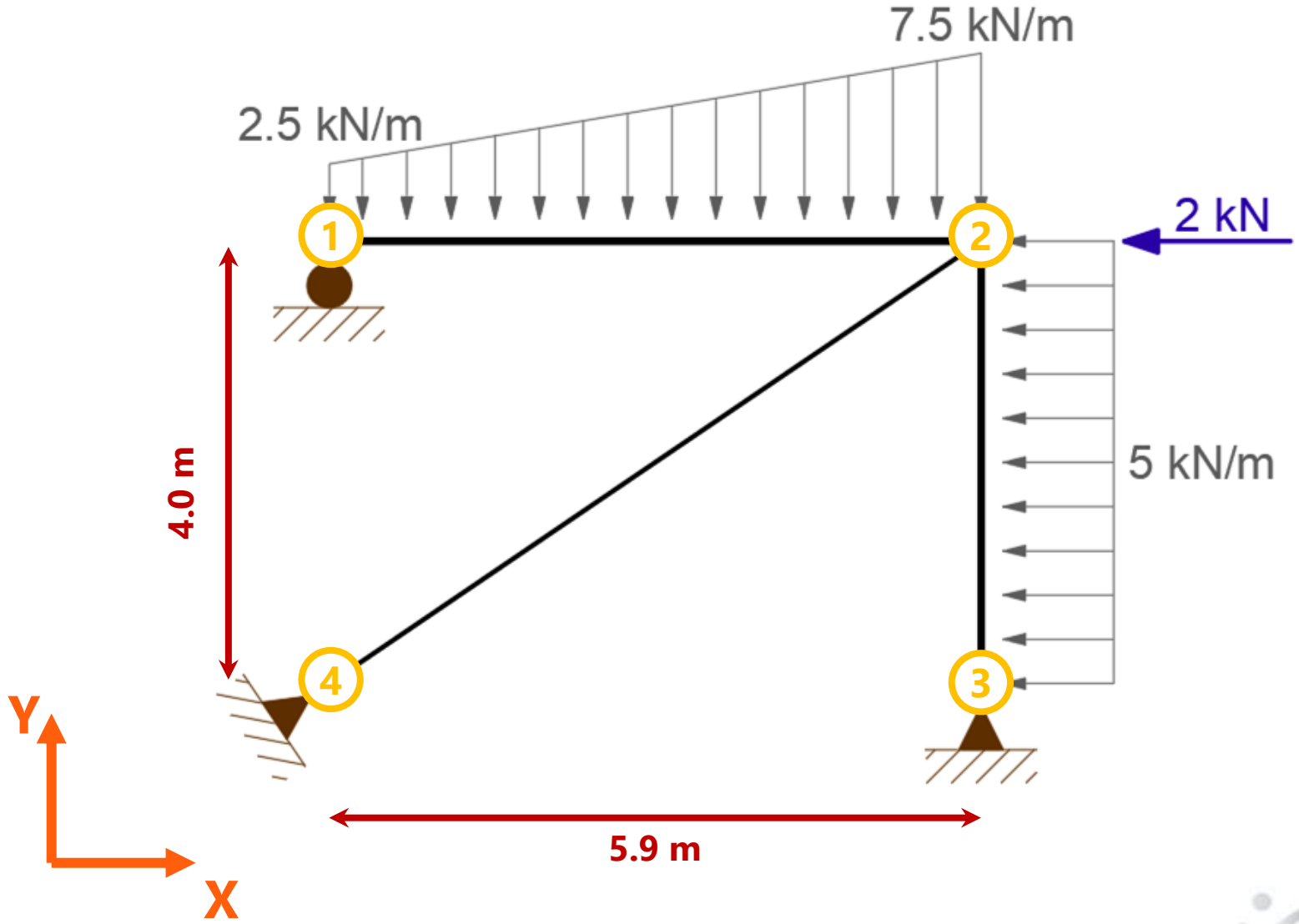
ELEMENTO 2



ELEMENTO 3

#LaUISqueQueremos

GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



SOLUCIÓN: EJERCICIO 1

REACCIONES

Nodo 1: Ry = 9.73 kN
Nodo 3: Rx = 6.22 kN, Ry = 9.07 kN
Nodo 4: Rx = 15.78 kN, Ry = 10.70 kN

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	-5.236e-04	0.000e+00	-9.959e-04
2	-5.236e-04	-1.621e-05	5.390e-04
3	0.000e+00	0.000e+00	3.240e-04
4	0.000e+00	0.000e+00	-3.604e-04

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 1

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N (kN)**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
1	0.000	Nulo	9.726	19.774	-0.000	-15.138
2	9.072	Tensión	-6.215	-13.785	-0.000	15.138
3	19.070	Compresión	—	—	—	—

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Sistemas Mixtos
Ejercicio 2
Método Matricial de rigidez en Python

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

#LaUISqueQueremos

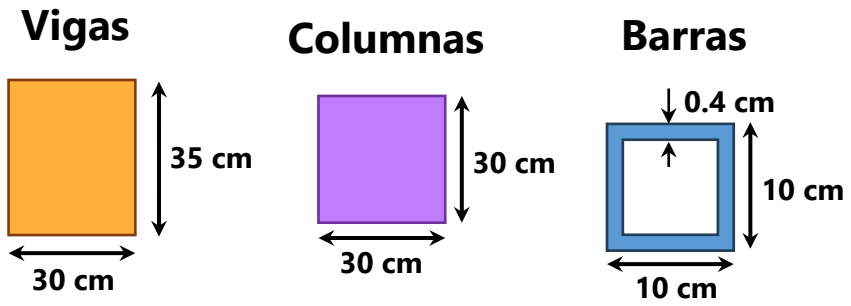
SISTEMAS MIXTOS: EJERCICIO 2

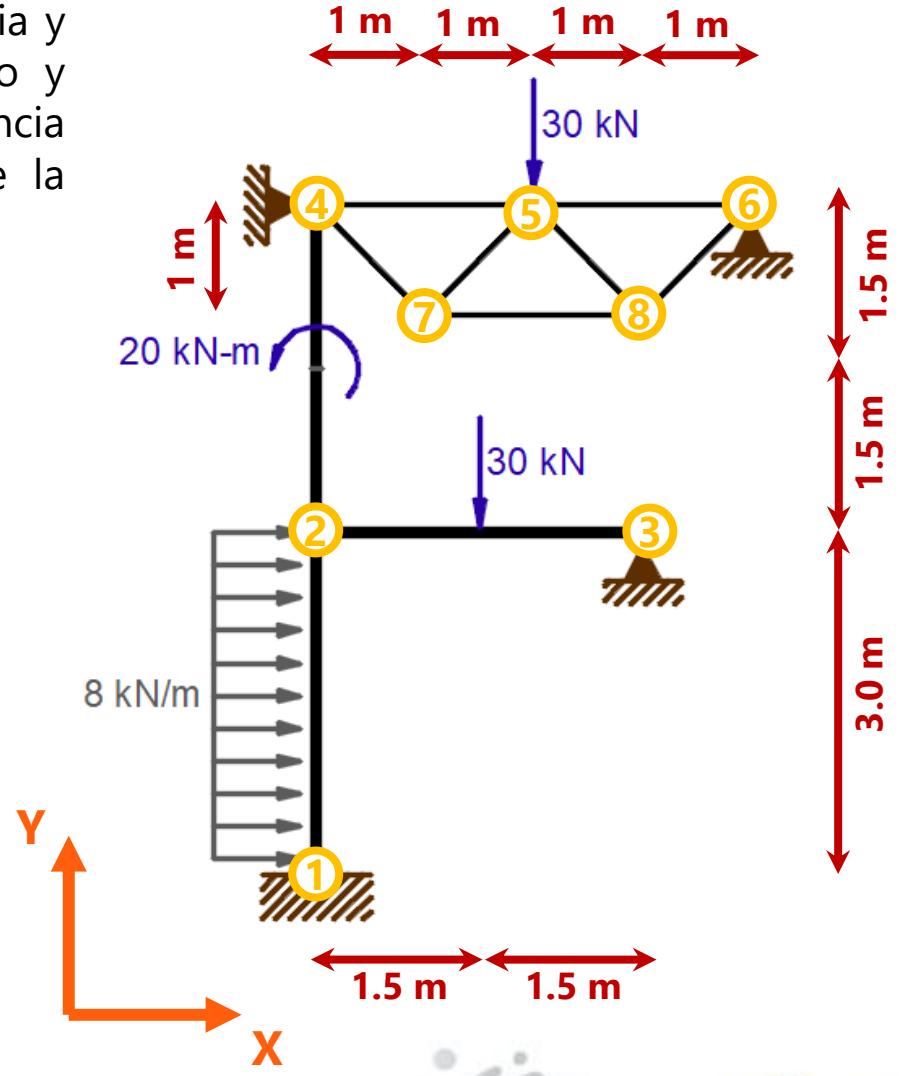
Se tiene el sistema estructural plano mostrado en la figura, conformado por un pórtico con una columna empotrada en la base, una viga intermedia y una armadura superior conectada rígidamente en el nodo izquierdo y apoyada en el extremo derecho. Las vigas y columnas tienen una resistencia a la compresión de f'c = 28 MPa, mientras que los elementos de la armadura un módulo de elasticidad de 200 GPa.

Utilizando el método matricial de rigidez y considerando los ejes globales XY, se solicita:

- Determinar los desplazamientos en el nodo 2 y 5.
- Calcular las reacciones en los apoyos de los nodos 1, 3, 4 y 6.
- Realizar los diagramas de fuerzas internas (axial, cortante y momento).

Desprecie el peso propio de los elementos, considere únicamente las cargas indicadas y las secciones transversales que se muestran a continuación:





#LaUISqueQueremos

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

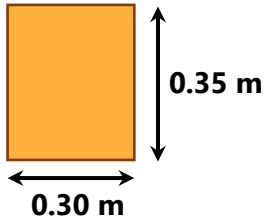
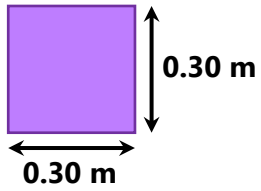
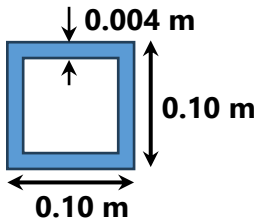
Módulo de elasticidad concreto: $E_c = 4700\sqrt{f'c}\ (MPa)$

Para $f'c = 28\ MPa$: $E_c = 4700\sqrt{28}\ MPa = 24870.06232\ MPa$

$$\boldsymbol{E_c = 24870062.32\ kN/m^2}$$

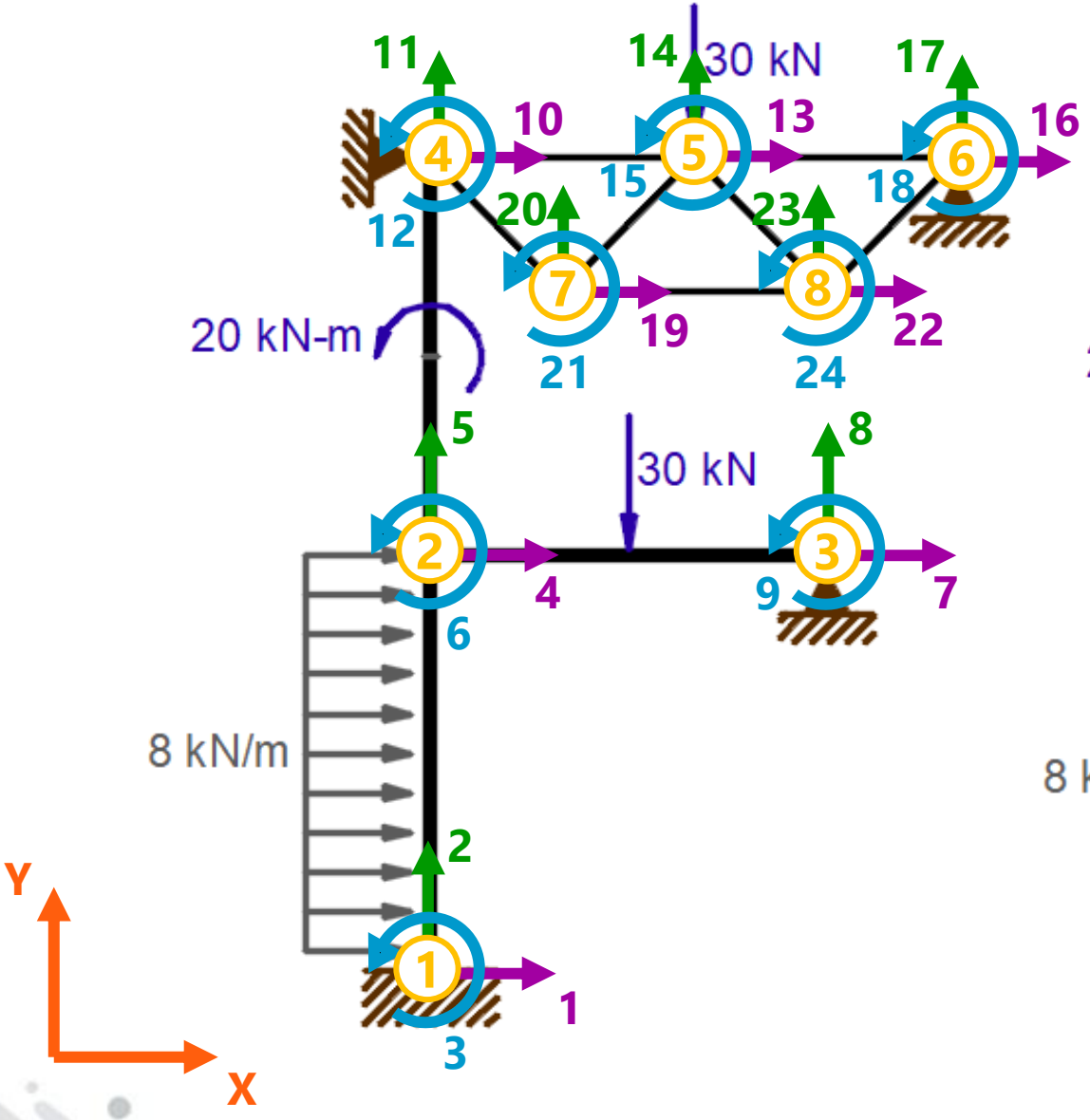
Módulo de elasticidad acero: $E_s = 200GPa$

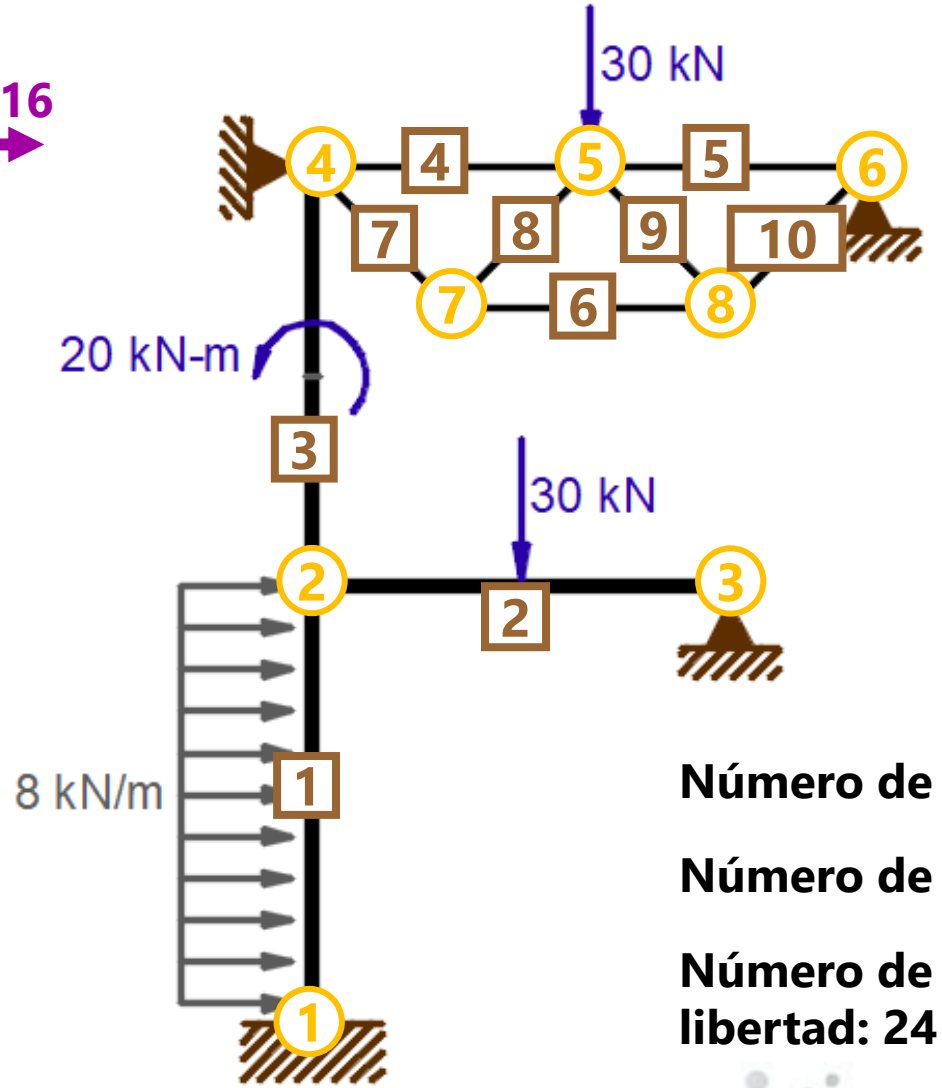
$$\boldsymbol{E_s = 2 \times 10^8\ kN/m^2}$$

Elemento	Vigas	Columnas	Barras
			
Área transversal (m^2)	$b \cdot h$	$b \cdot h$	$4e(L-e)$
Momento de inercia (m^4)	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS





Número de nodos: 8

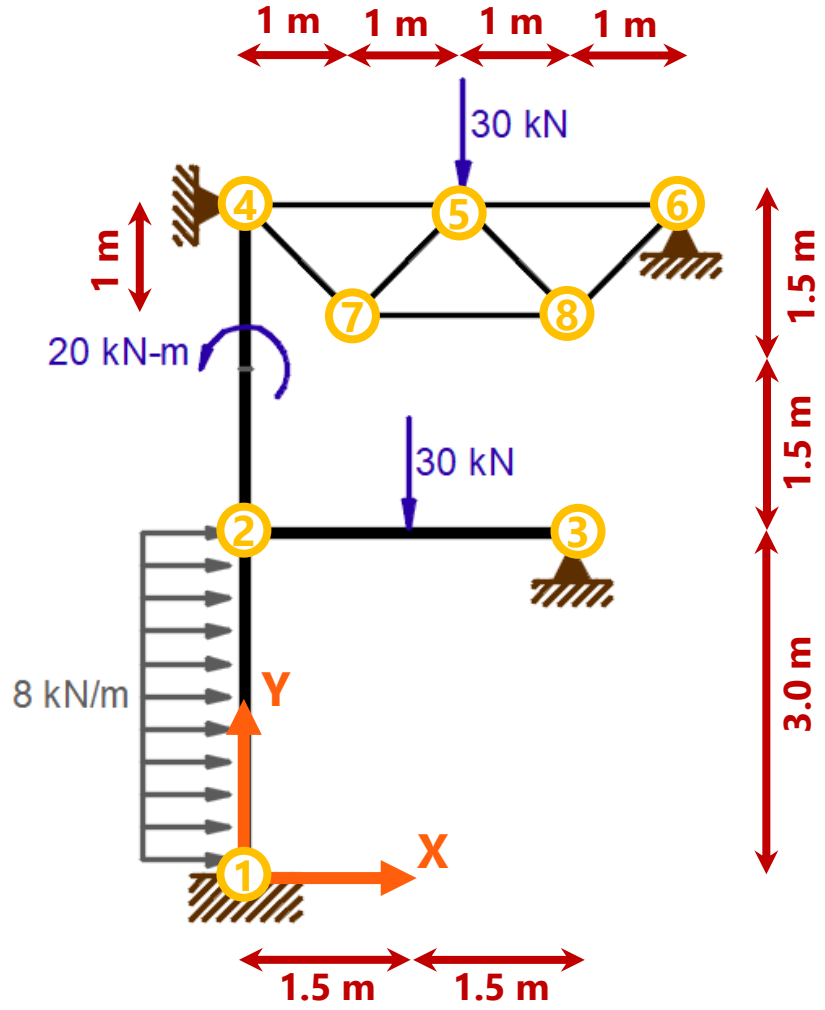
Número de elementos: 10

Número de grados de libertad: 24

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



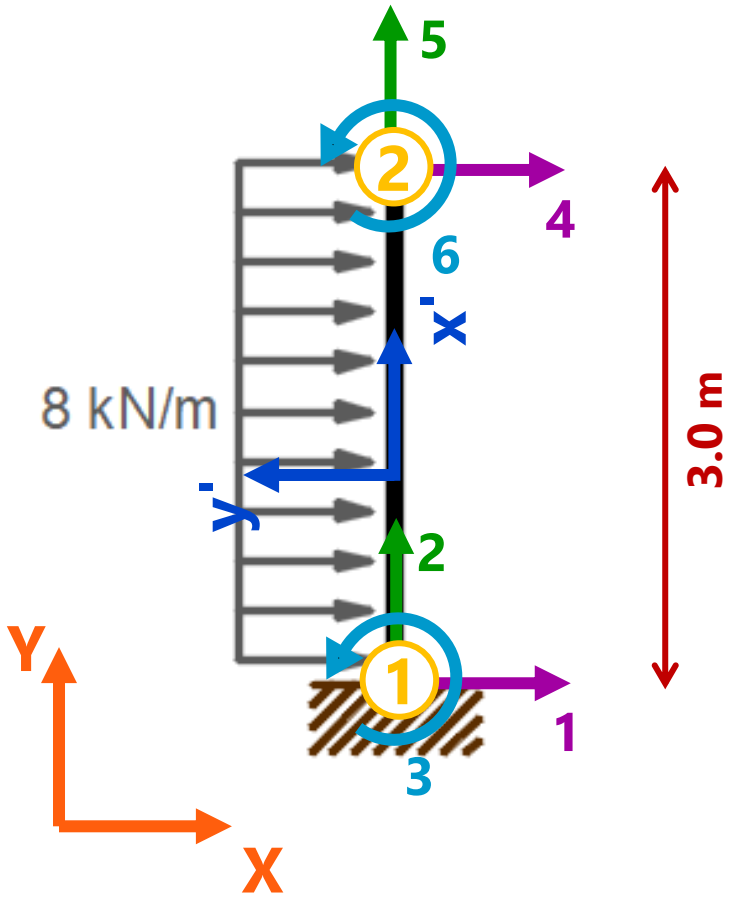
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	3.0
3	3.0	3.0
4	0.0	6.0
5	2.0	6.0
6	4.0	6.0
7	1.0	5.0
8	3.0	5.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90

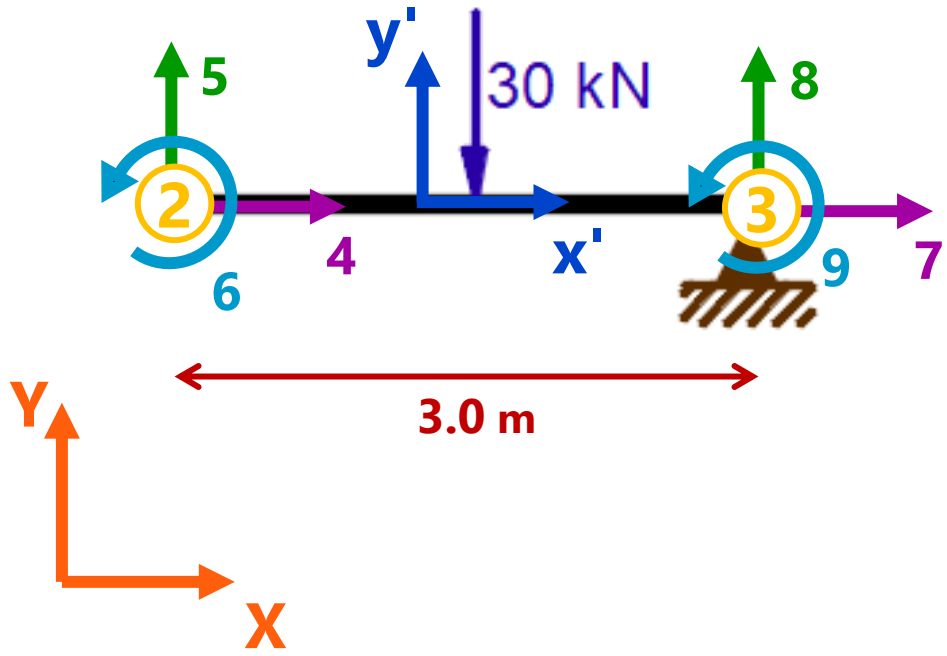


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0

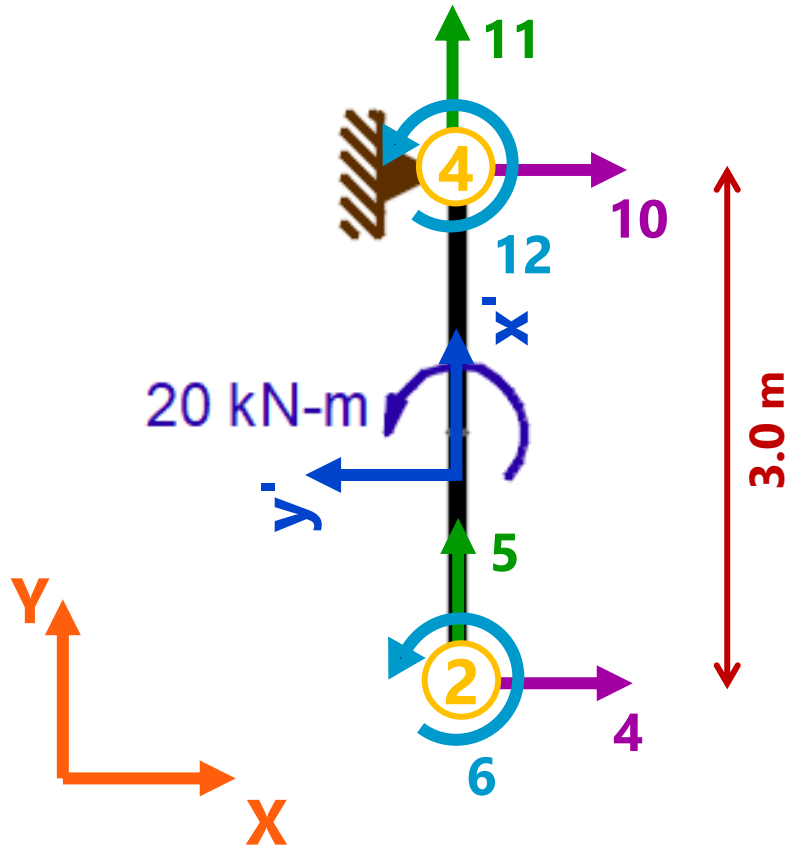


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	4	3.0	90

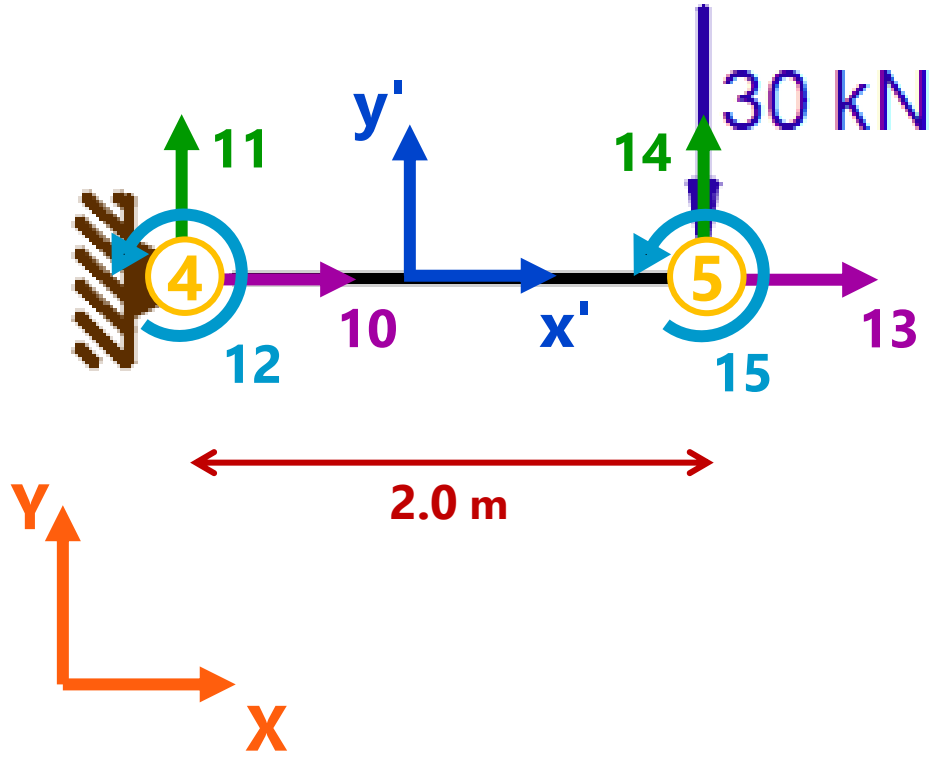


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 4

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	4	3.0	90
4	4	5	2.0	0

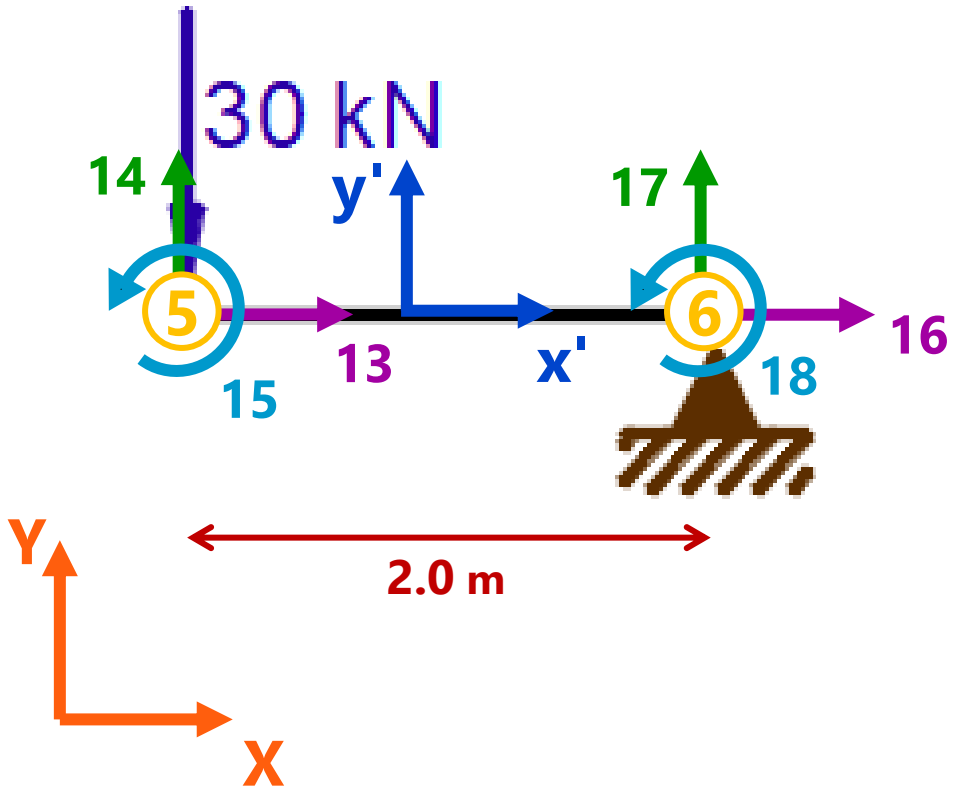


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 5

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	4	3.0	90
4	4	5	2.0	0
5	5	6	2.0	0

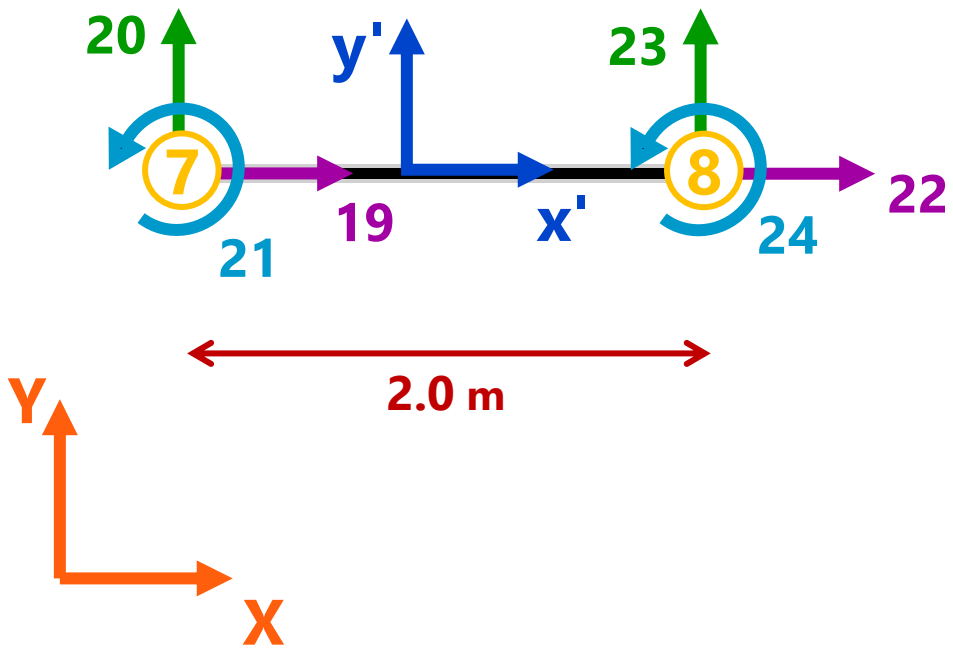


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 6

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	4	3.0	90
4	4	5	2.0	0
5	5	6	2.0	0
6	7	8	2.0	0

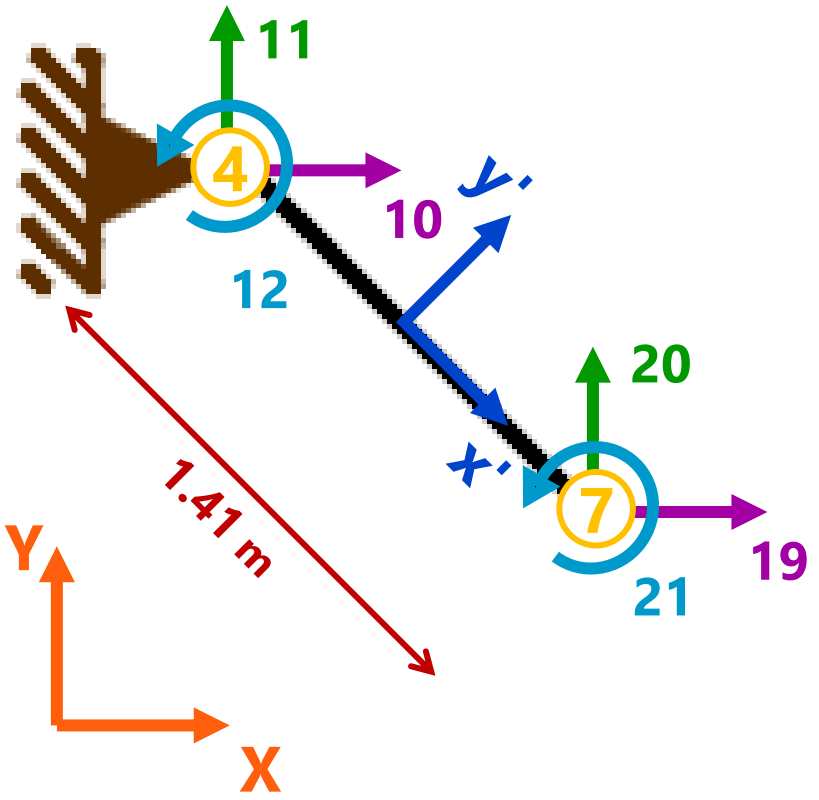


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 7

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	4	3.0	90
4	4	5	2.0	0
5	5	6	2.0	0
6	7	8	2.0	0
7	4	7	1.41	-45

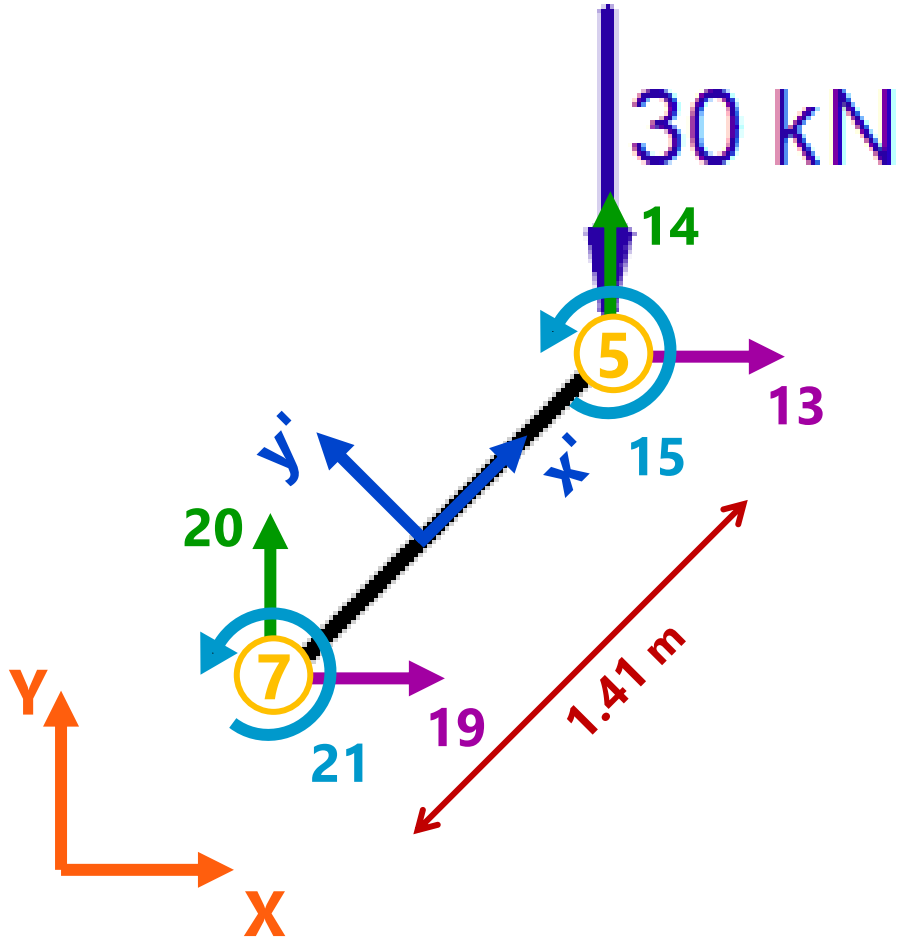


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 8

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	4	3.0	90
4	4	5	2.0	0
5	5	6	2.0	0
6	7	8	2.0	0
7	4	7	1.41	-45
8	7	5	1.41	45

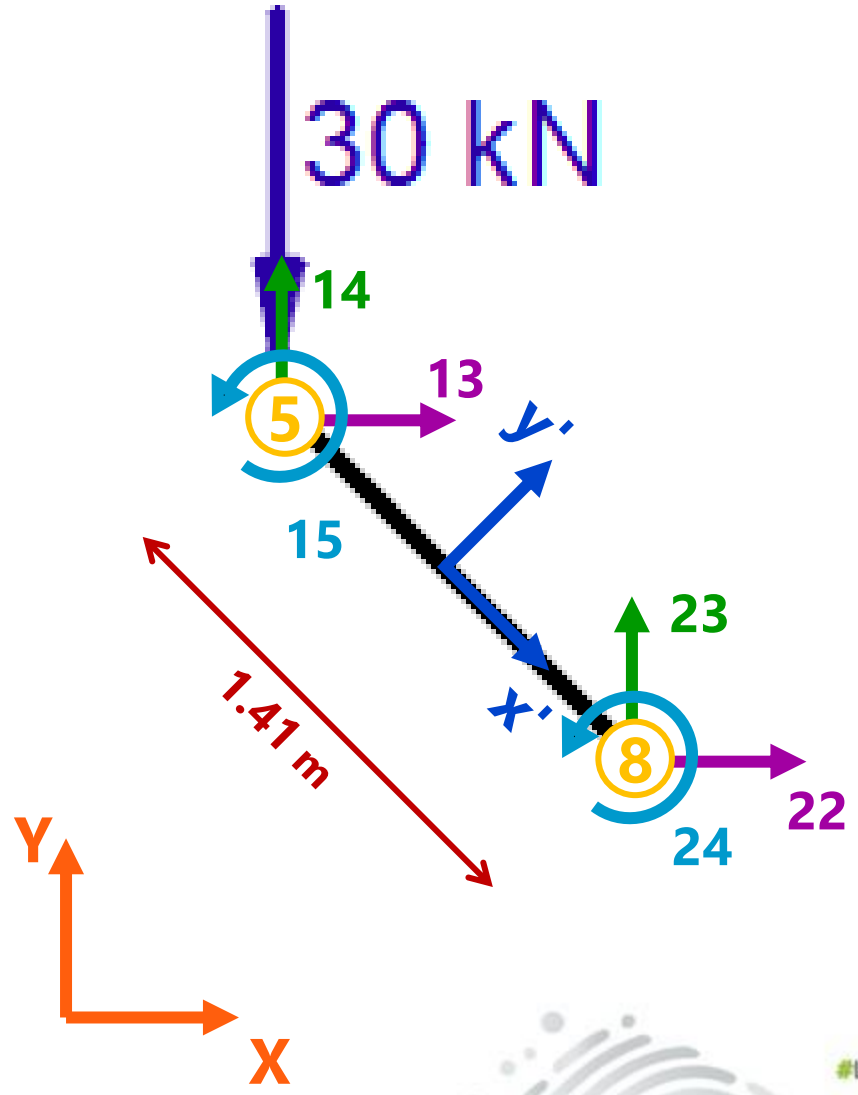


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 9

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	4	3.0	90
4	4	5	2.0	0
5	5	6	2.0	0
6	7	8	2.0	0
7	4	7	1.41	-45
8	7	5	1.41	45
9	5	8	1.41	-45

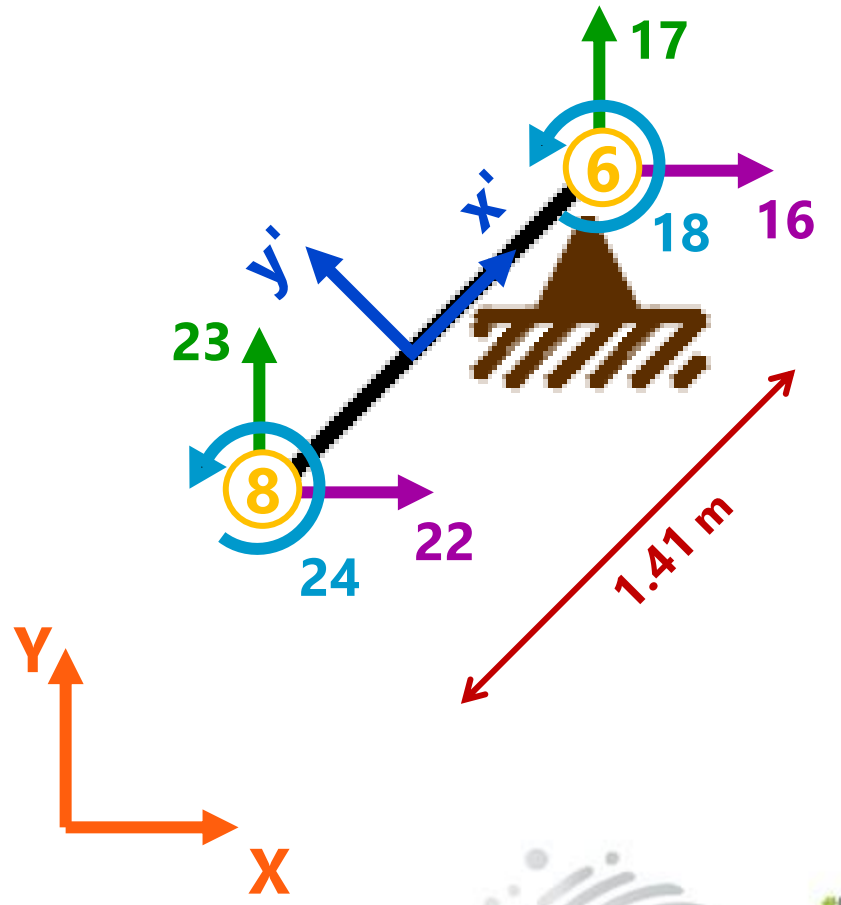


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 10

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	4	3.0	90
4	4	5	2.0	0
5	5	6	2.0	0
6	7	8	2.0	0
7	4	7	1.41	-45
8	7	5	1.41	45
9	5	8	1.41	-45
10	8	6	1.41	45



#LaUISqueQueremos

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Matriz de rigidez local:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

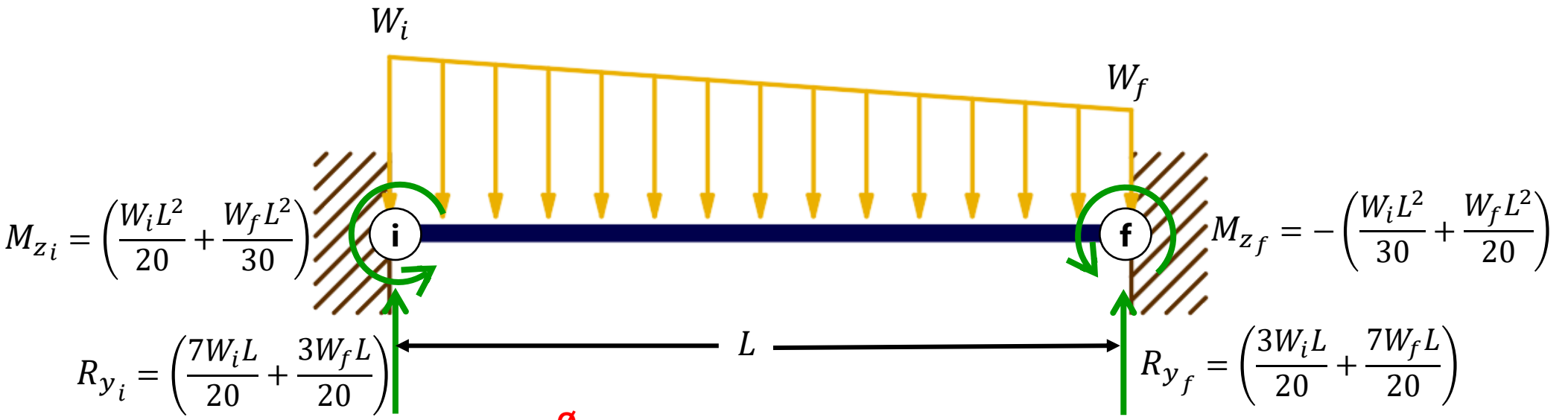
Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_L$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



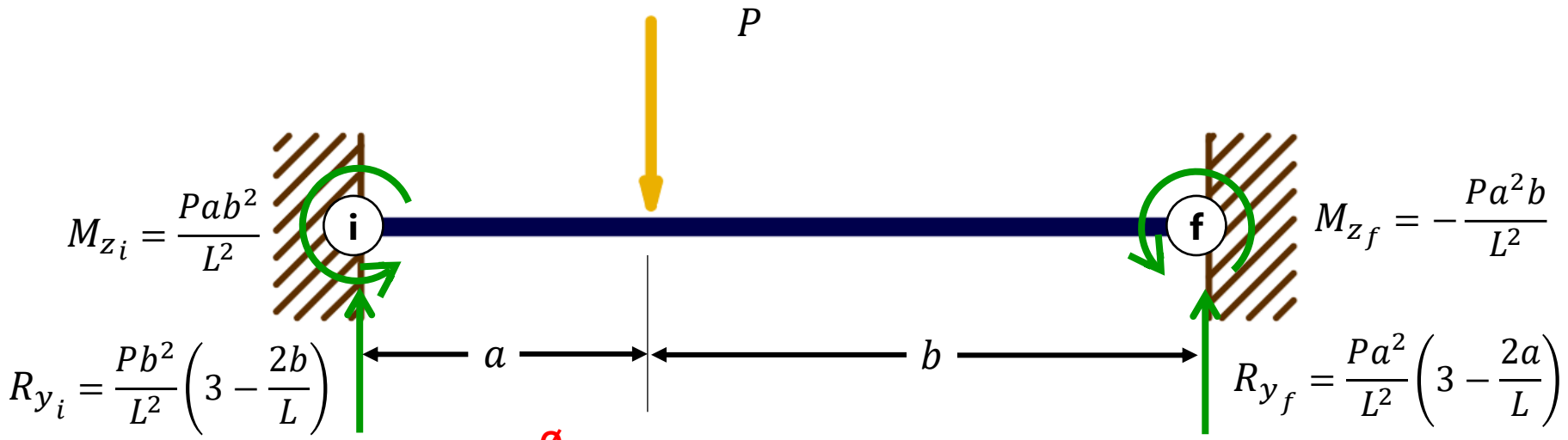
Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} \cancel{R_{x_i}} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ \cancel{R_{x_f}} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix}$ Ø Ø

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA PUNTUAL SOBRE EL ELEMENTO APLICADA A UNA DISTANCIA "a" DEL NODO INICIAL

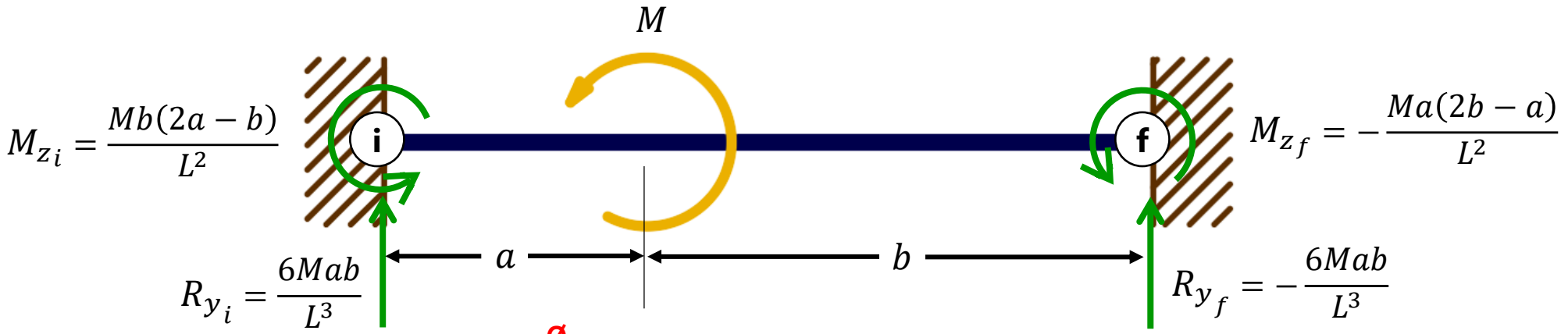


Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} \cancel{R_{x_i}} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ \cancel{R_{x_f}} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix}$ Ø Ø

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

MOMENTO PUNTUAL SOBRE EL ELEMENTO APLICADO A UNA DISTANCIA "a" DEL NODO INICIAL



$$M_{z_i} = \frac{Mb(2a-b)}{L^2}$$

$$M_{z_f} = -\frac{Ma(2b-a)}{L^2}$$

$$R_{y_i} = \frac{6Mab}{L^3}$$

$$R_{y_f} = -\frac{6Mab}{L^3}$$

Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} \cancel{R_{x_i}} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ \cancel{R_{x_f}} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix}$ Ø Ø

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

CARGAS SOBRE LOS ELEMENTOS

ELEM	TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	PARÁMETRO 1	PARÁMETRO 2
1	Uniforme	Local y	8.0	8.0
2	Puntual	Local y	30	1.5
3	Momento puntual	Local z	20	1.5
4	—	—	—	—
5	—	—	—	—
6	—	—	—	—
7	—	—	—	—
8	—	—	—	—
9	—	—	—	—
10	—	—	—	—

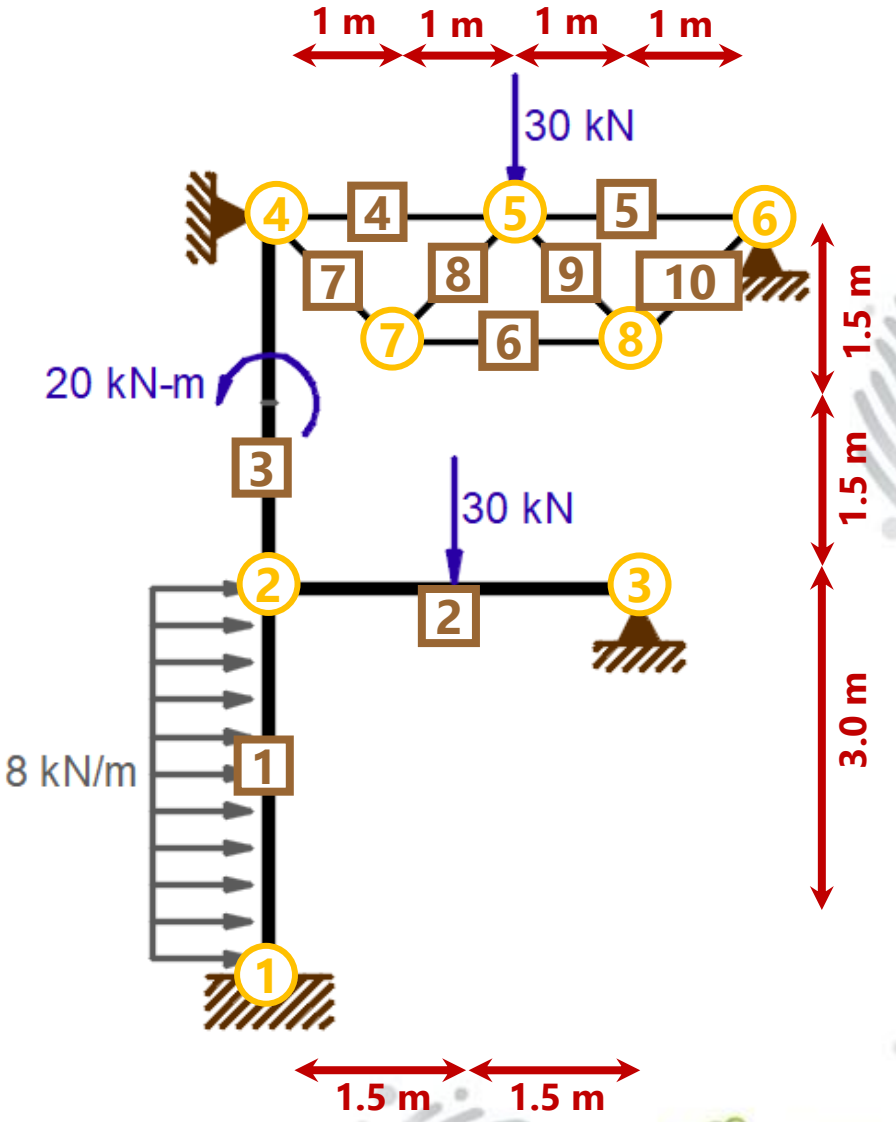
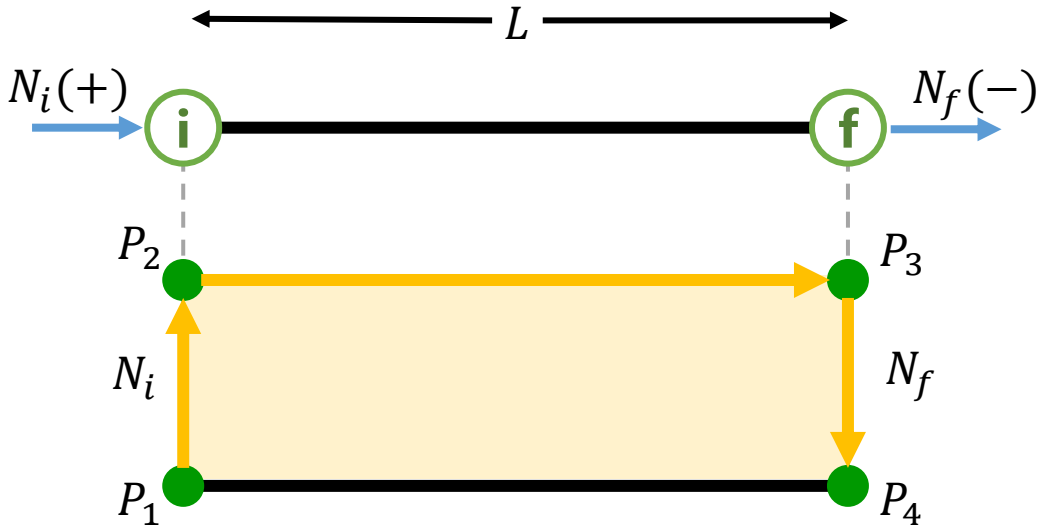


DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA AXIAL (N)
SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



Coord. Nodo inicial: (x_i, y_i) Coord. Nodo final: (x_f, y_f)

Vector director: $\vec{u} = (e_x, e_y)$ Vector normal: $\vec{n} = (n_x, ny)$

Coordenadas Punto 1: $P_1 = (x_i, y_i)$

Coordenadas Punto 2: $P_2 = P_1 + N_i \cdot \vec{n}$

Coordenadas Punto 3: $P_3 = P_2 + L \cdot \vec{u}$

Coordenadas Punto 4: $P_4 = P_3 + N_f \cdot \vec{n}$

- El diagrama se dibuja **perpendicular** al elemento para que sean visualmente distinguibles.
- El elemento NO tiene cargas axiales aplicadas a lo largo de su eje, por lo tanto el diagrama es CONSTANTE.
- Se cumple: |Ni| = |Nf| (mismo valor y distinto signo)

Forma: Prisma recto
Ecuación: Constante
Puntos de control: P_1, P_2, P_3, P_4

Convención de signos:
Nf > 0 → Tracción (el elemento se estira)
Nf < 0 → Compresión (el elemento se acorta)

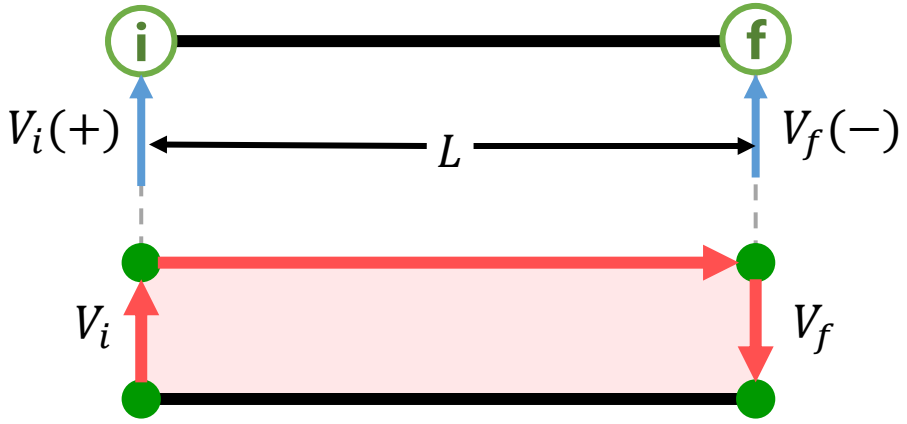
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

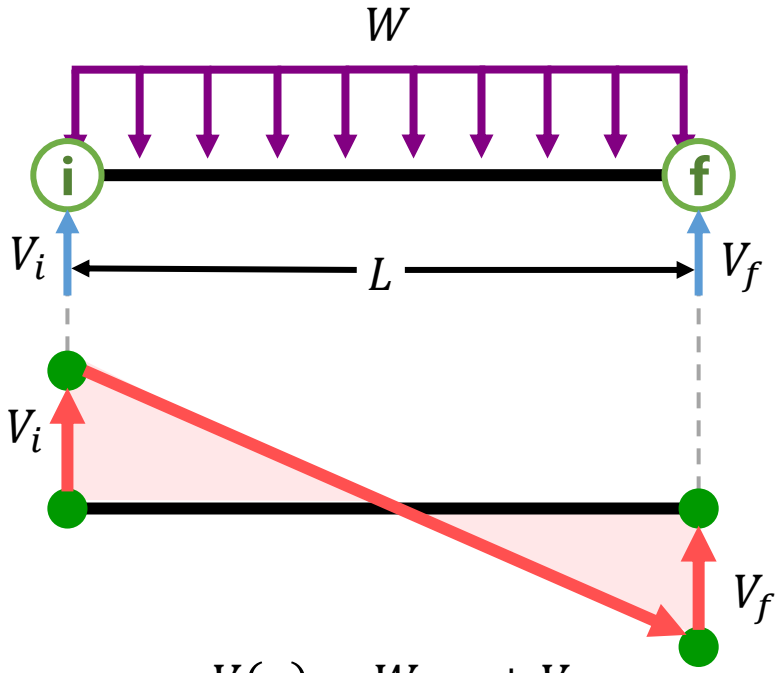
CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$V(x) = V_i$$

Se cumple: |Vi| = |Vf| (mismo valor y distinto signo)

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



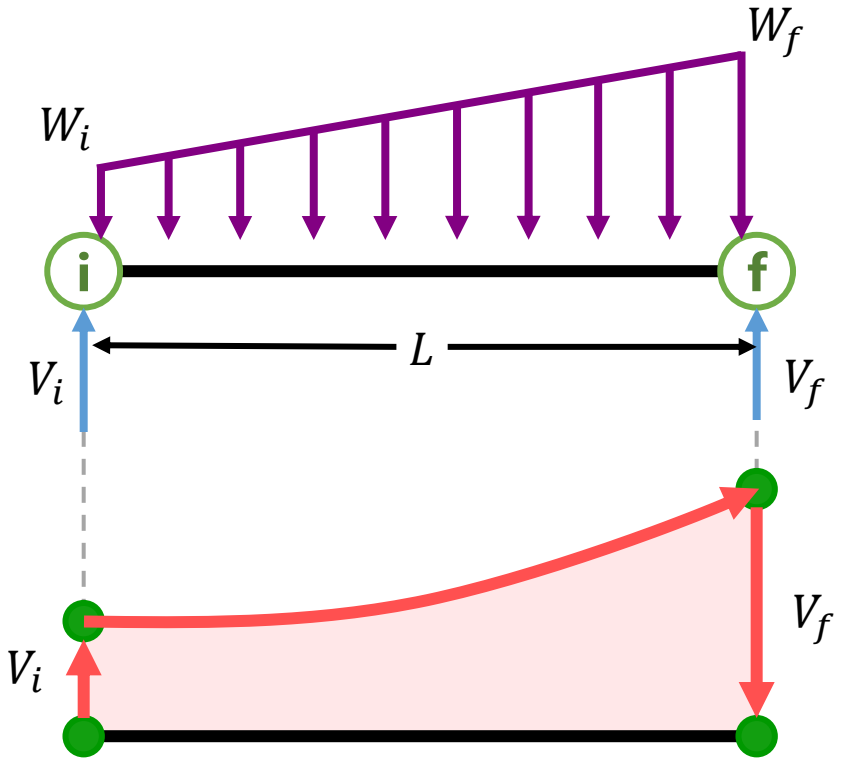
$$V(x) = W \cdot x + V_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

CASO III: CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

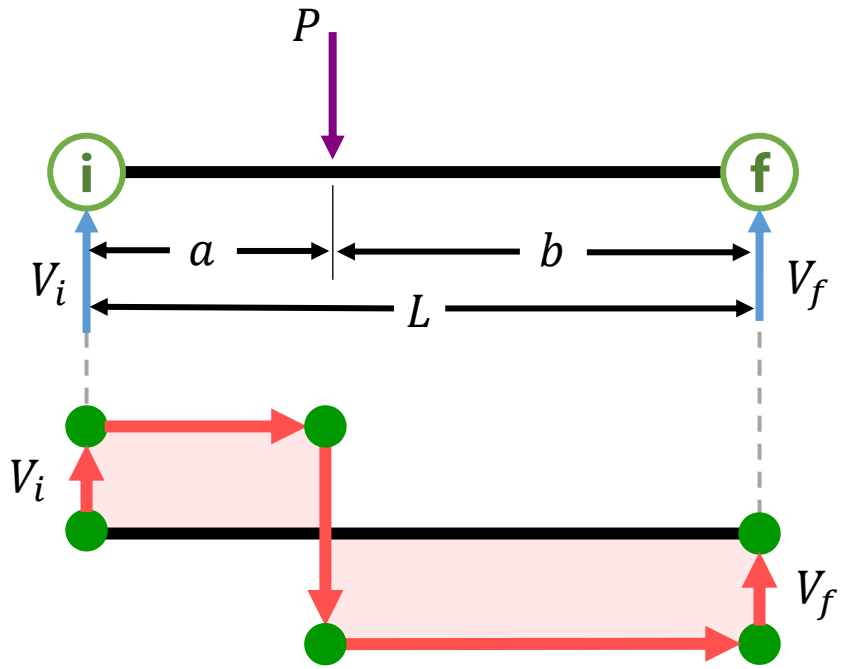
$$V(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^2}{2} + W_i \cdot x + V_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

CASO IV: CARGA PUNTUAL SOBRE EL ELEMENTO APLICADA A UNA DISTANCIA “a” DEL NODO INICIAL



La ecuación de cortante presenta una discontinuidad en el punto de aplicación de la carga puntual. Cuando x ≤ a, el cortante es constante igual a Vi; y cuando x > a, el cortante aumenta en la magnitud de la carga P.

Ecuación:

$$x \leq a \rightarrow V_{(x)} = V_i$$

$$x > a \rightarrow V_{(x)} = V_i + P$$

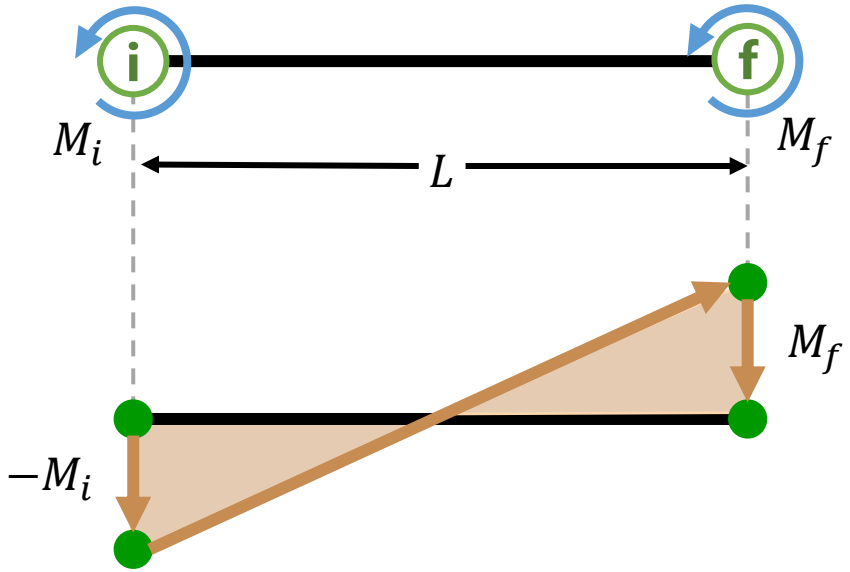
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

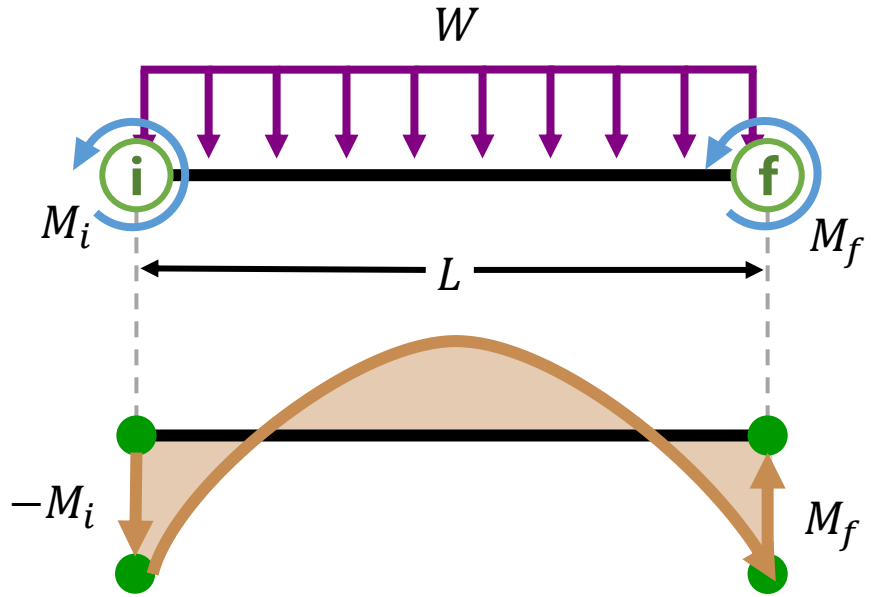
Ecuación: $M(x) = \int V(x)\,dx - M_i$

CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$M(x) = V_i \cdot x - M_i$$

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



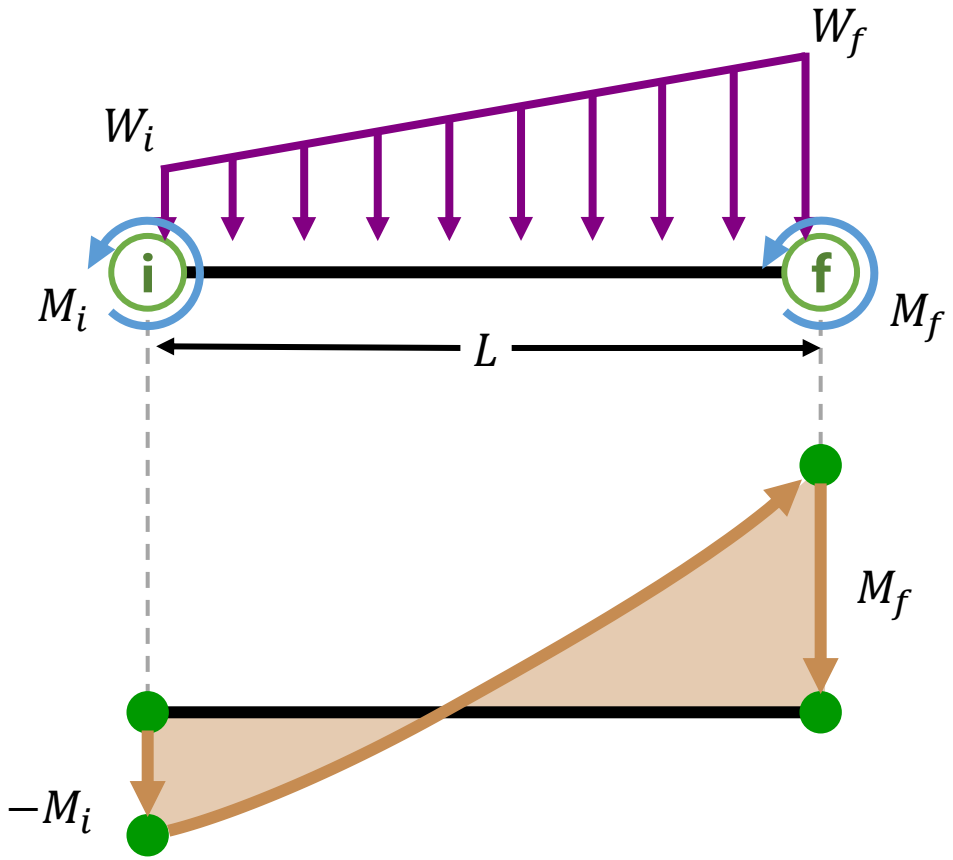
$$M(x) = \frac{W}{2}x^2 + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

CASO III: CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

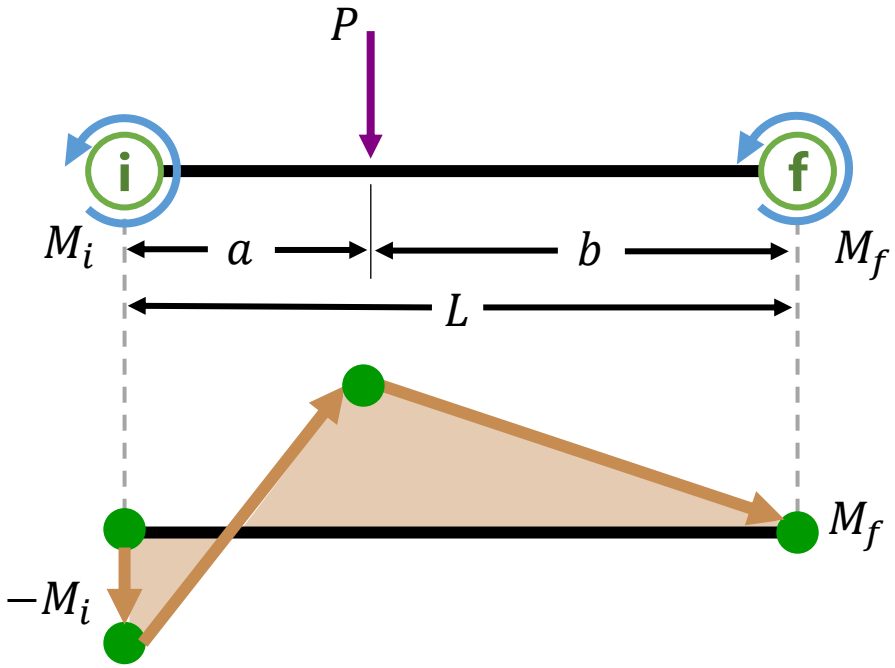
$$M(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^3}{6} + W_i\frac{x^2}{2} + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

CASO IV: CARGA PUNTUAL SOBRE EL ELEMENTO APLICADA A UNA DISTANCIA “a” DEL NODO INICIAL



El momento flector varía linealmente en cada tramo. En el primer tramo (x ≤ a), el momento es proporcional a la distancia x. En el segundo tramo (x > a), se añade el término P·(x-a) que representa la contribución de la carga puntual.

Ecuación:

$$x \leq a \rightarrow M_{(x)} = V_i \cdot x - M_i$$

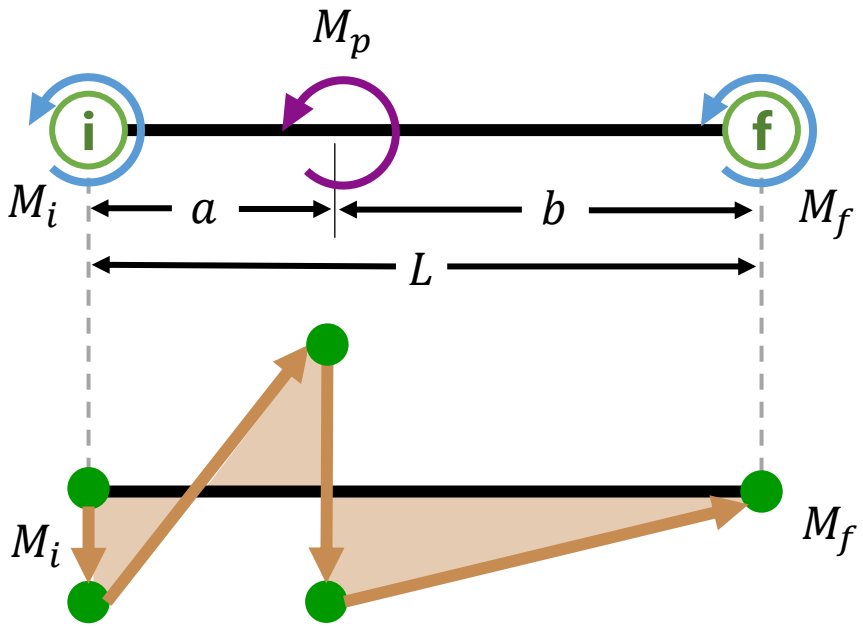
$$x > a \rightarrow M_{(x)} = P(x-a) + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

CASO V: MOMENTO PUNTUAL SOBRE EL ELEMENTO APLICADO A UNA DISTANCIA “a” DEL NODO INICIAL



El momento puntual introduce una discontinuidad en el diagrama de momento flector. Cuando (x ≤ a) el momento varía linealmente según Vi·x. Al cruzar el punto de aplicación (x > a), el momento experimenta un salto de magnitud igual del momento externo.

Ecuación:

$$x \leq a \rightarrow M_{(x)} = V_i \cdot x - M_i$$

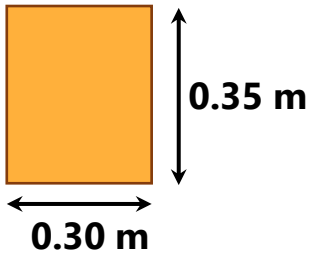
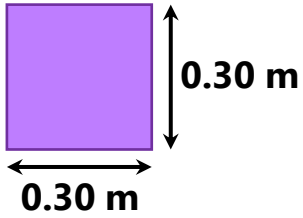
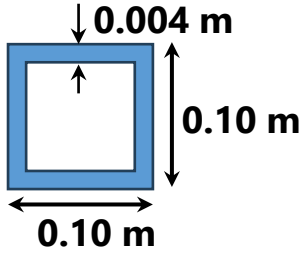
$$x > a \rightarrow M_{(x)} = -M_p + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

Módulo de elasticidad del concreto: $E_c = 24870062.32\ {}^{kN}/_{m^2}$

Módulo de elasticidad del acero: $E_s = 2 \times 10^8\ {}^{kN}/_{m^2}$

Elemento	Viga	Columna	Barra
			
Área transversal (m^2)	$b \cdot h$	$b \cdot h$	$4e(L-e)$
Momento de inercia (m^4)	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

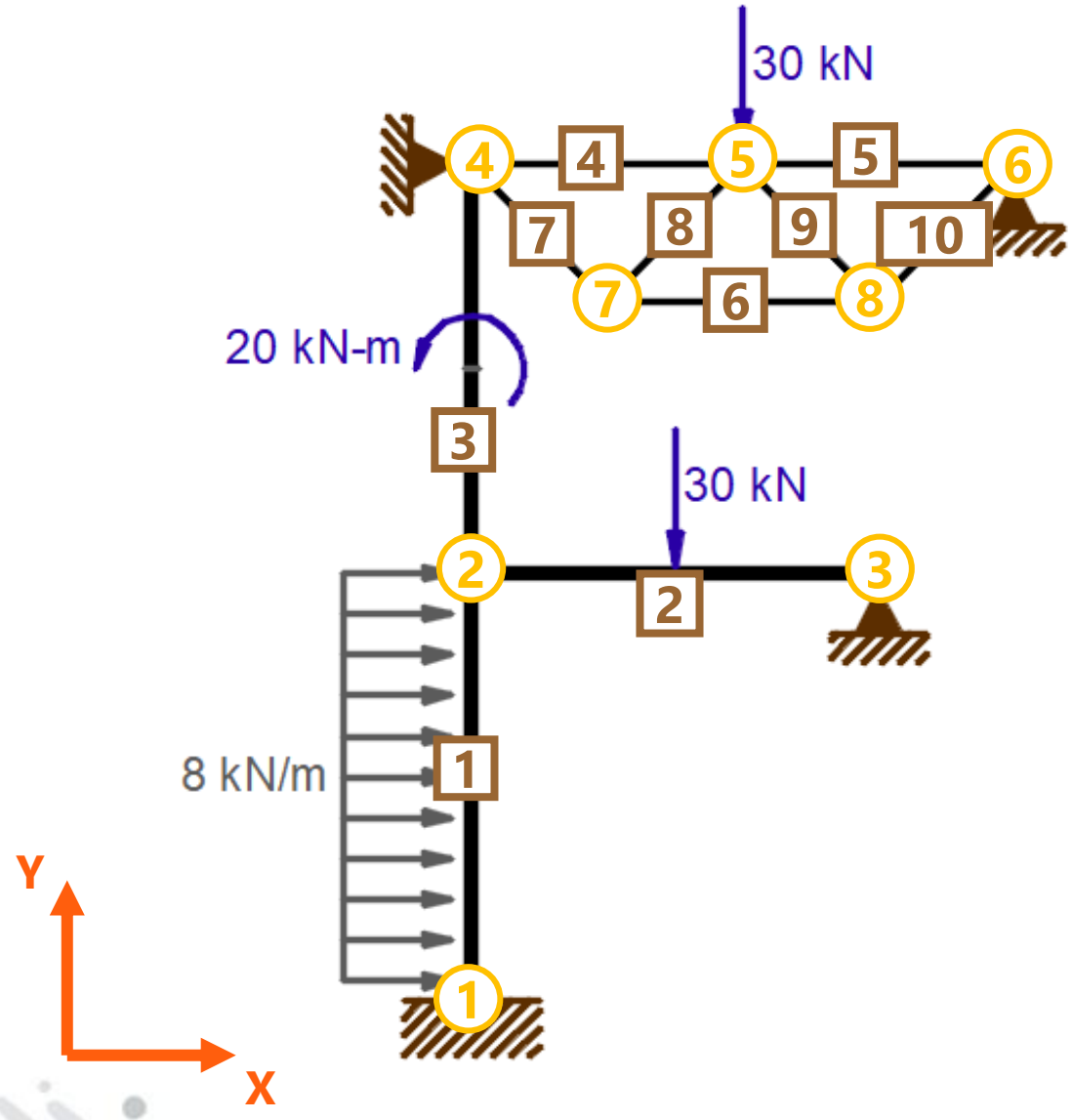
DATOS DE ENTRADA

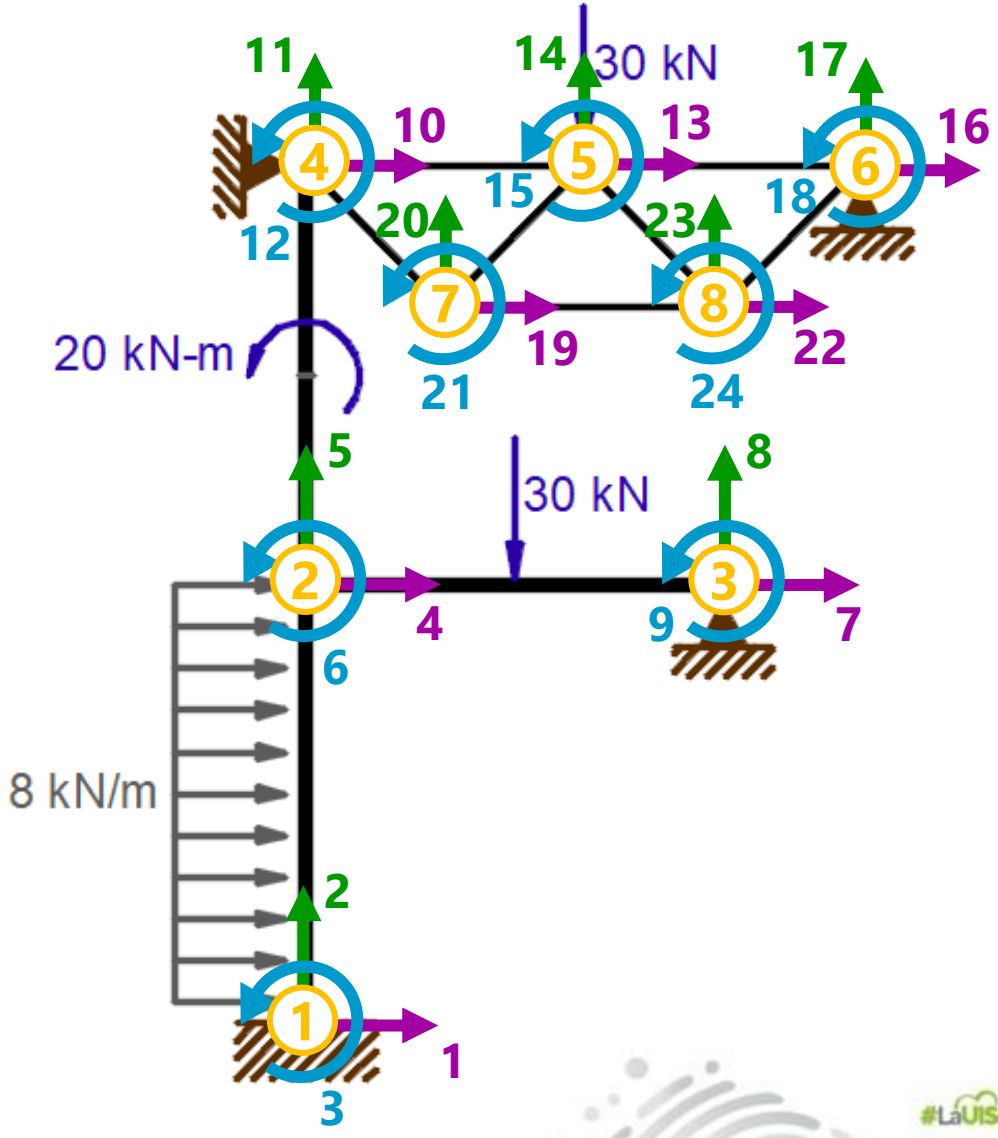
ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	4	3.0	90
4	4	5	2.0	0
5	5	6	2.0	0
6	7	8	2.0	0
7	4	7	1.41	-45
8	7	5	1.41	45
9	5	8	1.41	-45
10	8	6	1.41	45

NODO	X [m]	Y [m]
1	0.0	0.0
2	0.0	3.0
3	3.0	3.0
4	0.0	6.0
5	2.0	6.0
6	4.0	6.0
7	1.0	5.0
8	3.0	5.0

#LaUISqueQueremos

GRADOS DE LIBERTAD





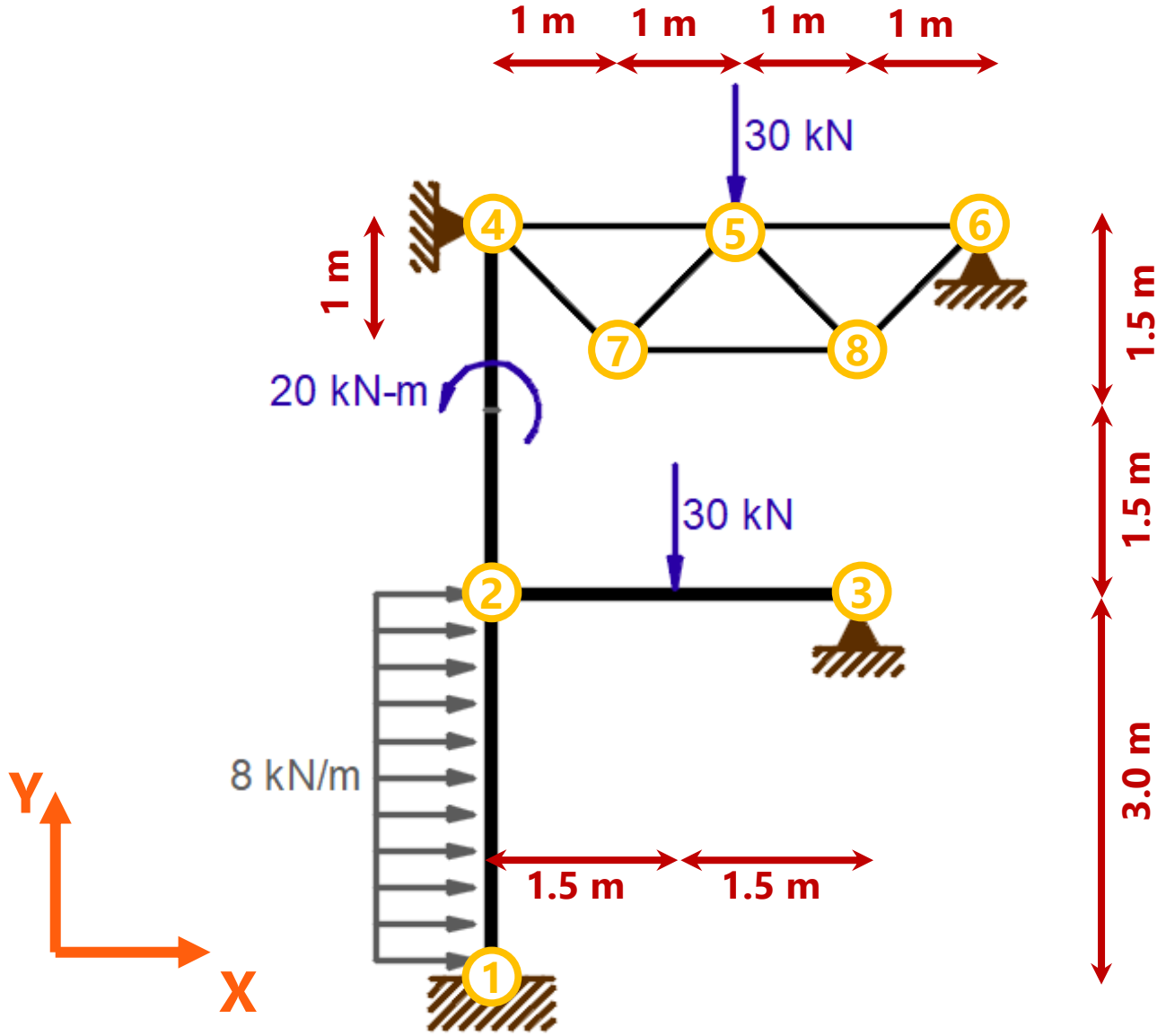
#LaUISqueQueremos

CARGAS SOBRE LOS ELEMENTOS

ELEM	TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	PARÁMETRO 1	PARÁMETRO 2
1	Uniforme	Local y	8.0	8.0
2	Puntual	Local y	30	1.5
3	Momento puntual	Local z	20	1.5
4	—	—	—	—
5	—	—	—	—
6	—	—	—	—
7	—	—	—	—
8	—	—	—	—
9	—	—	—	—
10	—	—	—	—

#LaUISqueQueremos

GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



#LaUISqueQueremos

ENSAMBLE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Matriz de rigidez local:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$[T] = \begin{bmatrix} c_i & s_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_i & c_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_f & s_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_f & c_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

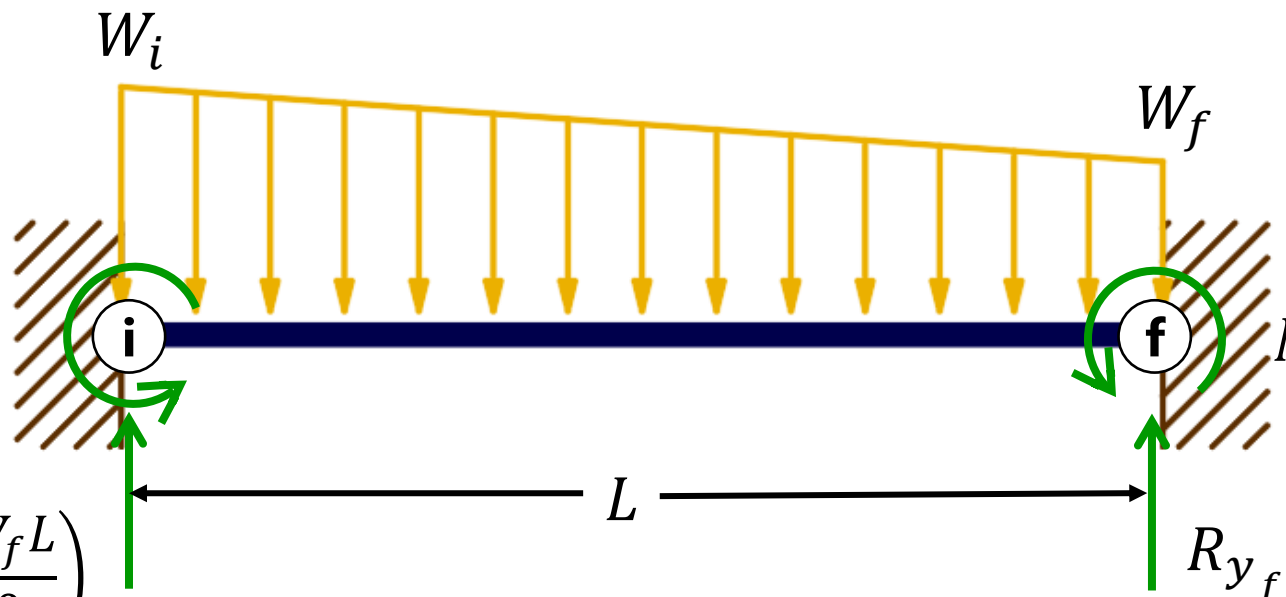
Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

#LaUISqueQueremos

VECTOR FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



$$M_{z_i} = \left(\frac{W_i L^2}{20} + \frac{W_f L^2}{30}\right)$$

$$M_{z_f} = -\left(\frac{W_i L^2}{30} + \frac{W_f L^2}{20}\right)$$

$$R_{y_i} = \left(\frac{7W_i L}{20} + \frac{3W_f L}{20}\right)$$

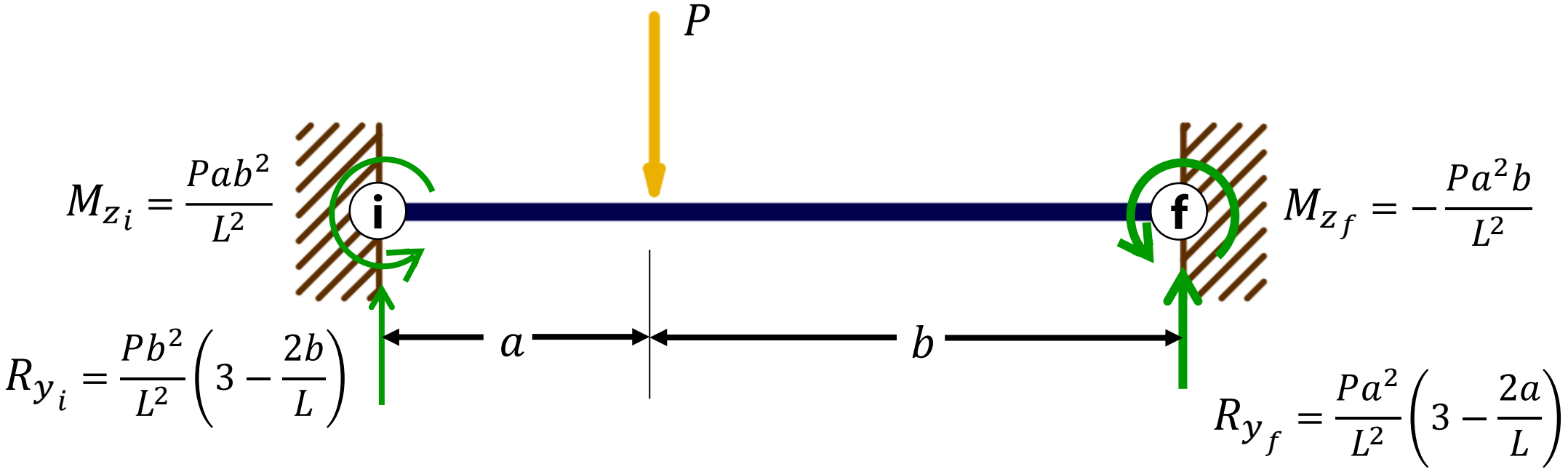
$$R_{y_f} = \left(\frac{3W_i L}{20} + \frac{7W_f L}{20}\right)$$

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

VECTOR FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA PUNTUAL



$$M_{z_i} = \frac{Pab^2}{L^2}$$

$$M_{z_f} = -\frac{Pa^2b}{L^2}$$

$$R_{y_i} = \frac{Pb^2}{L^2}\left(3 - \frac{2b}{L}\right)$$

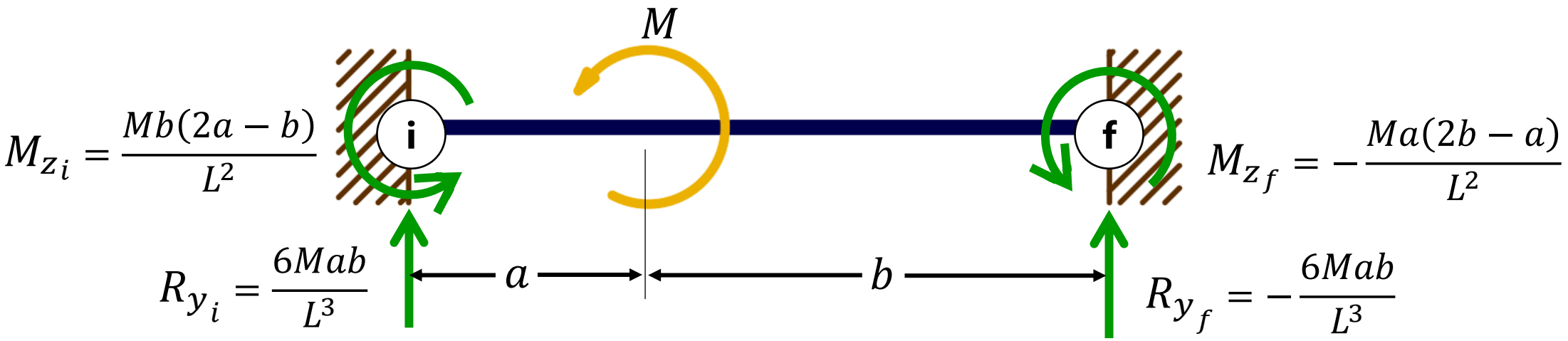
$$R_{y_f} = \frac{Pa^2}{L^2}\left(3 - \frac{2a}{L}\right)$$

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

VECTOR FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

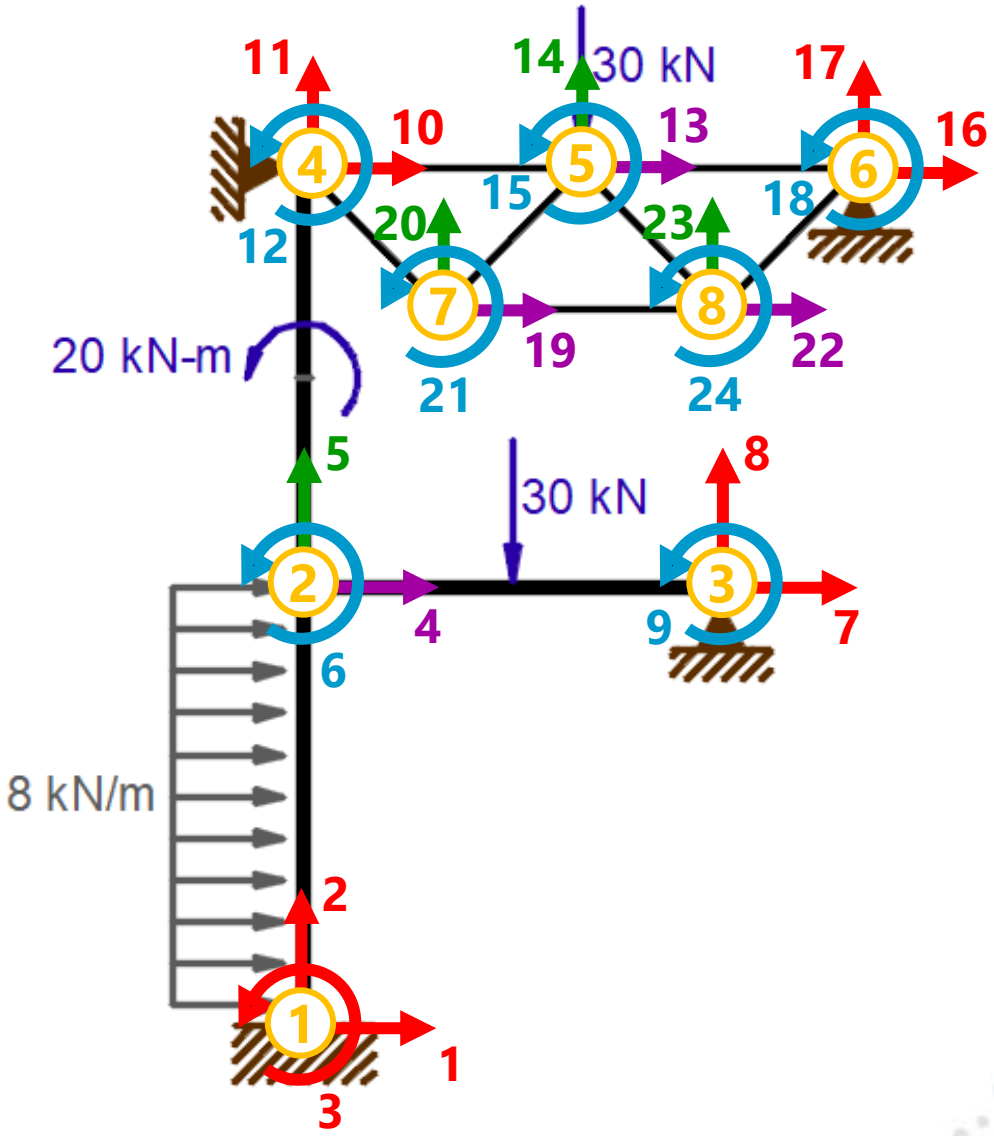
MOMENTO PUNTUAL

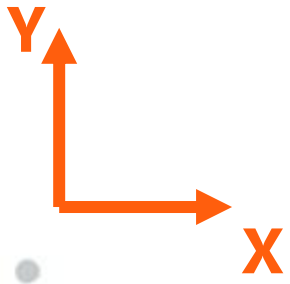


Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

CONDICIONES DE CONTORNO

- Grados de libertad restringidos





SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Desplazamientos: $\{U\}_G = (\{F_{ext}\}_G - \{F^{FEM}\}_G) * [K]_G^{-1}$

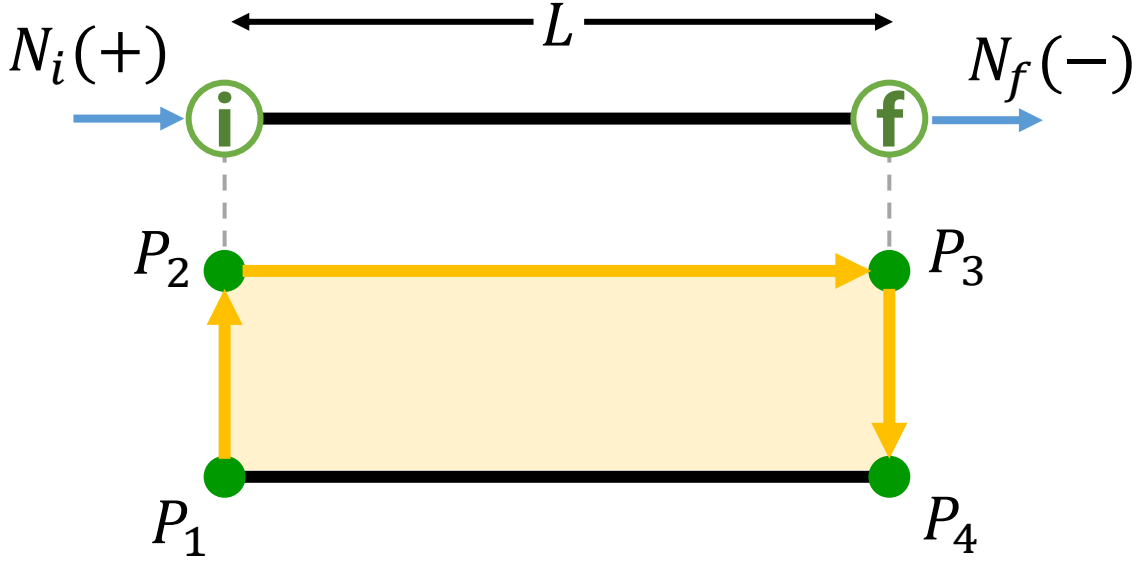
Reacciones: $\{R\} = [k]_G\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_G$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_L$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA AXIAL (N)



Coord. P1: $P_1 = (x_i, y_i)$

Coord. P2: $P_2 = P_1 + N_i \cdot \vec{n}$

Coord. P3: $P_3 = P_2 + L \cdot \vec{u}$

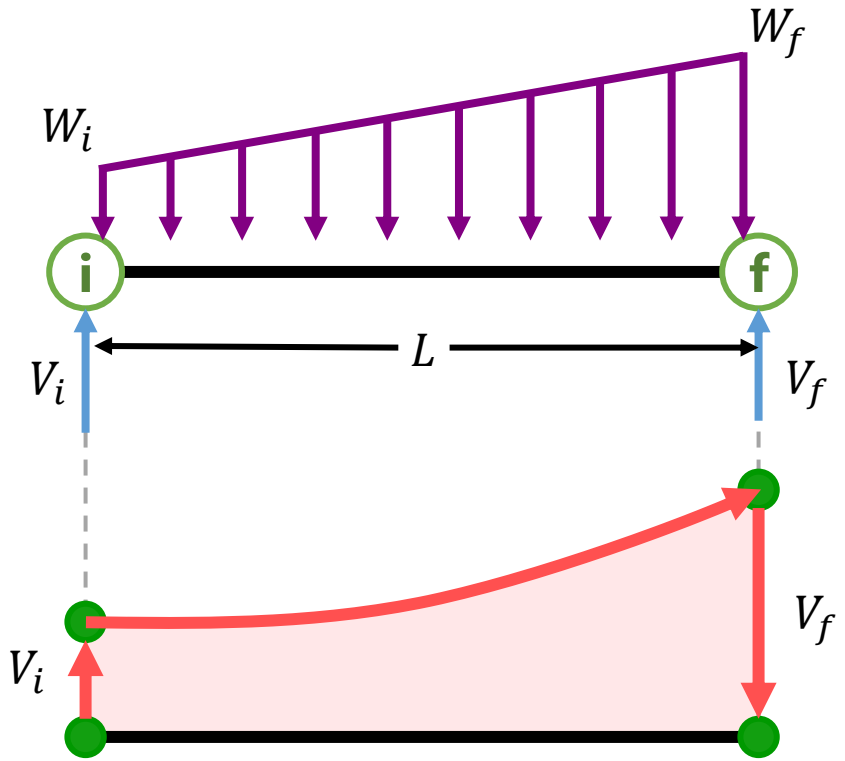
Coord. P4: $P_4 = P_3 + N_f \cdot \vec{n}$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



$$V(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^2}{2} + W_i \cdot x + V_i$$

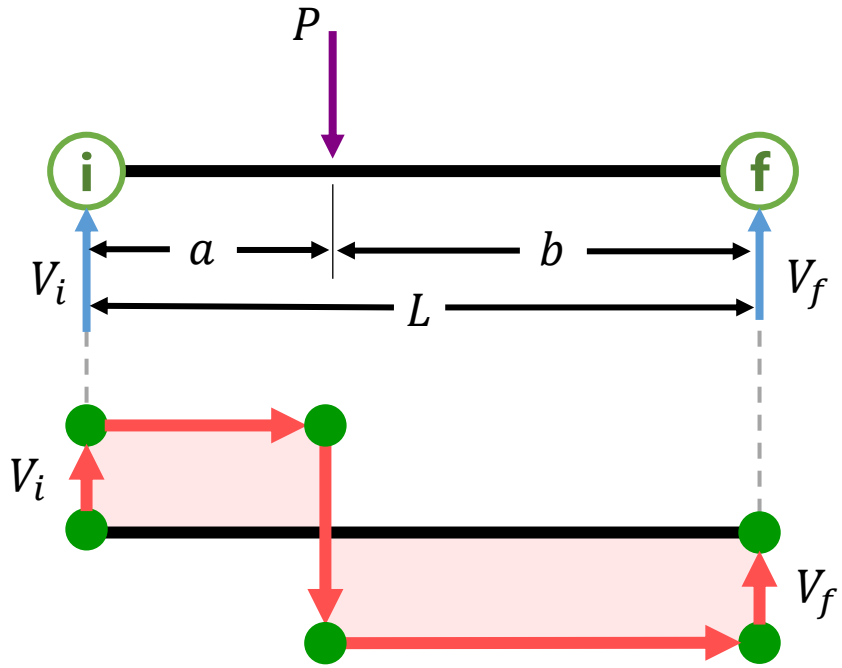
- Si NO hay cargas distribuidas: Wi = Wf = 0 (La ecuación se simplifica)
- Si hay cargas uniformes: Wi = Wf
- Si hay cargas lineales: Wi ≠ Wf

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

CARGA PUNTUAL



$$x \leq a \rightarrow V_{(x)} = V_i$$

$$x > a \rightarrow V_{(x)} = V_i + P$$

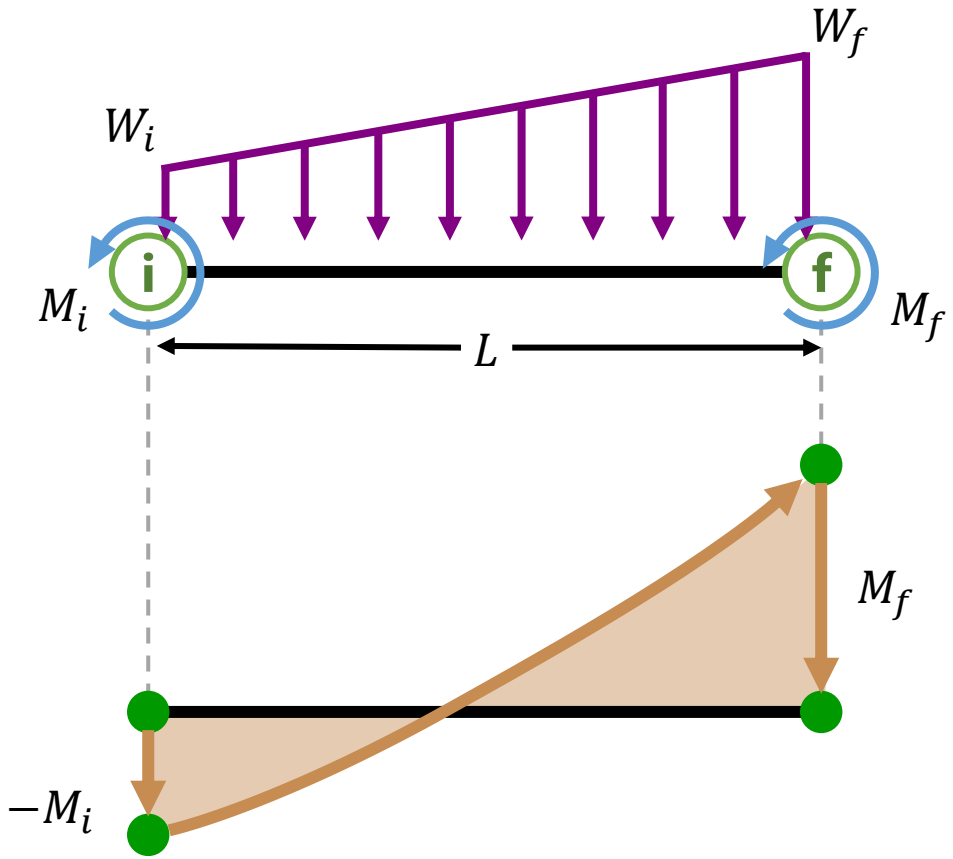
Discontinuidad en el punto de aplicación de la carga.

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



$$M(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^3}{6} + W_i\frac{x^2}{2} + V_i \cdot x - M_i$$

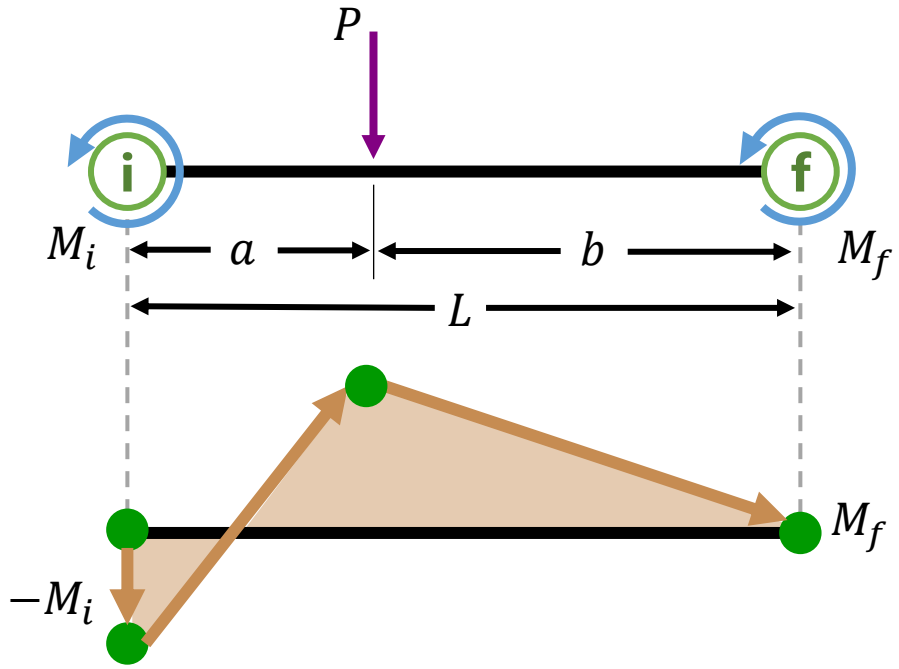
- Si NO hay cargas distribuidas: Wi = Wf = 0 (La ecuación se simplifica)
- Si hay cargas uniformes: Wi = Wf
- Si hay cargas lineales: Wi ≠ Wf

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

CARGA PUNTUAL



$$x \leq a \rightarrow M_{(x)} = V_i \cdot x - M_i$$

$$x > a \rightarrow M_{(x)} = P(x - a) + V_i \cdot x - M_i$$

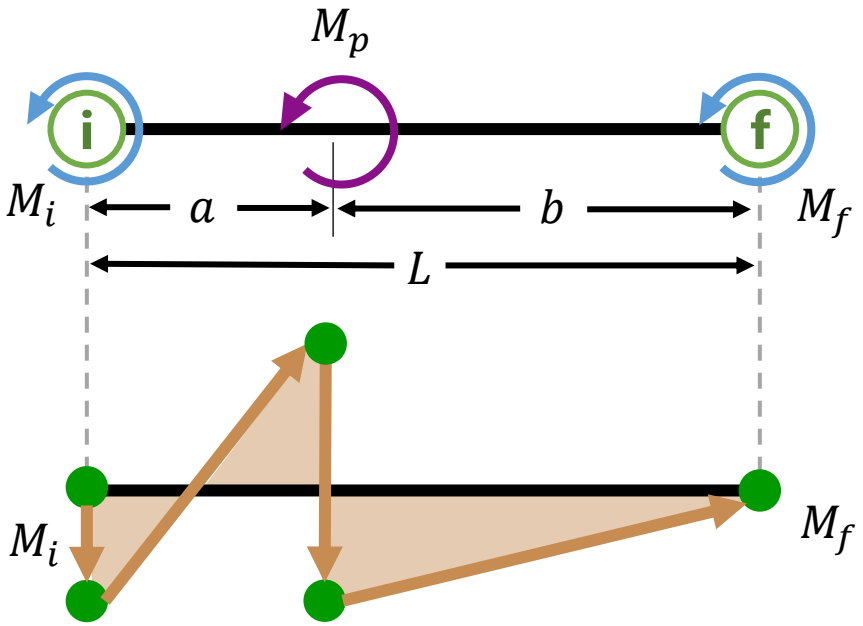
Se añade la contribución de la carga puntual.

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

MOMENTO PUNTUAL



$$x \leq a \rightarrow M_{(x)} = V_i \cdot x - M_i$$

$$x > a \rightarrow M_{(x)} = -M_p + V_i \cdot x - M_i$$

Discontinuidad en el punto de aplicación del momento.

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 2

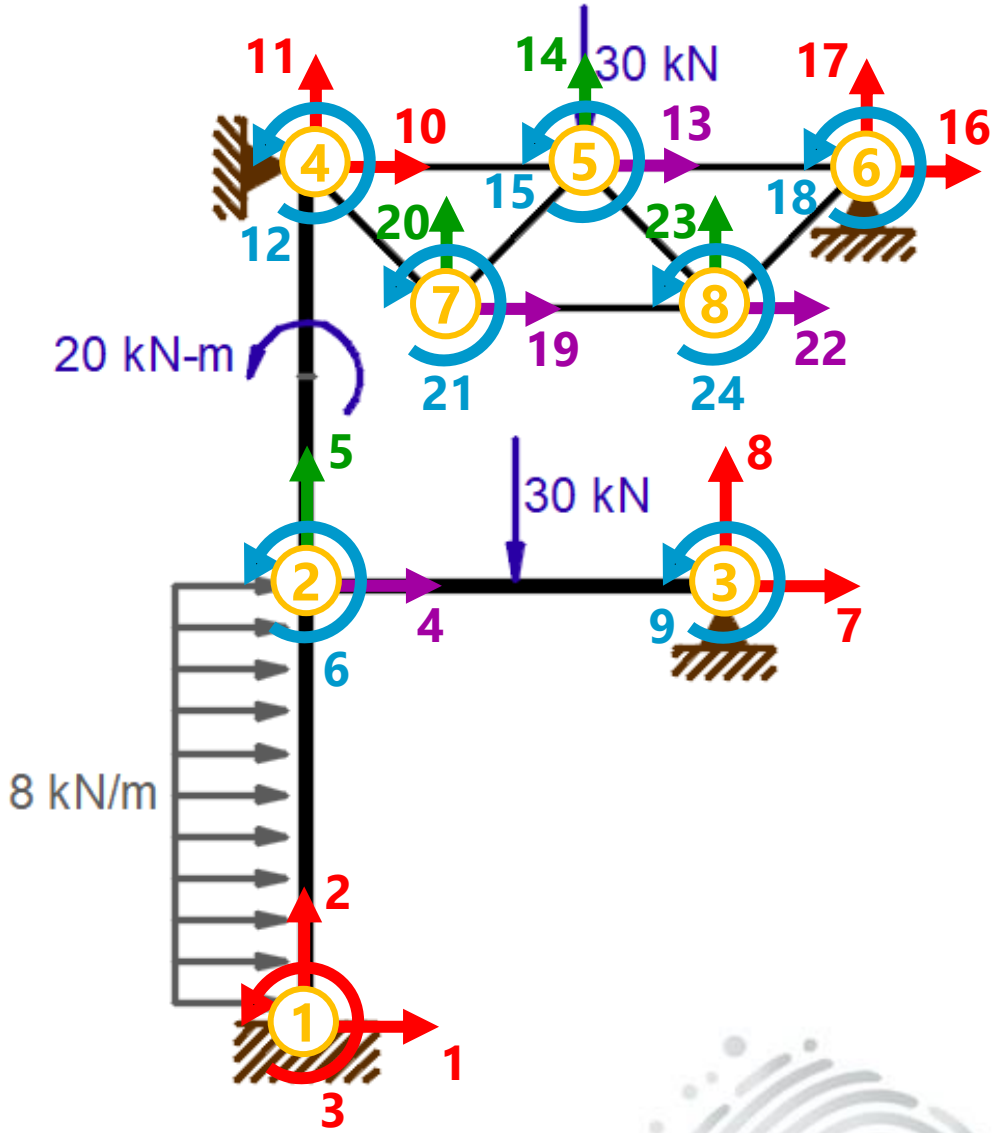
REACCIONES

Nodo 1: Rx = -9.898 kN,
Ry = 9.390 kN,
Mz = 3.985 kN-m

Nodo 3: Rx = -20.420 kN,
Ry = 11.220 kN

Nodo 4: Rx = -8.682 kN,
Ry = 24.390 kN

Nodo 6: Rx = 15.000 kN,
Ry = 15.000 kN



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 2

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
2	2.346e-05	-1.259e-05	-2.035e-04
3	0.000e+00	0.000e+00	4.245e-04
4	0.000e+00	0.000e+00	-1.099e-04
5	2.390e-17	-4.715e-04	-1.146e-05
6	0.000e+00	0.000e+00	2.469e-04
7	-9.766e-05	-2.358e-04	-1.839e-04
8	9.766e-05	-2.358e-04	1.653e-04

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 2

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N (kN)**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
1	-9.390	Compresión	9.898	14.102	3.985	-10.292
2	-20.420	Compresión	18.780	11.220	11.339	0.000
3	9.390	Tracción	6.318	-6.318	-1.047	-0.000
4	0.000	Nulo	0.000	-0.000	0.000	0.000
5	0.000	Nulo	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
6	30.000	Tracción	-0.000	0.000	-0.000	0.000
7	21.213	Tracción	0.000	-0.000	0.000	0.000
8	-21.213	Compresión	0.000	-0.000	0.000	0.000
9	-21.213	Compresión	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
10	21.213	Tracción	0.000	-0.000	0.000	0.000

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Sistemas Mixtos
Ejercicio 2
Modelo OpenSees

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

#LaUISqueQueremos

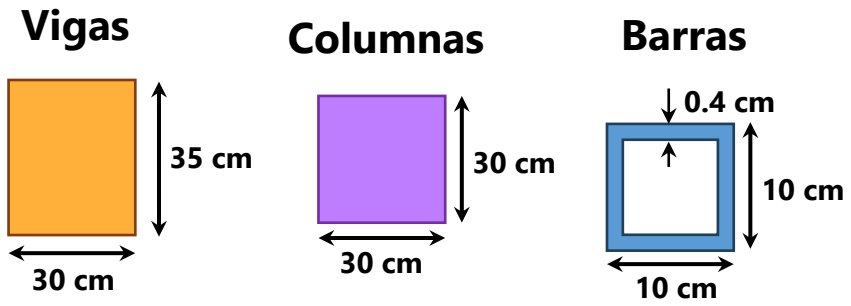
SISTEMAS MIXTOS: EJERCICIO 2

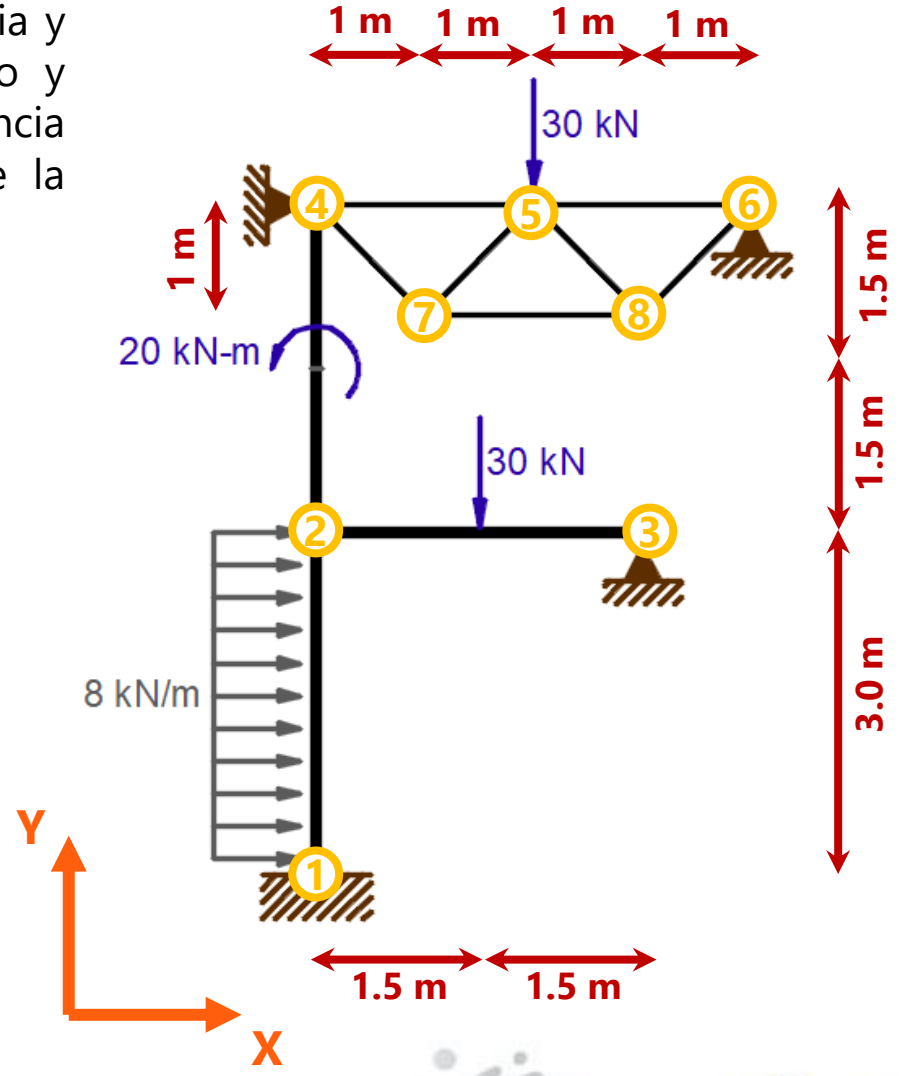
Se tiene el sistema estructural plano mostrado en la figura, conformado por un pórtico con una columna empotrada en la base, una viga intermedia y una armadura superior conectada rígidamente en el nodo izquierdo y apoyada en el extremo derecho. Las vigas y columnas tienen una resistencia a la compresión de f'c = 28 MPa, mientras que los elementos de la armadura un módulo de elasticidad de 200 GPa.

Utilizando el método matricial de rigidez y considerando los ejes globales XY, se solicita:

- Determinar los desplazamientos en el nodo 2 y 5.
- Calcular las reacciones en los apoyos de los nodos 1, 3, 4 y 6.
- Realizar los diagramas de fuerzas internas (axial, cortante y momento).

Desprecie el peso propio de los elementos, considere únicamente las cargas indicadas y las secciones transversales que se muestran a continuación:





#LaUISqueQueremos

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

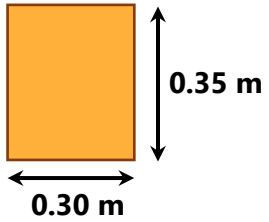
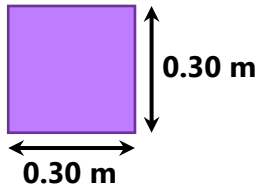
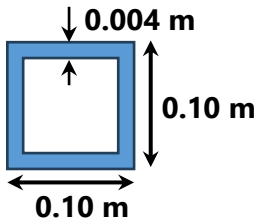
Módulo de elasticidad concreto: $E_c = 4700\sqrt{f'c}\ (MPa)$

Para $f'c = 28\ MPa$: $E_c = 4700\sqrt{28}\ MPa = 24870.06232\ MPa$

$$\boldsymbol{E_c = 24870062.32\ kN/m^2}$$

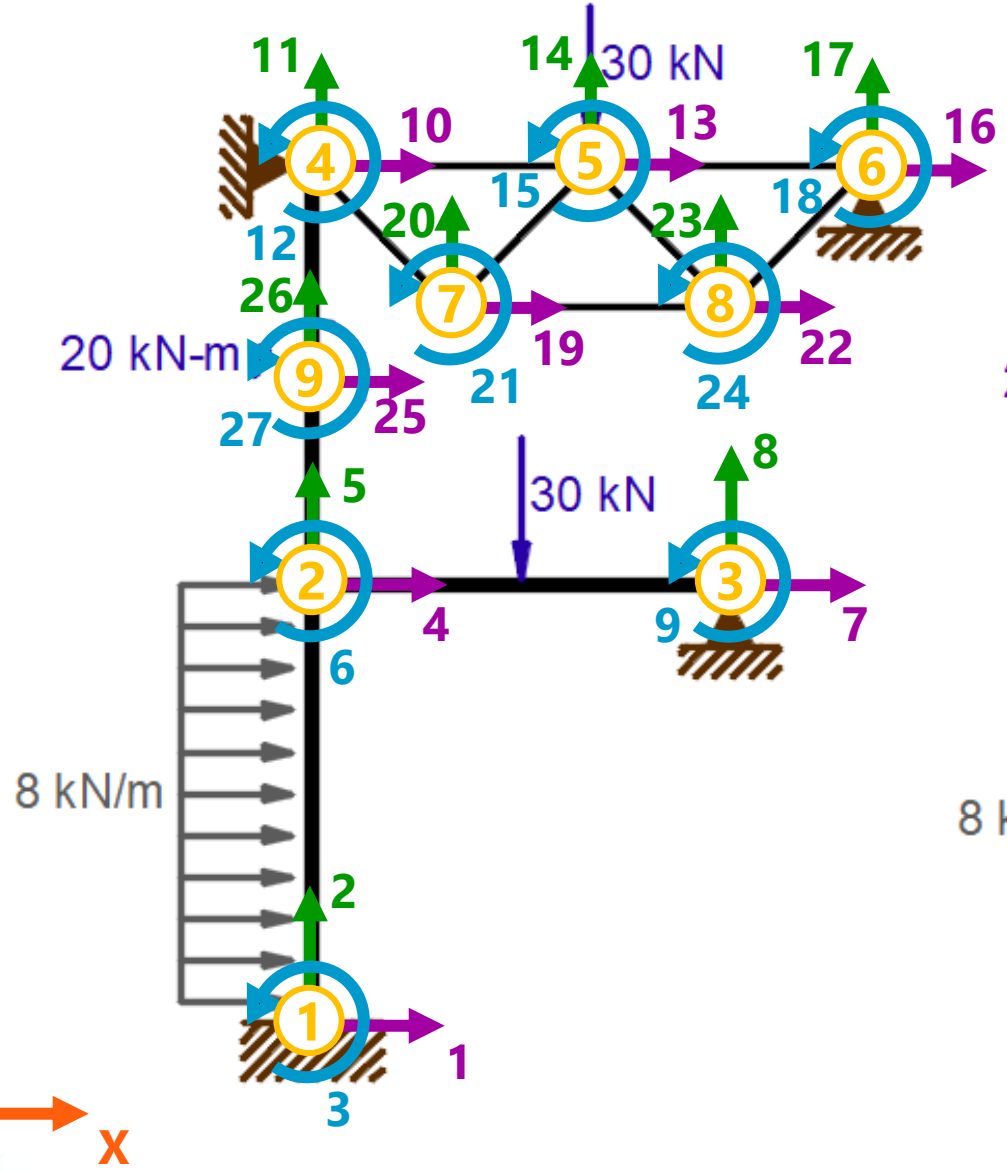
Módulo de elasticidad acero: $E_s = 200GPa$

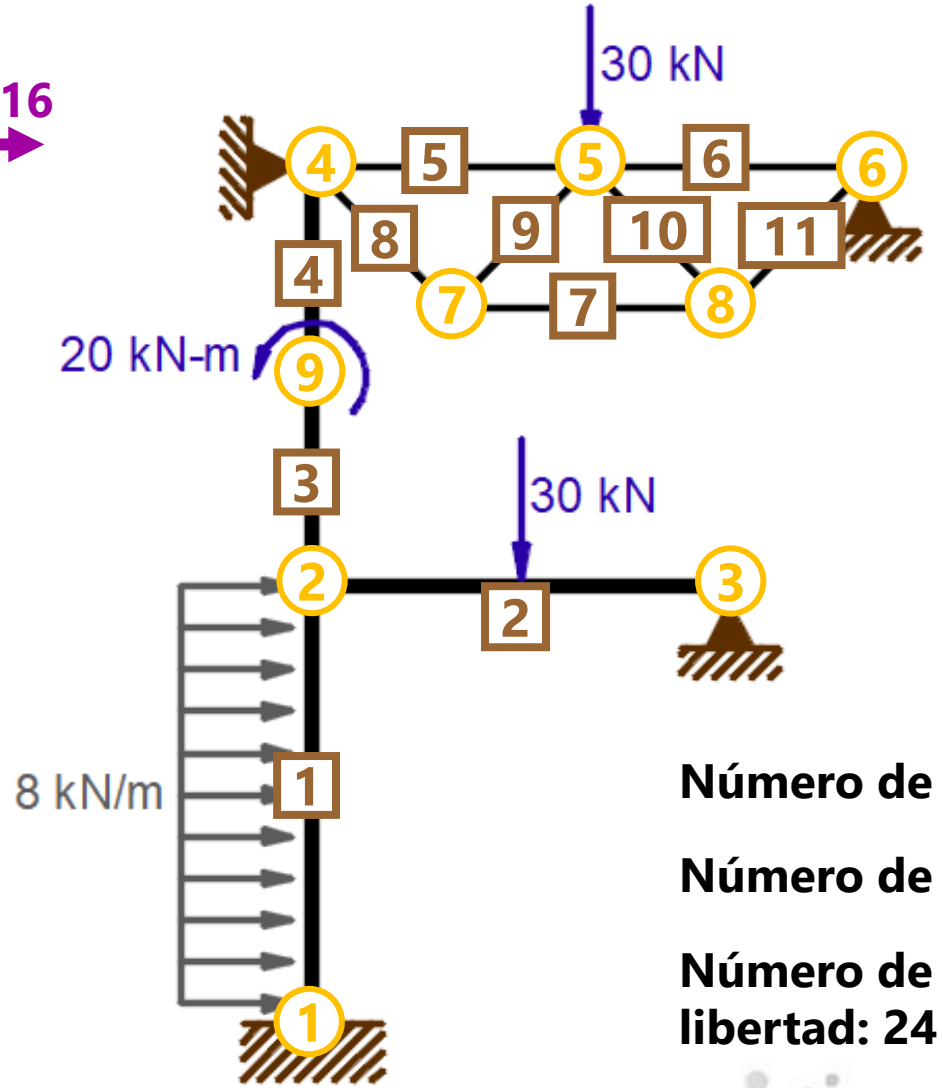
$$\boldsymbol{E_s = 2 \times 10^8\ kN/m^2}$$

Elemento	Vigas	Columnas	Barras
			
Área transversal (m^2)	$b \cdot h$	$b \cdot h$	$4e(L-e)$
Momento de inercia (m^4)	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS





Número de nodos: 8

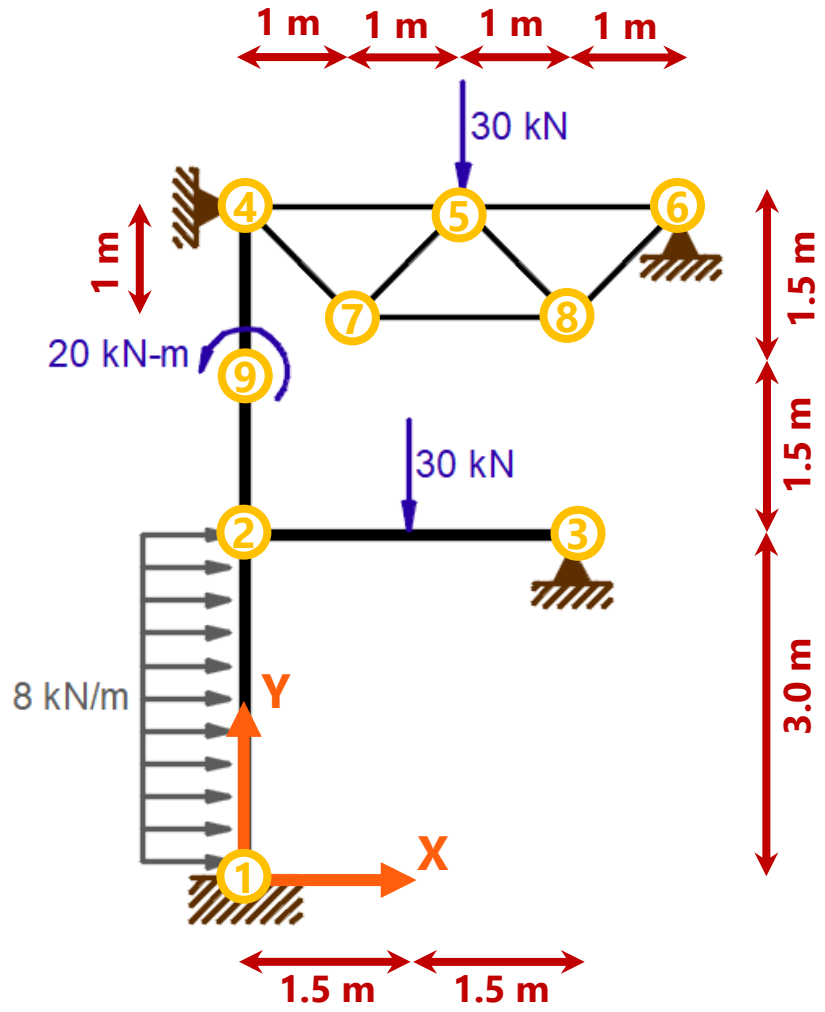
Número de elementos: 10

Número de grados de libertad: 24

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



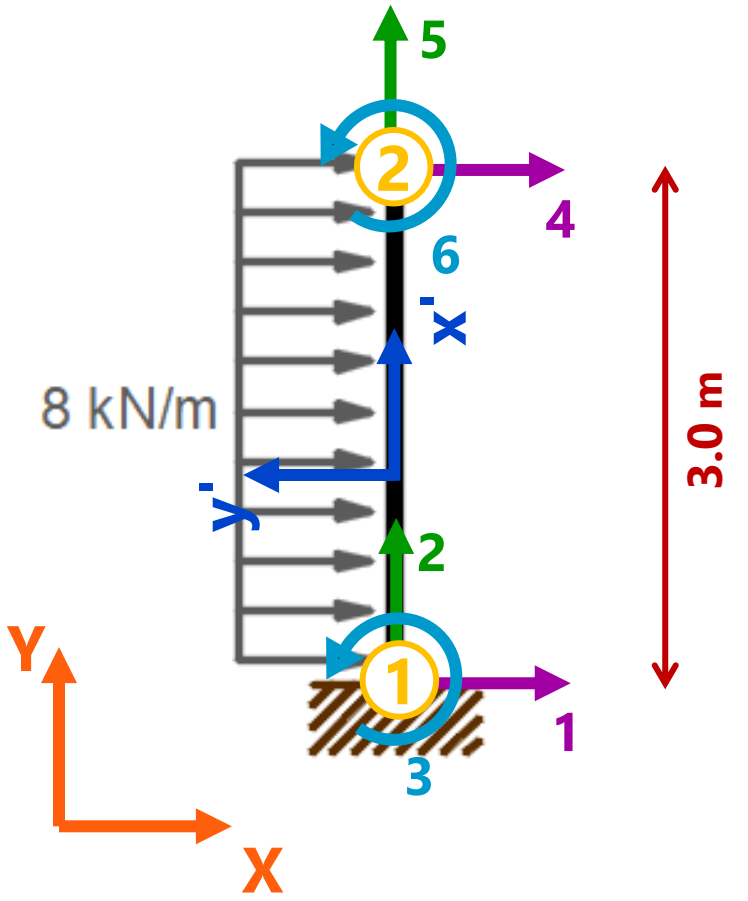
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	3.0
3	3.0	3.0
4	0.0	6.0
5	2.0	6.0
6	4.0	6.0
7	1.0	5.0
8	3.0	5.0
9	0.0	4.5

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90

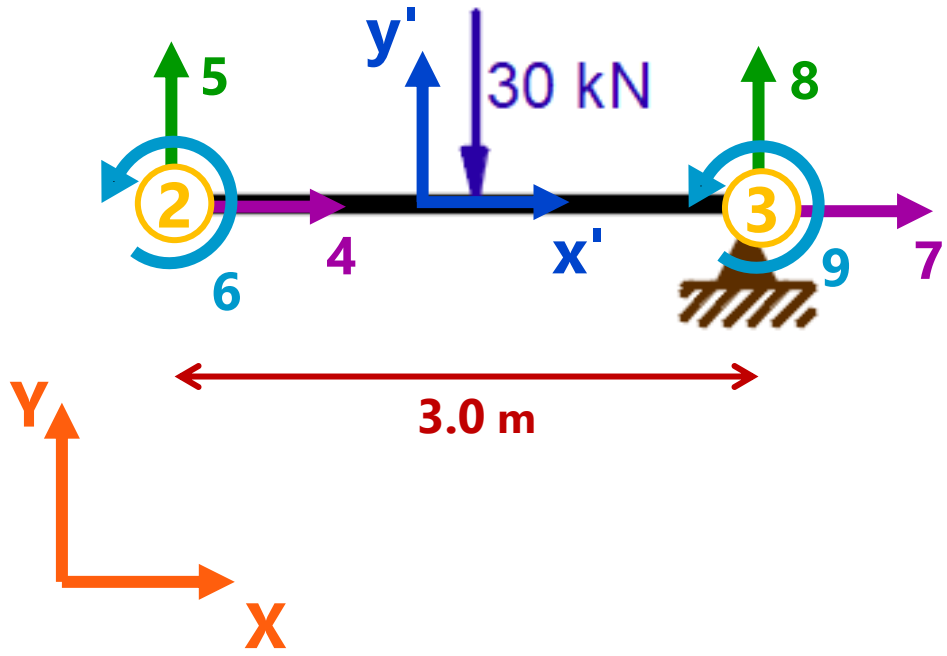


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0

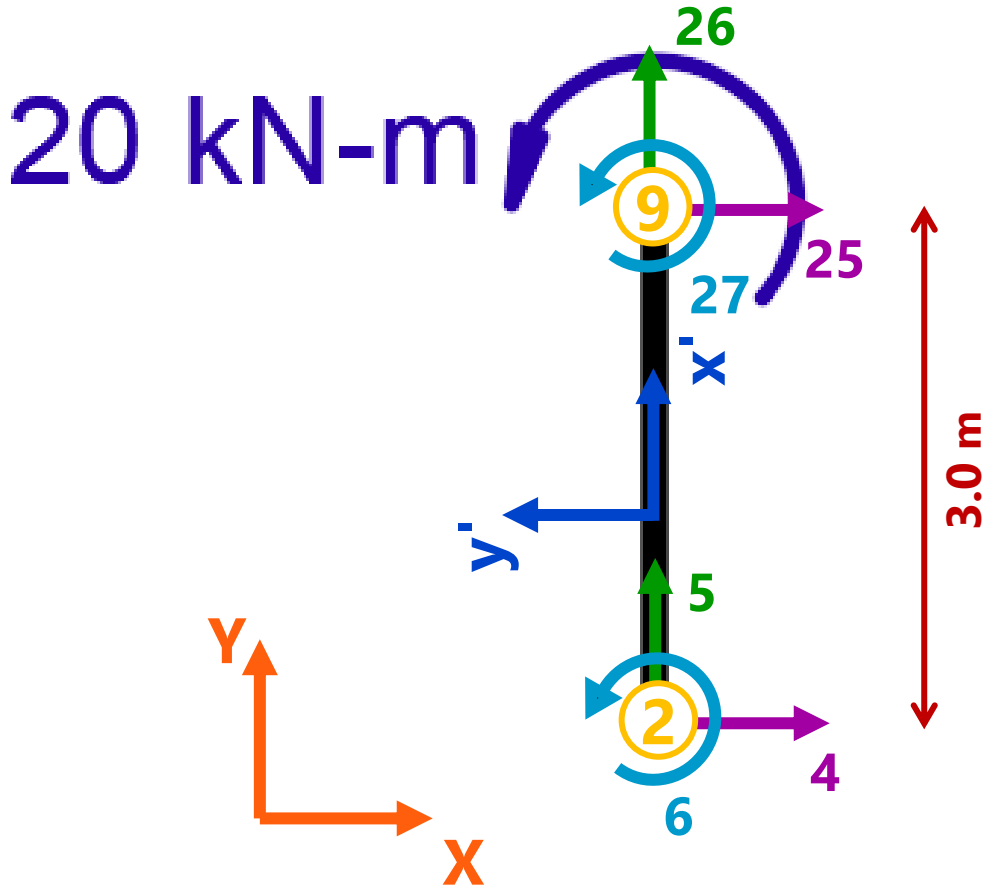


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	9	1.5	90

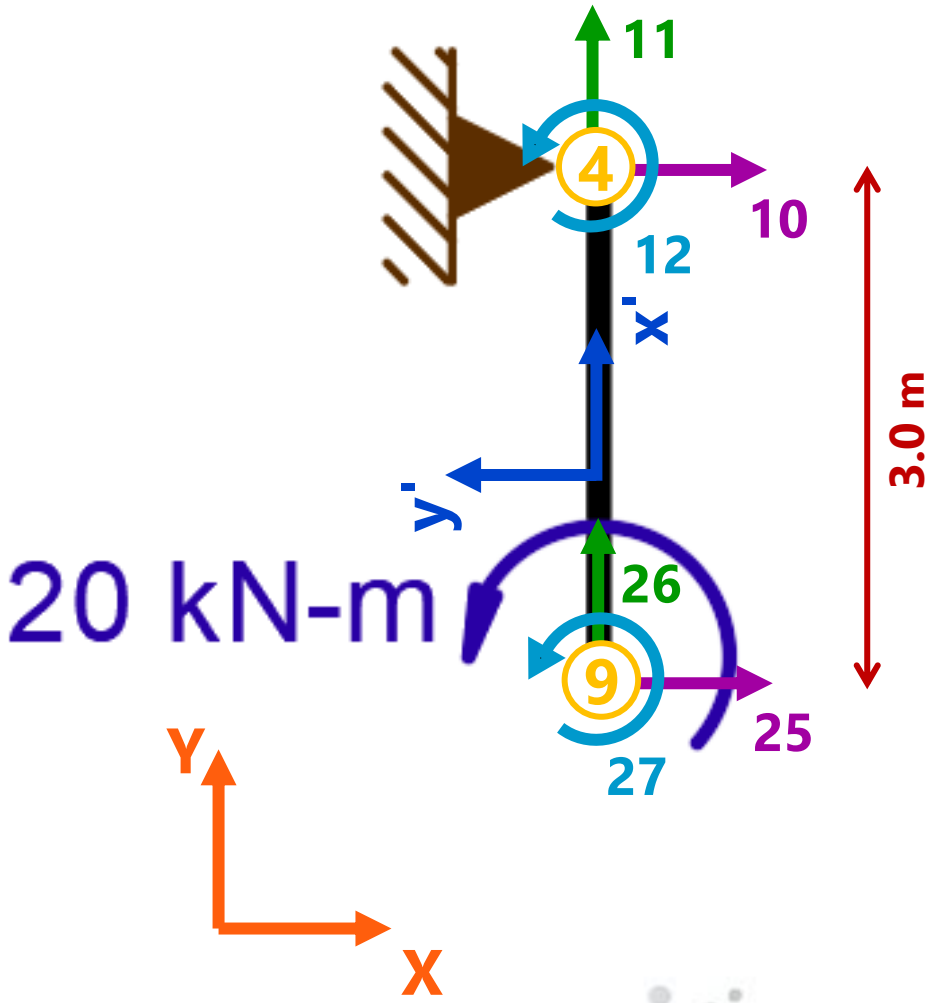


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 4

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	9	1.5	90
4	9	3	1.5	90

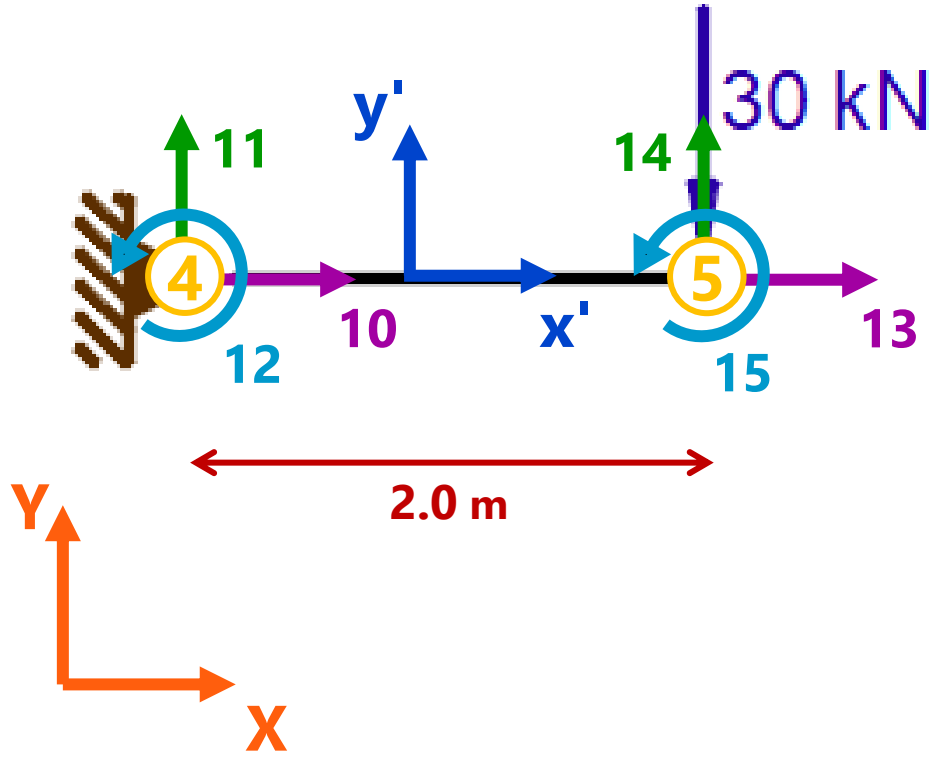


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 5

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	9	1.5	90
4	9	3	1.5	90
5	4	5	2.0	0

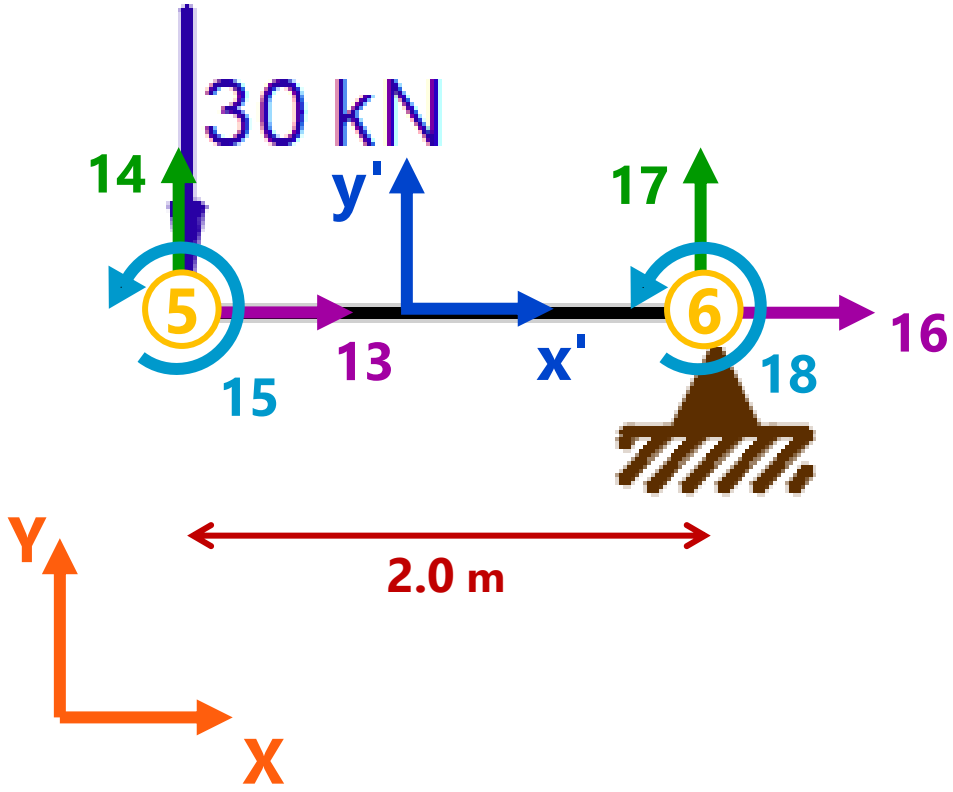


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 6

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	9	1.5	90
4	9	3	1.5	90
5	4	5	2.0	0
6	5	6	2.0	0

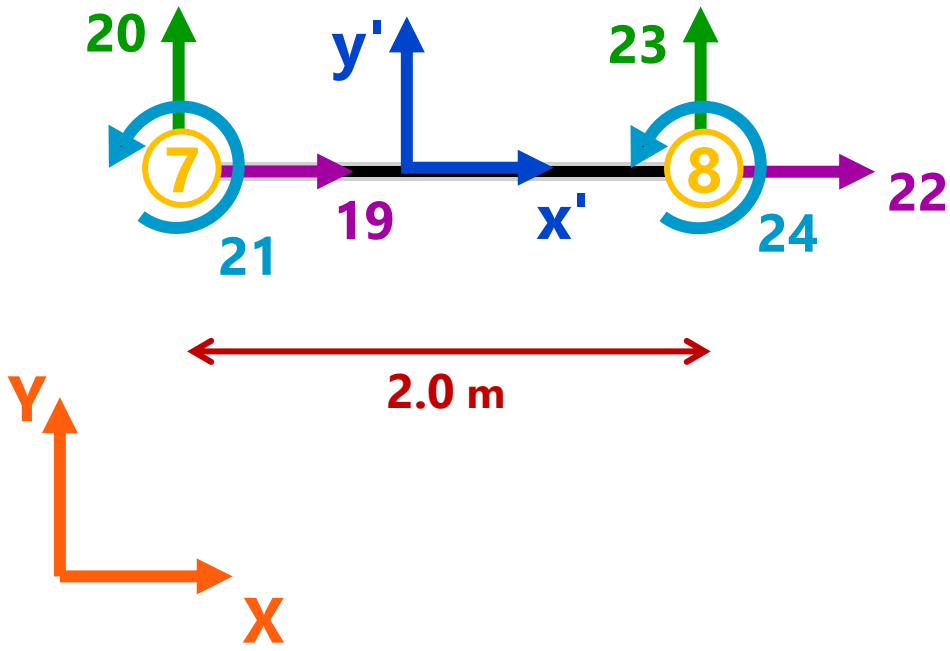


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 7

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	9	1.5	90
4	9	3	1.5	90
5	4	5	2.0	0
6	5	6	2.0	0
7	7	8	2.0	0

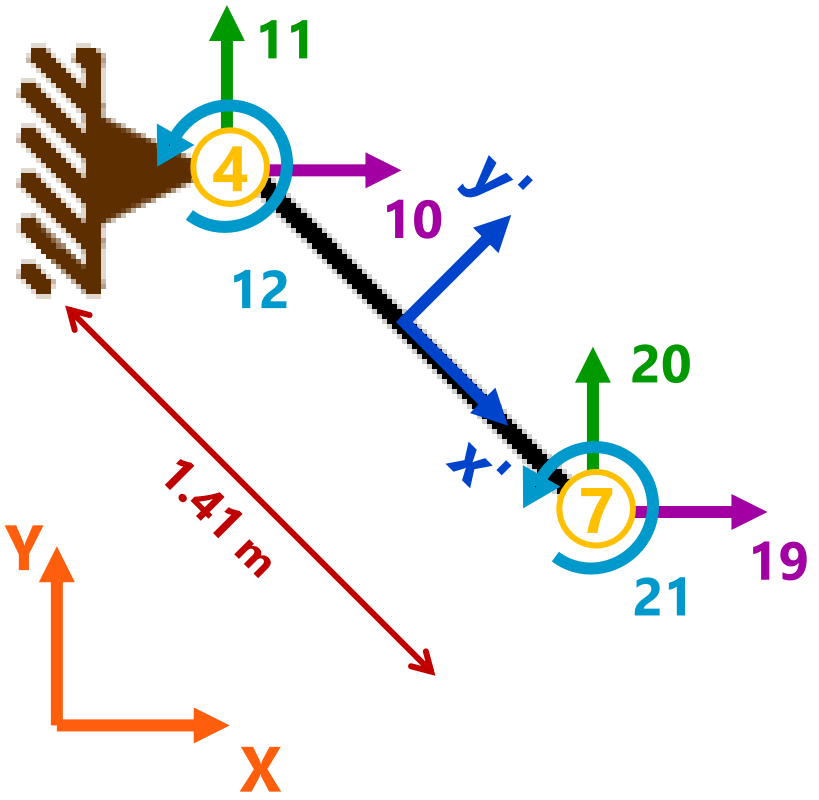


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 8

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	9	1.5	90
4	9	3	1.5	90
5	4	5	2.0	0
6	5	6	2.0	0
7	7	8	2.0	0
8	4	7	1.41	-45

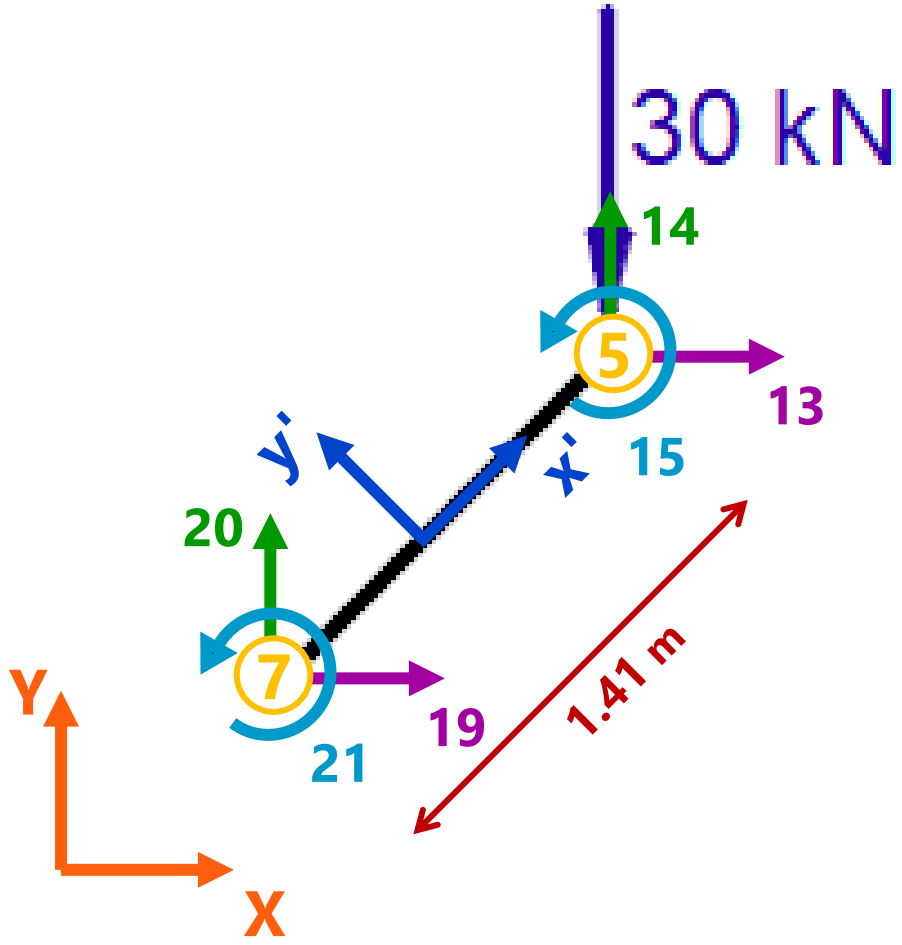


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 9

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	9	1.5	90
4	9	3	1.5	90
5	4	5	2.0	0
6	5	6	2.0	0
7	7	8	2.0	0
8	4	7	1.41	-45
9	7	5	1.41	45

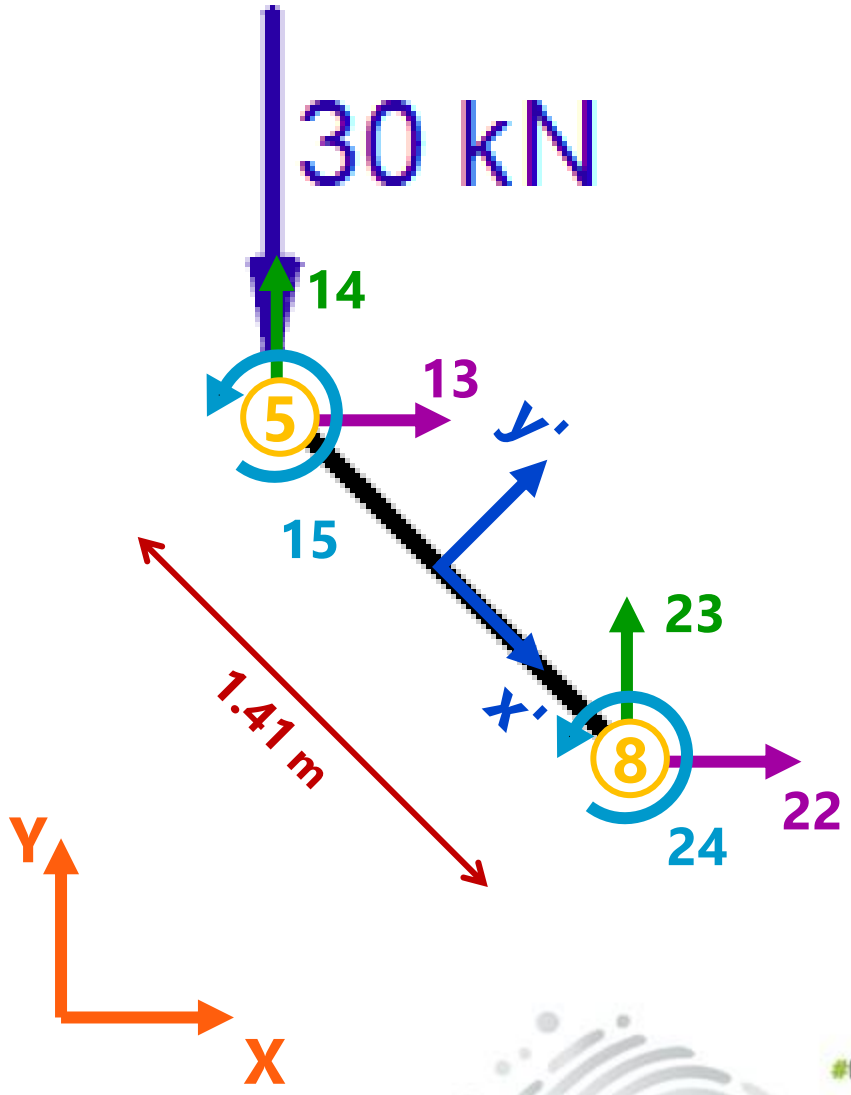


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 10

ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	9	1.5	90
4	9	3	1.5	90
5	4	5	2.0	0
6	5	6	2.0	0
7	7	8	2.0	0
8	4	7	1.41	-45
9	7	5	1.41	45
10	5	8	1.41	-45

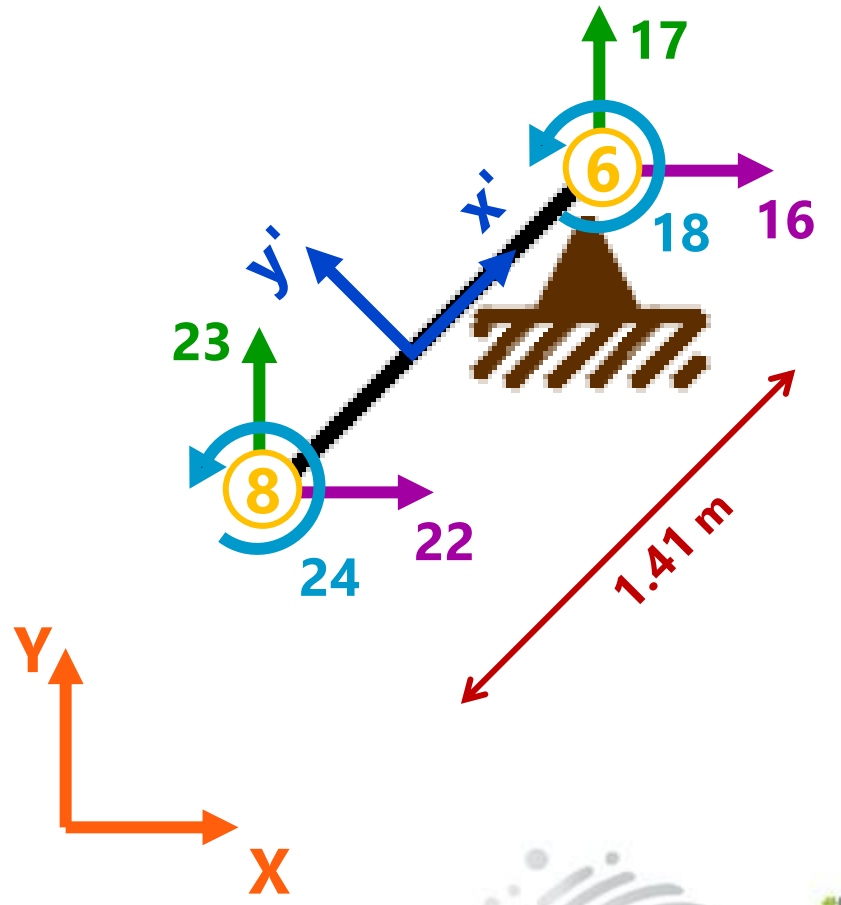


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 11

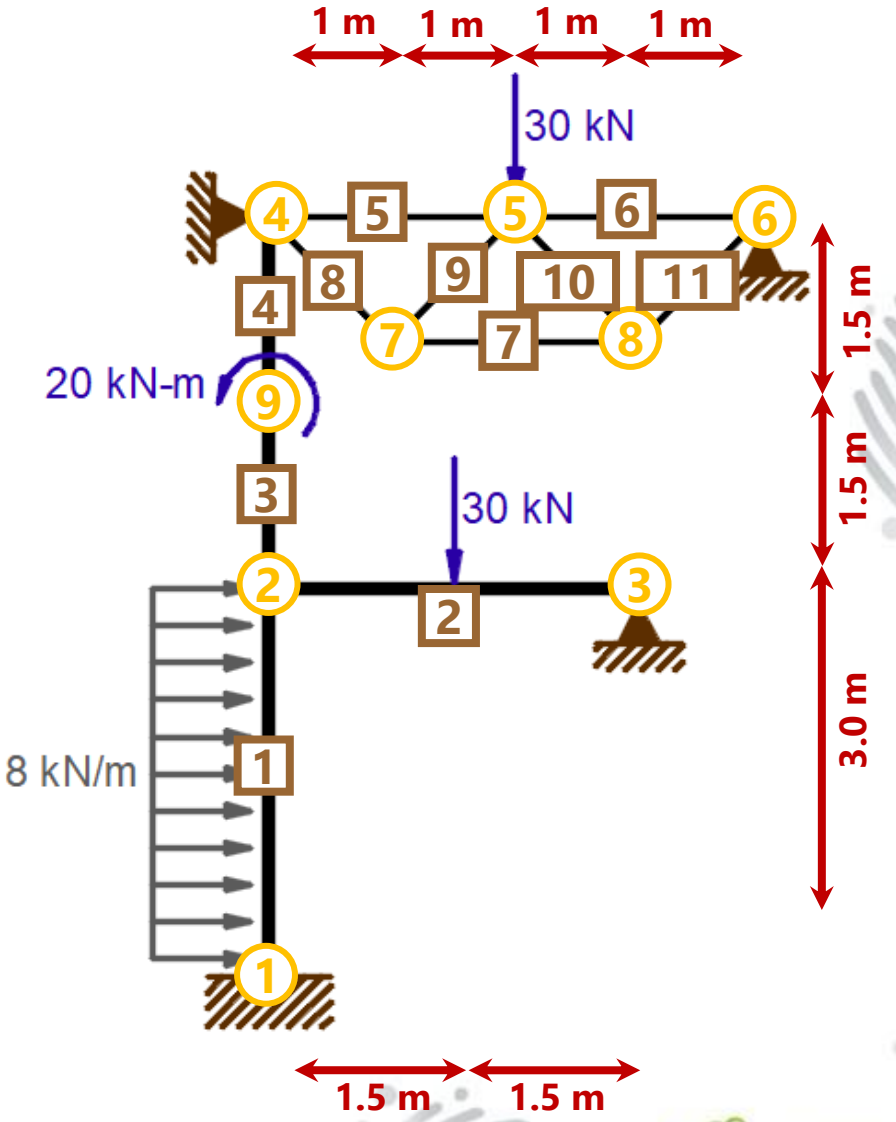
ELEM	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	1	2	3.0	90
2	2	3	3.0	0
3	2	9	1.5	90
4	9	3	1.5	90
5	4	5	2.0	0
6	5	6	2.0	0
7	7	8	2.0	0
8	4	7	1.41	-45
9	7	5	1.41	45
10	5	8	1.41	-45
11	8	6	1.41	45



#LaUISqueQueremos

CARGAS SOBRE LOS ELEMENTOS

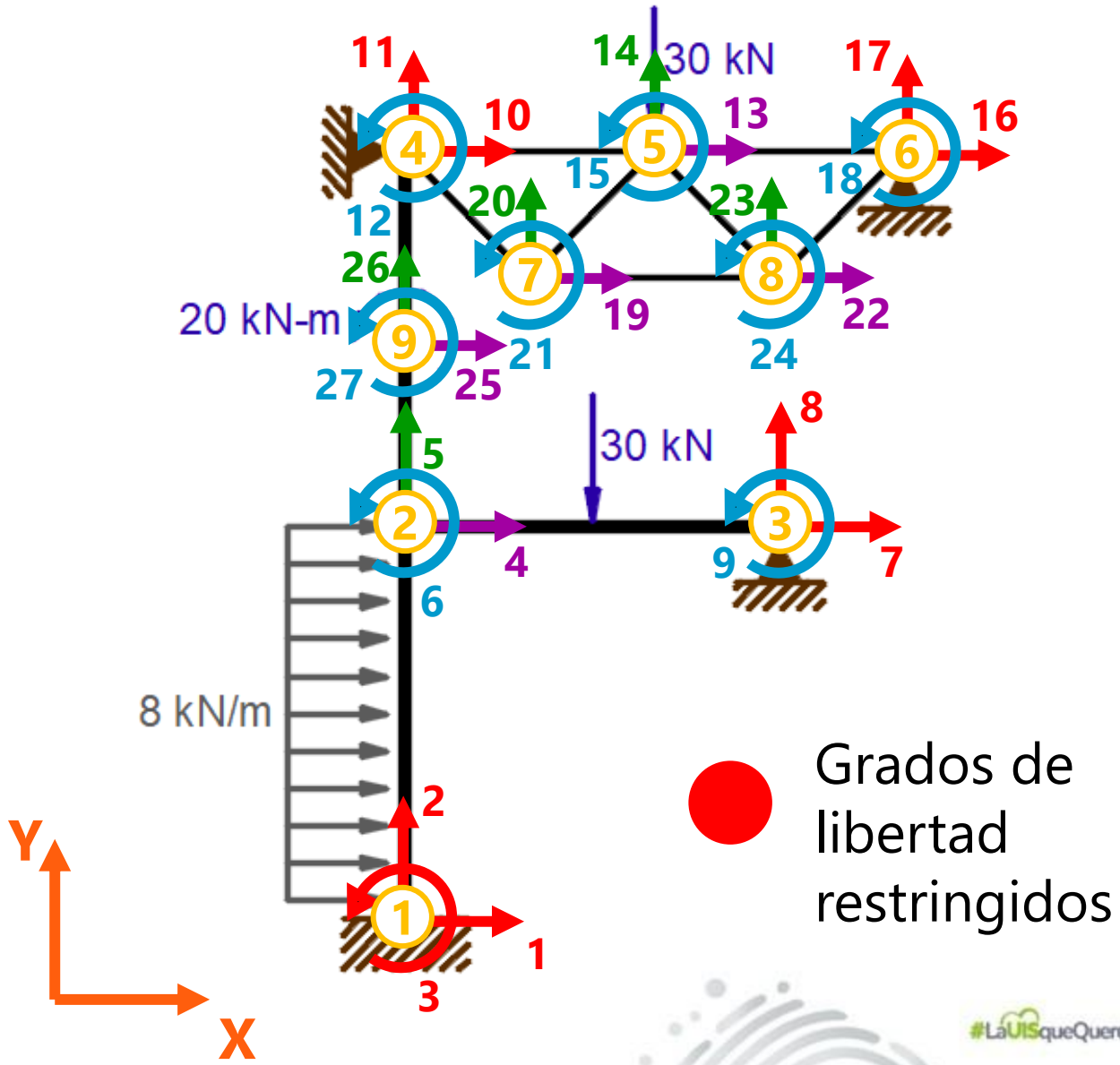
ELEM	TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	PARÁMETRO 1	PARÁMETRO 2
1	Uniforme	Local y	8.0	8.0
2	Puntual	Local y	30	1.5
3	—	—	—	—
4	—	—	—	—
5	—	—	—	—
6	—	—	—	—
7	—	—	—	—
8	—	—	—	—
9	—	—	—	—
10	—	—	—	—
11	—	—	—	—



#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CONTORNO

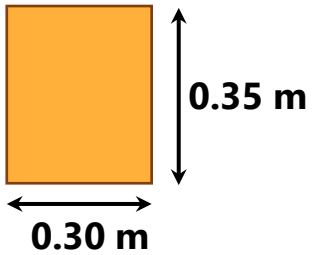
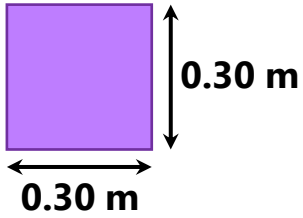
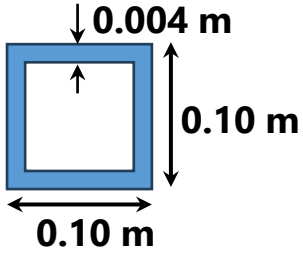
NODO	X [m]	Y [m]
1	0.0	0.0
2	0.0	3.0
3	3.0	3.0
4	0.0	6.0
5	2.0	6.0
6	4.0	6.0
7	1.0	5.0
8	3.0	5.0
9	0.0	4.5



PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

Módulo de elasticidad del concreto: $E_c = 24870062.32\ {}^{kN}/_{m^2}$

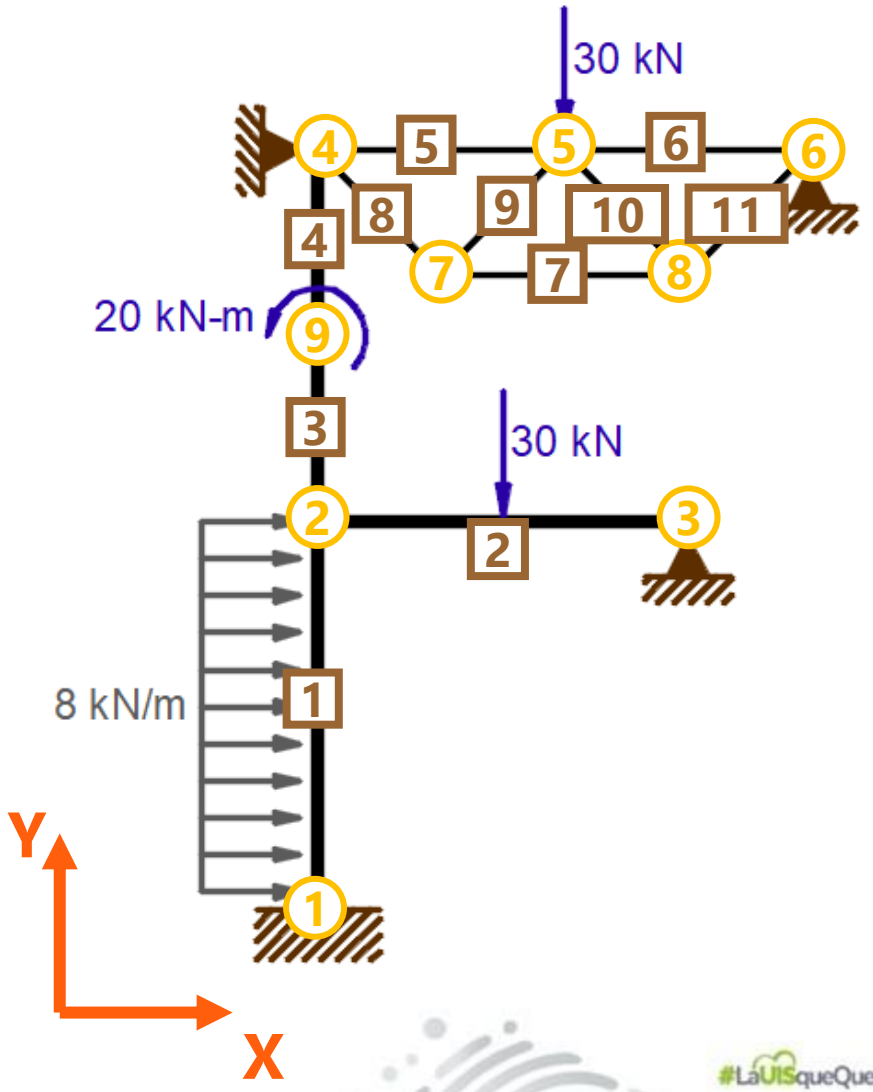
Módulo de elasticidad del acero: $E_s = 2 \times 10^8\ {}^{kN}/_{m^2}$

Elemento	Viga	Columna	Barra
			
Área transversal (m^2)	0.105	0.09	$1.536x10^{-3}$
Momento de inercia (m^4)	$1.071875x10^{-3}$	$6.75x10^{-4}$	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

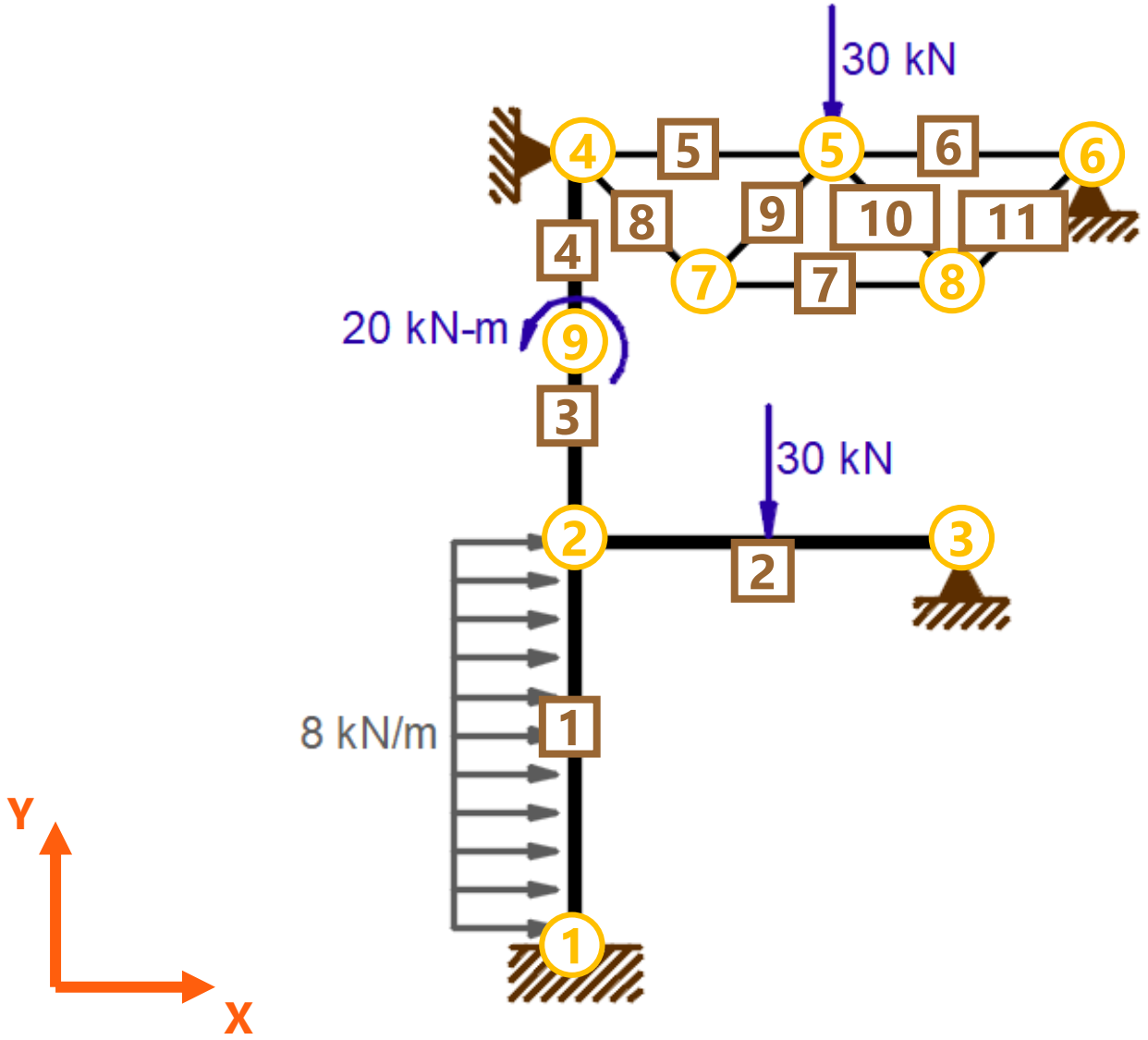
CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

ELEM	NODO i	NODO f	TIPO
1	1	2	Columna
2	2	3	Viga
3	2	9	Columna
4	9	4	Columna
5	4	5	Barra
6	5	6	Barra
7	7	8	Barra
8	4	7	Barra
9	7	5	Barra
10	5	8	Barra
11	8	6	Barra

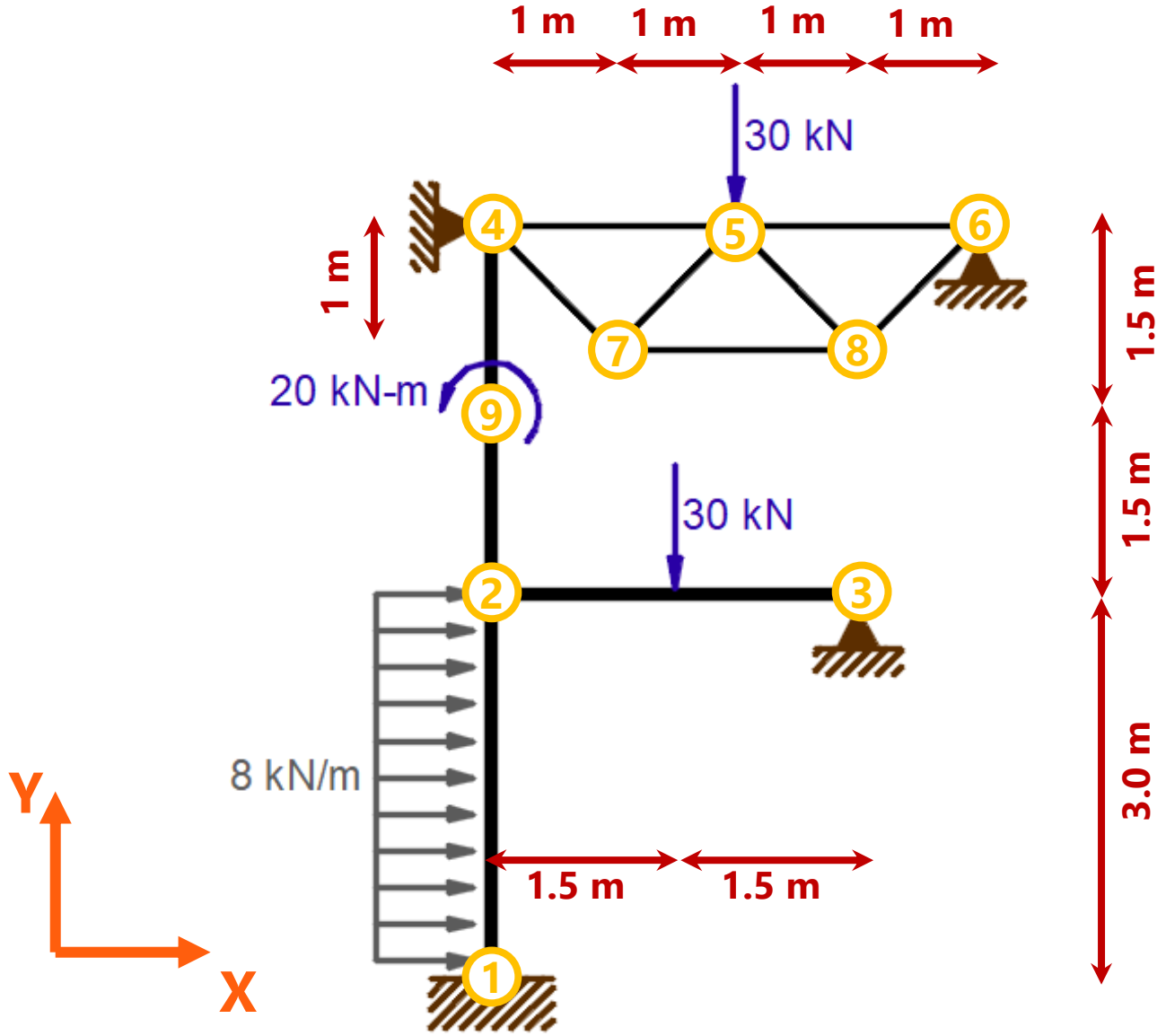


#LaUISqueQueremos

DEFINICIÓN DE CARGAS



GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 2

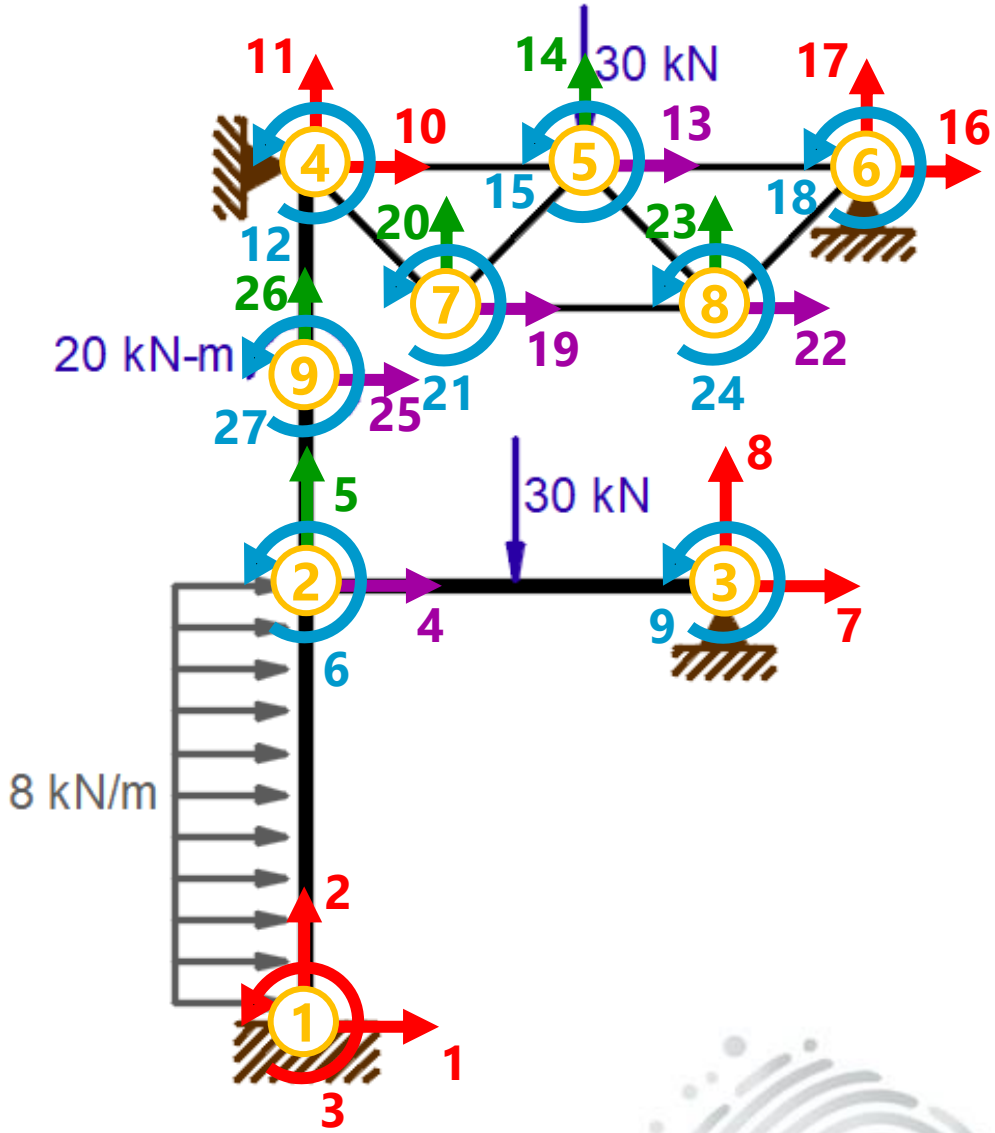
REACCIONES

Nodo 1: Rx = -9.898 kN,
Ry = 9.390 kN,
Mz = 3.985 kN-m

Nodo 3: Rx = -20.420 kN,
Ry = 11.220 kN

Nodo 4: Rx = -8.682 kN,
Ry = 24.390 kN

Nodo 6: Rx = 15.000 kN,
Ry = 15.000 kN



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 2

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
2	2.346e-05	-1.259e-05	-2.035e-04
3	0.000e+00	0.000e+00	4.245e-04
4	0.000e+00	0.000e+00	-1.099e-04
5	8.911e-17	-4.715e-04	-1.914e-05
6	0.000e+00	0.000e+00	2.663e-04
7	-9.766e-05	-2.358e-04	-2.244e-04
8	9.766e-05	-2.358e-04	1.956e-04
9	4.681e-05	-6.293e-06	3.135e-04

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 2

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N (kN)**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
1	9.390	Compresión	9.898	14.102	3.985	-10.292
2	20.420	Compresión	18.780	11.220	11.339	-0.000
3	-9.390	Tracción	6.318	-6.318	-1.047	10.524
4	-9.390	Tracción	6.318	-6.318	9.476	-0.000
5	0.000	Nulo	0.000	-0.000	0.000	0.000
6	0.000	Nulo	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
7	-30.000	Tracción	-0.000	0.000	-0.000	0.000
8	-21.213	Tracción	0.000	-0.000	0.000	0.000
9	21.213	Compresión	0.000	-0.000	0.000	0.000
10	21.213	Compresión	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
11	-21.213	Tracción	0.000	-0.000	0.000	0.000

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Sistemas Mixtos
Ejercicio 3
Método Matricial de rigidez en Python

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

#LaUISqueQueremos

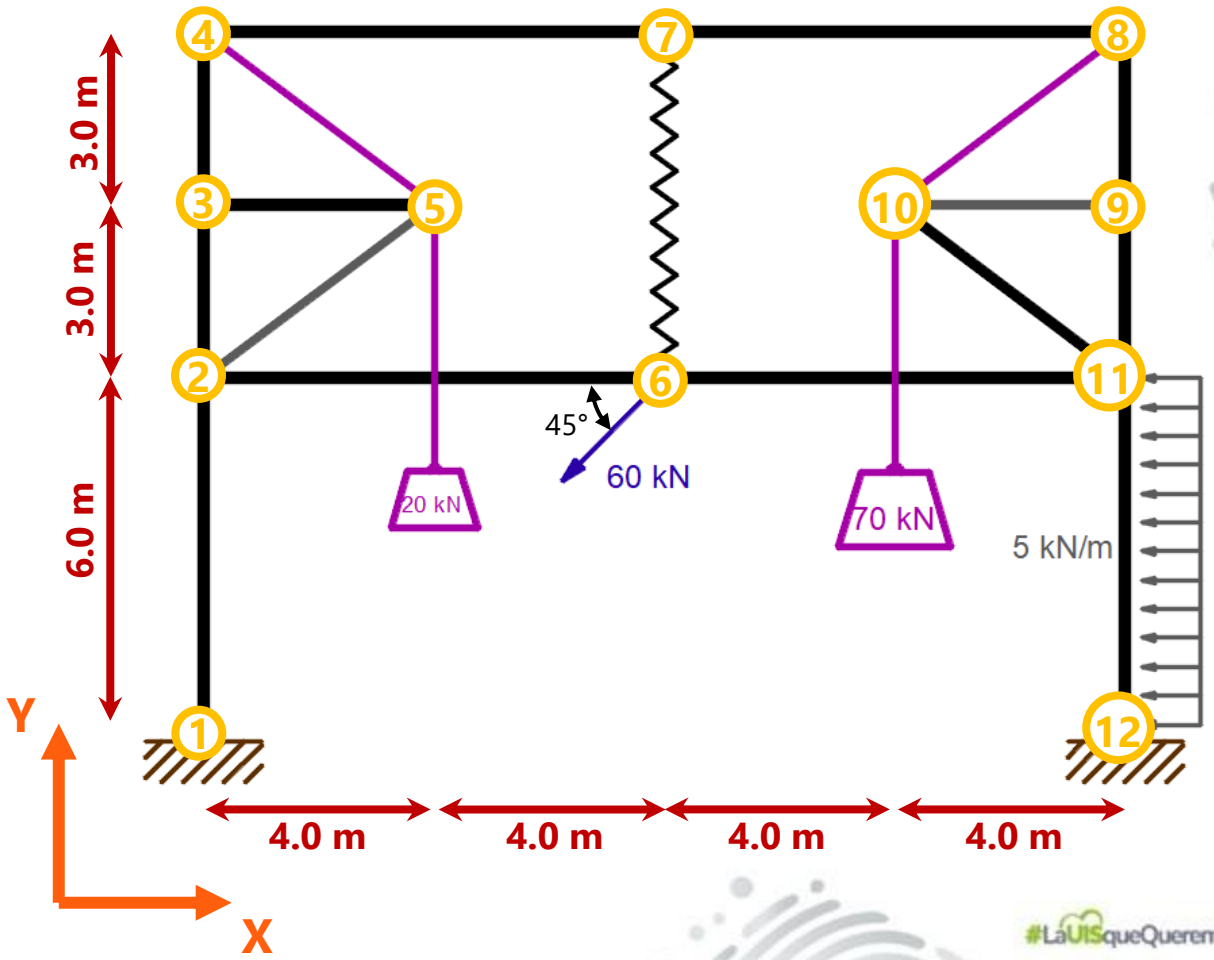
SISTEMAS MIXTOS: EJERCICIO 3

Se tiene el sistema estructural plano mostrado en la figura, conformado por un pórtico de concreto con columnas empotradas en la base, conectado a barras y cables de acero, además de un resorte vertical central. Los cables se consideran inextensibles y las poleas del los nodos 5 y 10 ideales (sin fricción y de radio despreciable).

El concreto tiene una resistencia a la compresión f'c de 28 MPa y el acero tiene un módulo de elasticidad de 200 GPa.
Las vigas tienen secciones de 0.3X0.35 m, las columnas 0.3X0.3 m, las barras son tubulares de 100 mm de lado y 4 mm de espesor, y cables de 10 cm^2.
El resorte vertical tiene una rigidez de 10000 kN/m.

Utilizando el método matricial de rigidez y considerando los ejes globales XY, se solicita:
- Determinar los desplazamientos de los nodos 5, 6 y 10.
- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Obtener las fuerzas internas en los elementos.

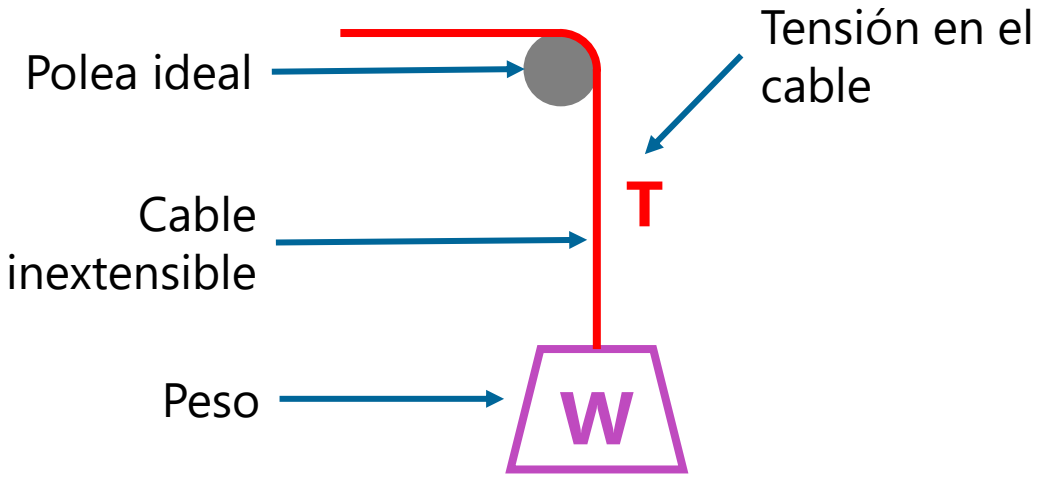
Desprecie el peso propio de los elementos y considere únicamente las cargas indicadas.



#LaUISqueQueremos

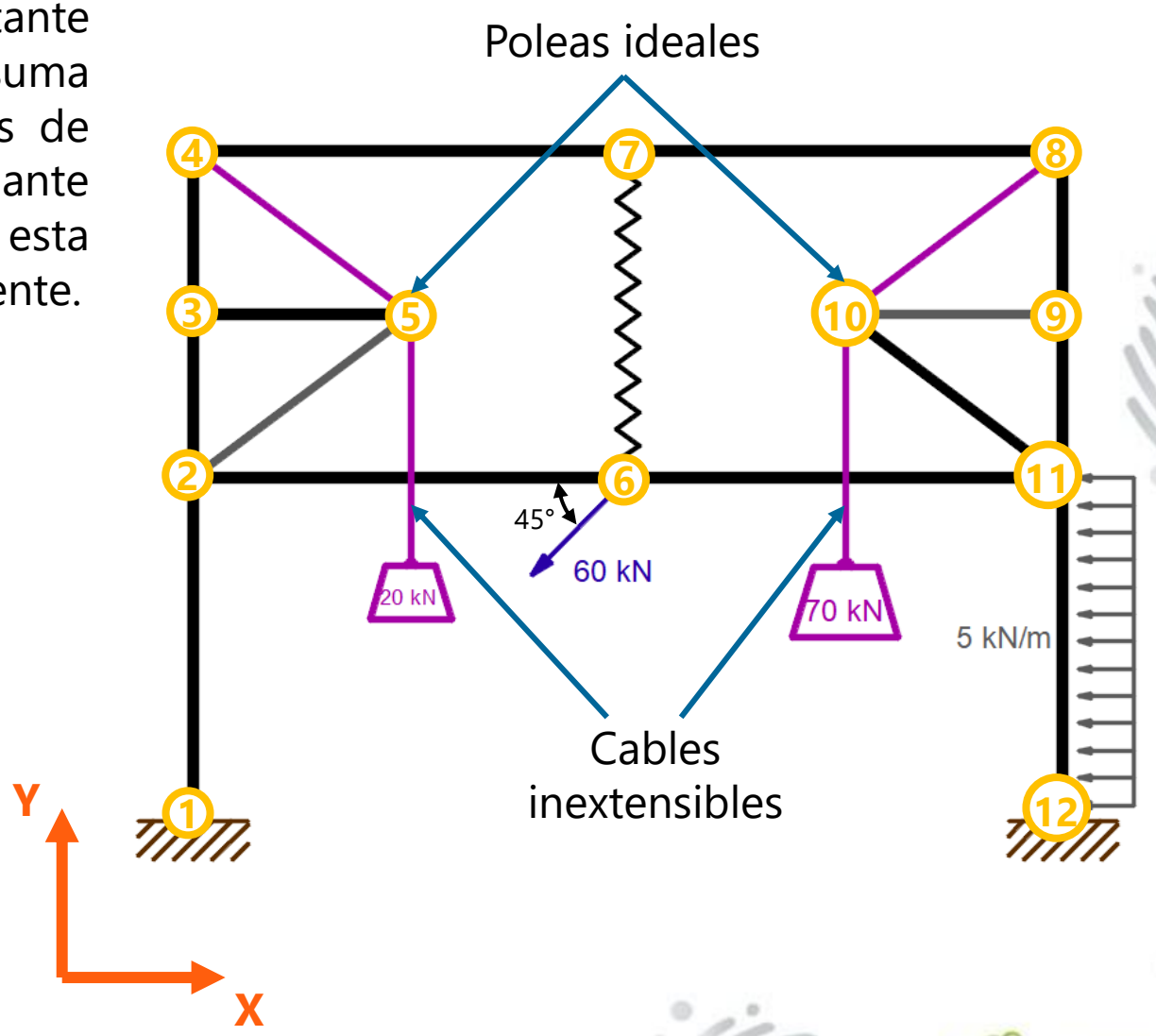
TRASPASO DE FUERZAS

En las cables inextensibles, la tensión (T) es constante en todo el cable. La polea transmite al nodo la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por los tramos de cable que llegan a ella. Por lo tanto, la carga colgante (W) debe trasladarse al nodo como parte de esta resultante, no como una fuerza externa independiente.



$$Tensión_{Cable} = Carga_{Colgante}$$

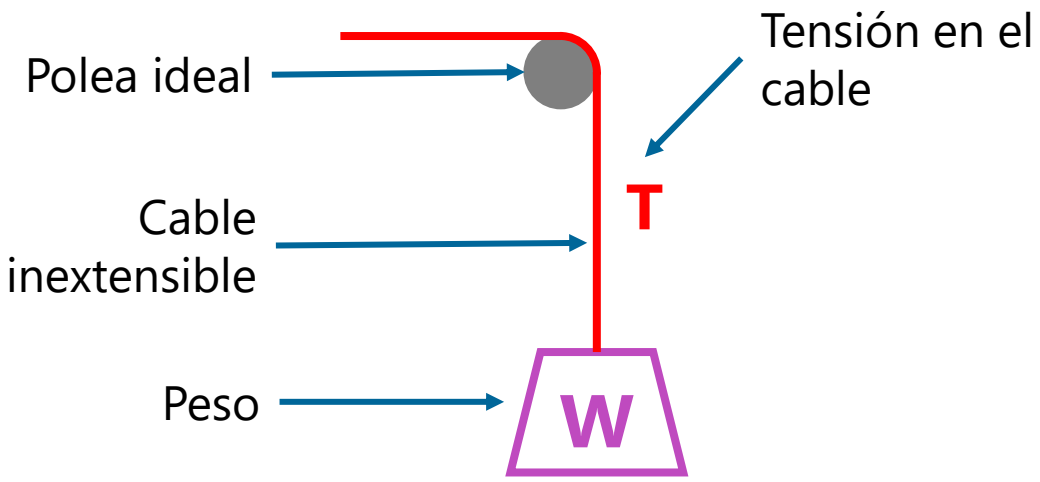
$$T = W$$



#LaUISqueQueremos

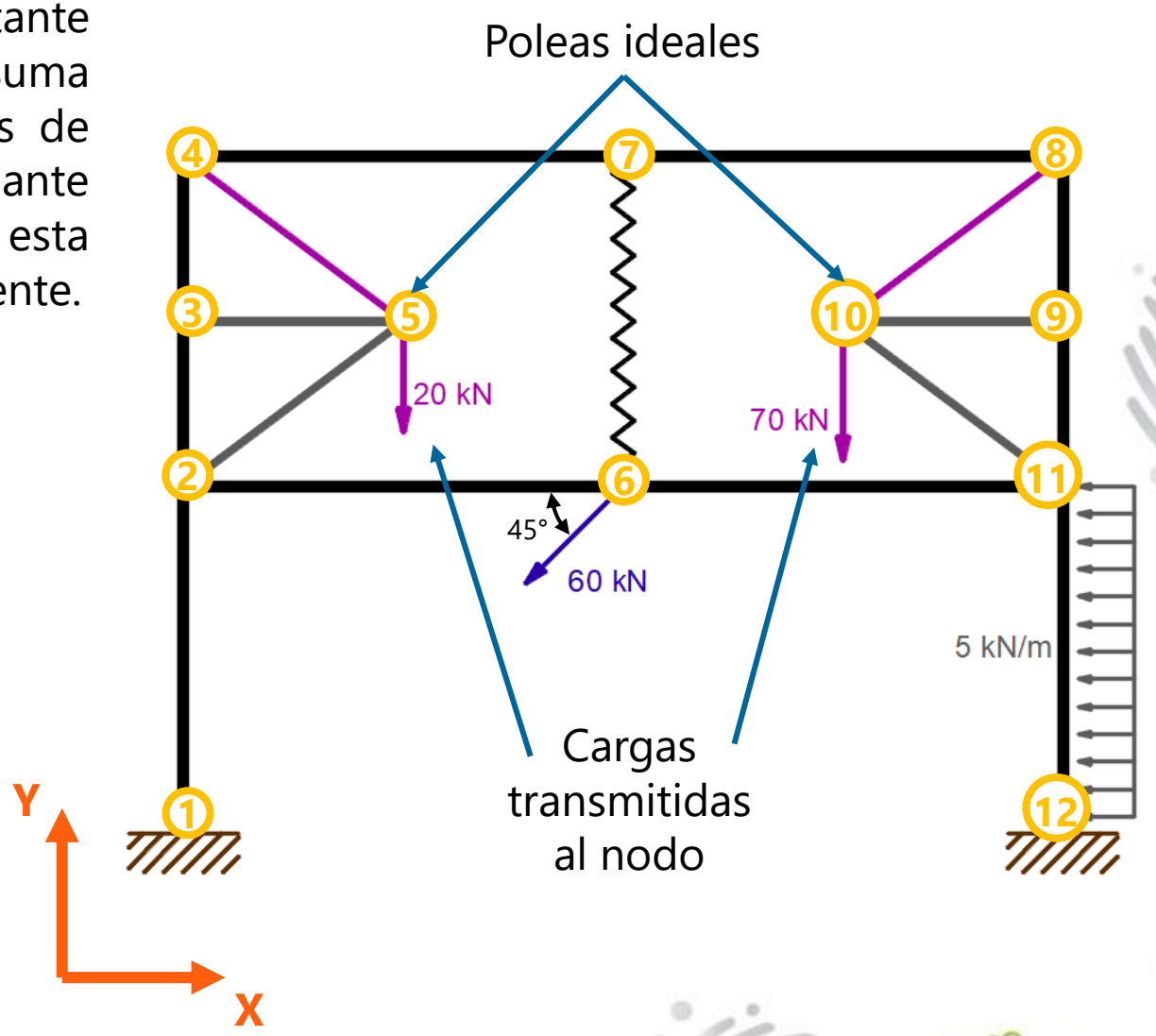
TRASPASO DE FUERZAS

En las cables inextensibles, la tensión (T) es constante en todo el cable. La polea transmite al nodo la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por los tramos de cable que llegan a ella. Por lo tanto, la carga colgante (W) debe trasladarse al nodo como parte de esta resultante, no como una fuerza externa independiente.



$$Tensión_{Cable} = Carga_{Colgante}$$

$$T = W$$



#LaUISqueQueremos

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

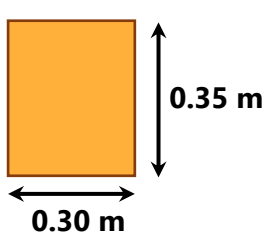
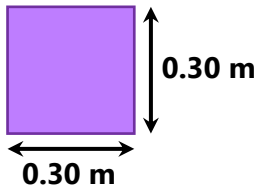
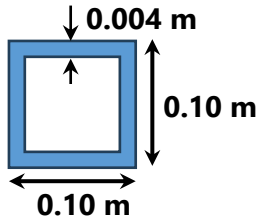
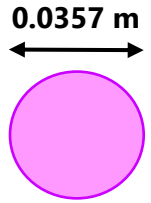
Módulo de elasticidad concreto: $E_c = 4700\sqrt{f'c}\ (MPa)$

Para $f'c = 28\ MPa$: $E_c = 4700\sqrt{28}\ MPa = 24870.06232\ MPa$

$$\boldsymbol{E_c = 24870062.32\ kN/m^2}$$

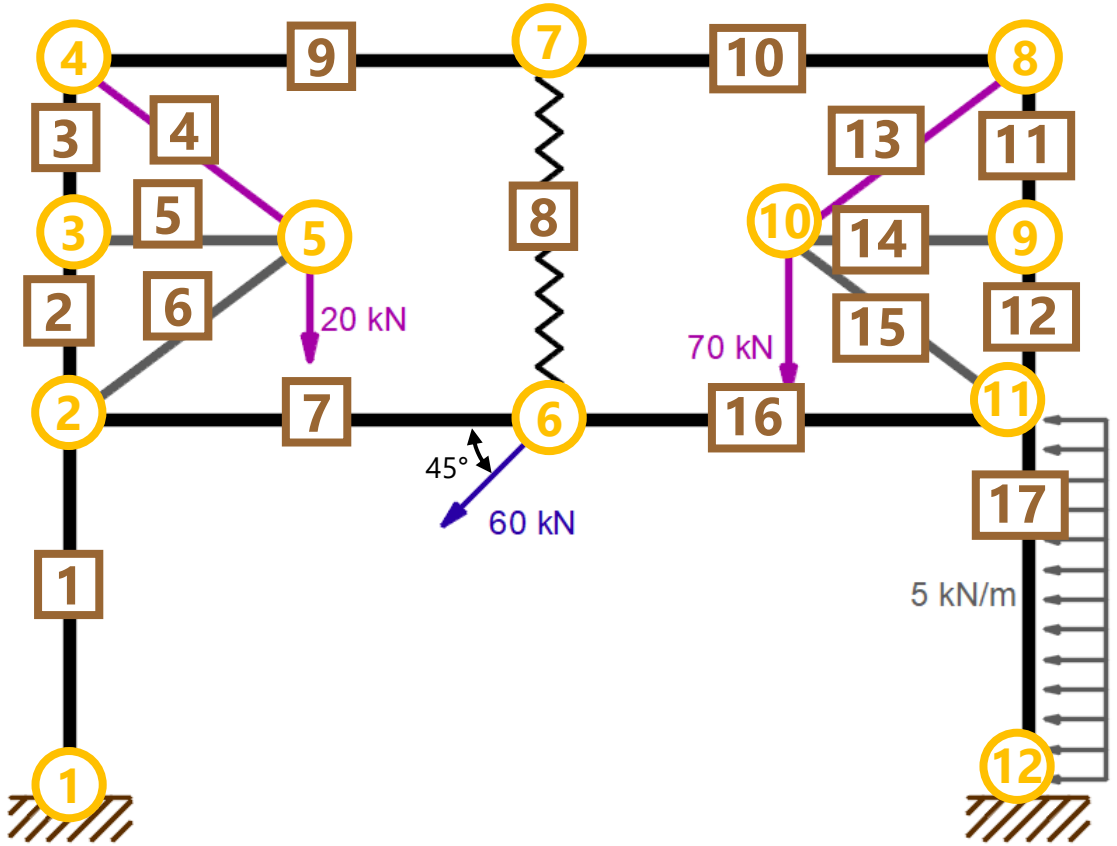
Módulo de elasticidad acero: $E_s = 200GPa$

$$\boldsymbol{E_s = 2 \times 10^8\ kN/m^2}$$

Elemento	Vigas	Columnas	Barras	Cables
				
Área transversal (m^2)	$b \cdot h$	$b \cdot h$	$4e(L-e)$	0.001
Momento de inercia (m^4)	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	1×10^{-16} * Inercia despreciable	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS



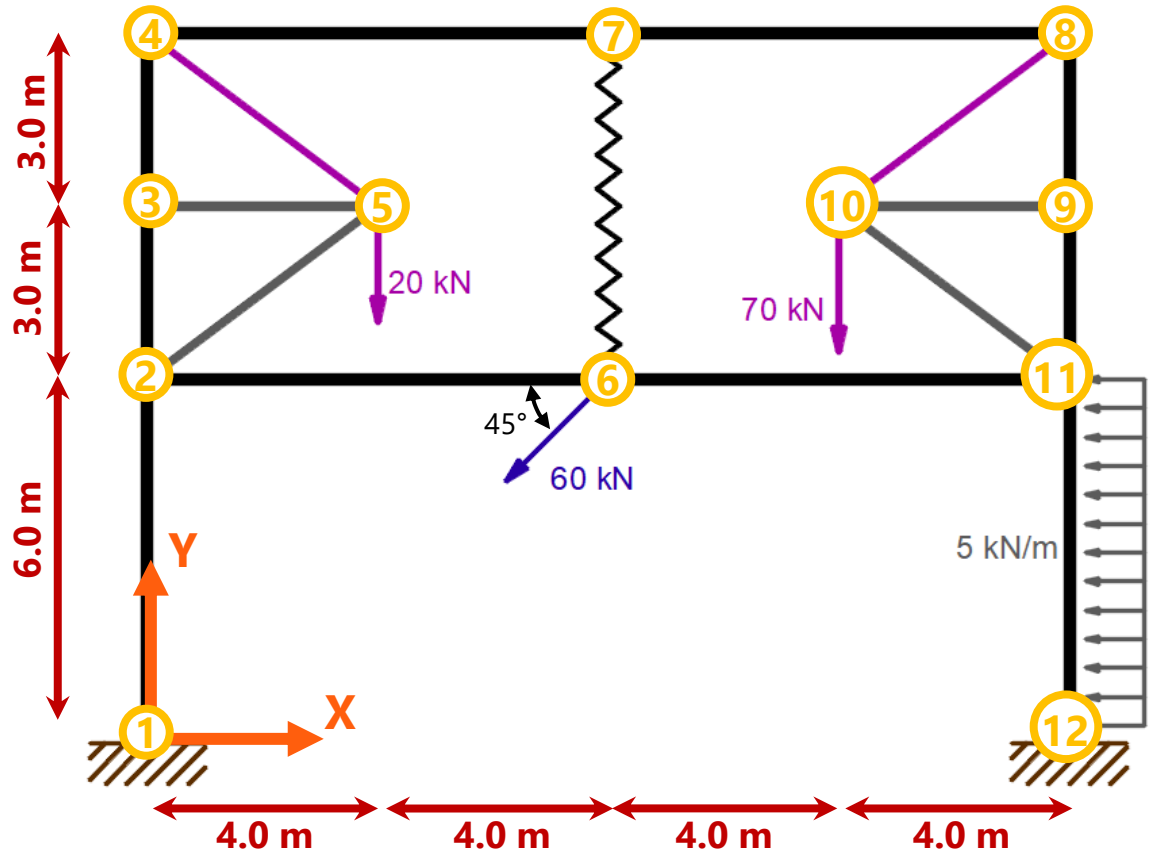
Número de nodos: 12

Número de elementos: 17

Número de grados de libertad: 24

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



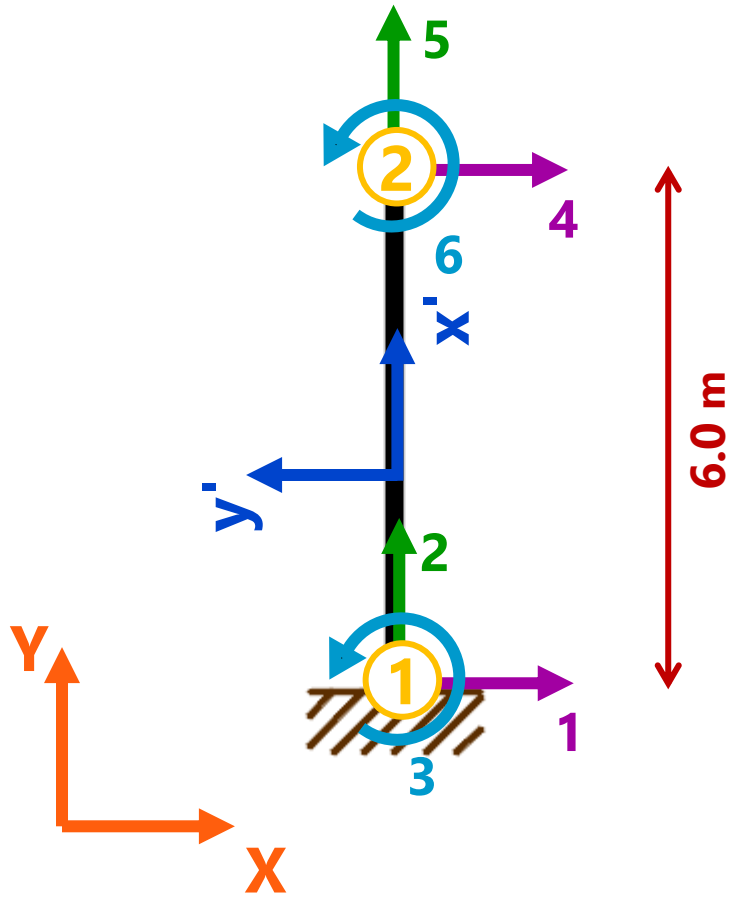
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	6.0
3	0.0	9.0
4	0.0	12.0
5	4.0	9.0
6	8.0	6.0
7	8.0	12.0
8	16.0	12.0
9	16.0	9.0
10	12.0	9.0
11	16.0	6.0
12	16.0	0.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90

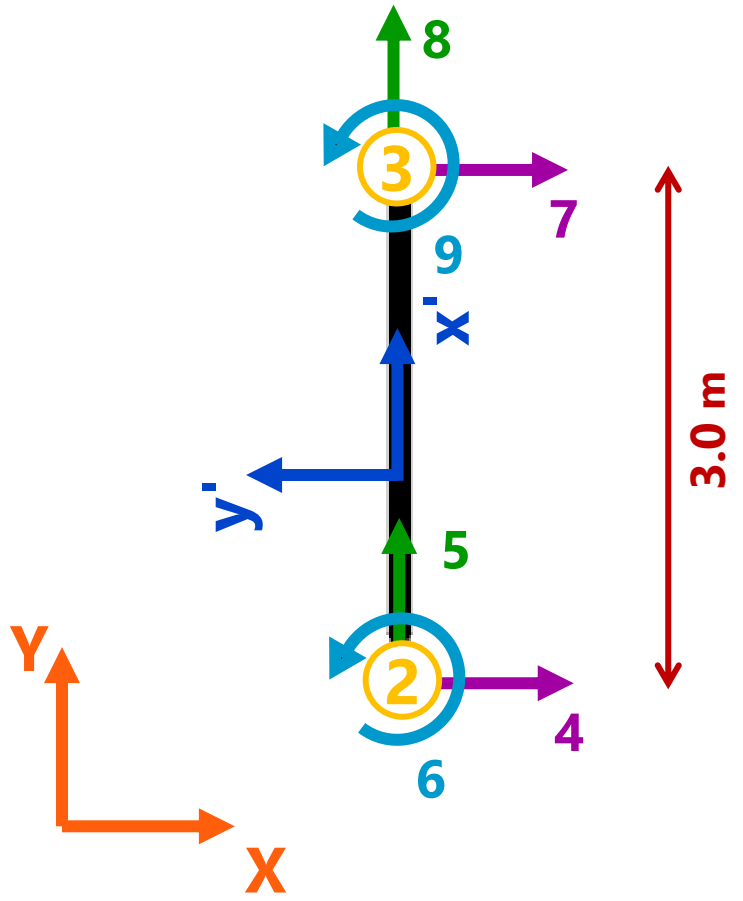


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90

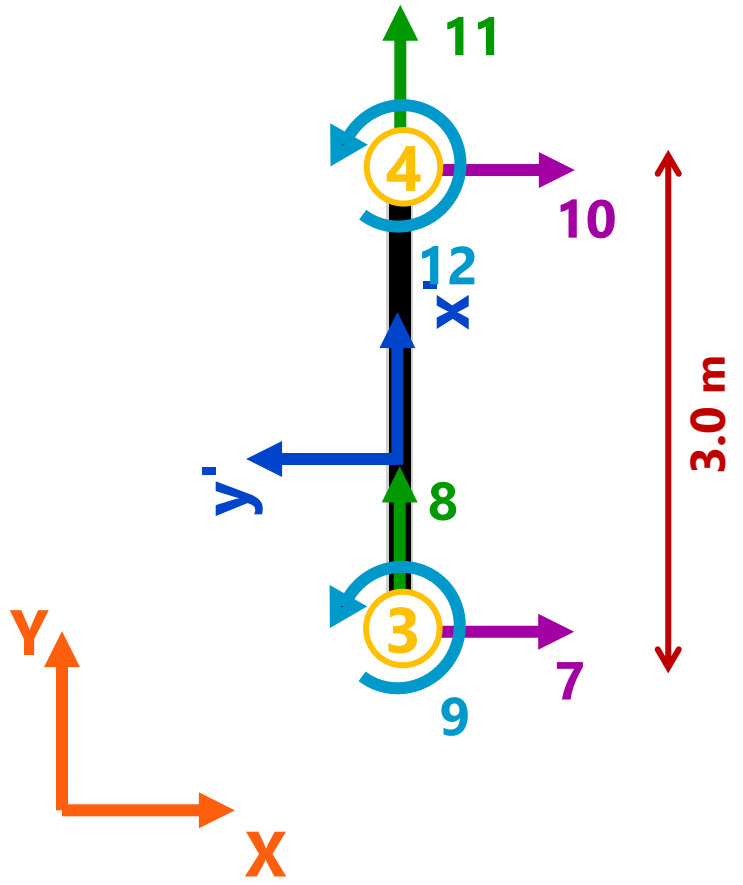


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90

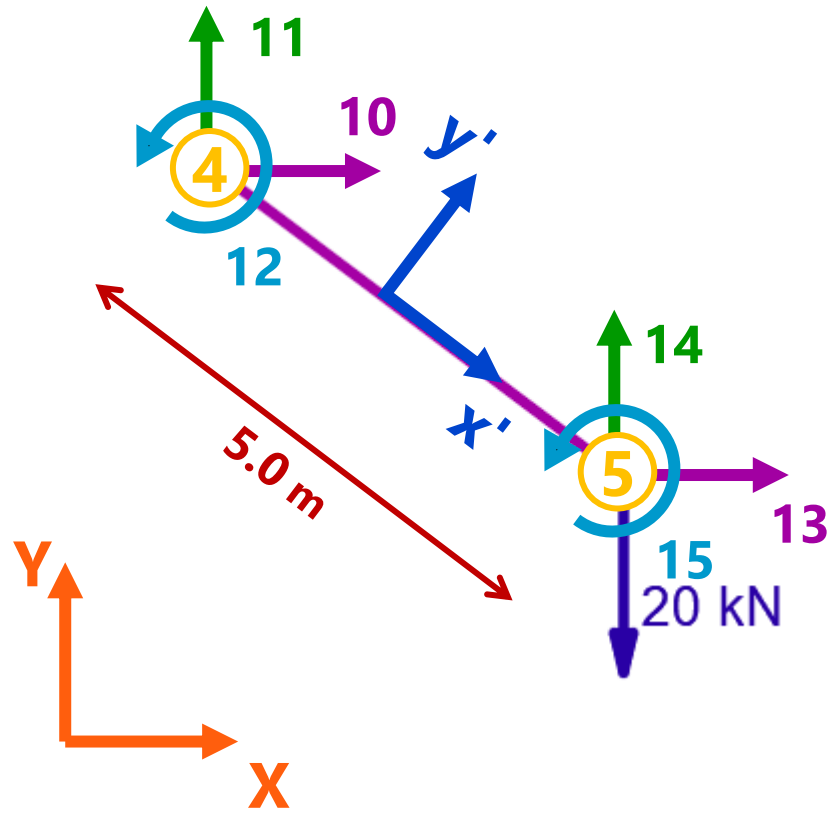


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 4

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87

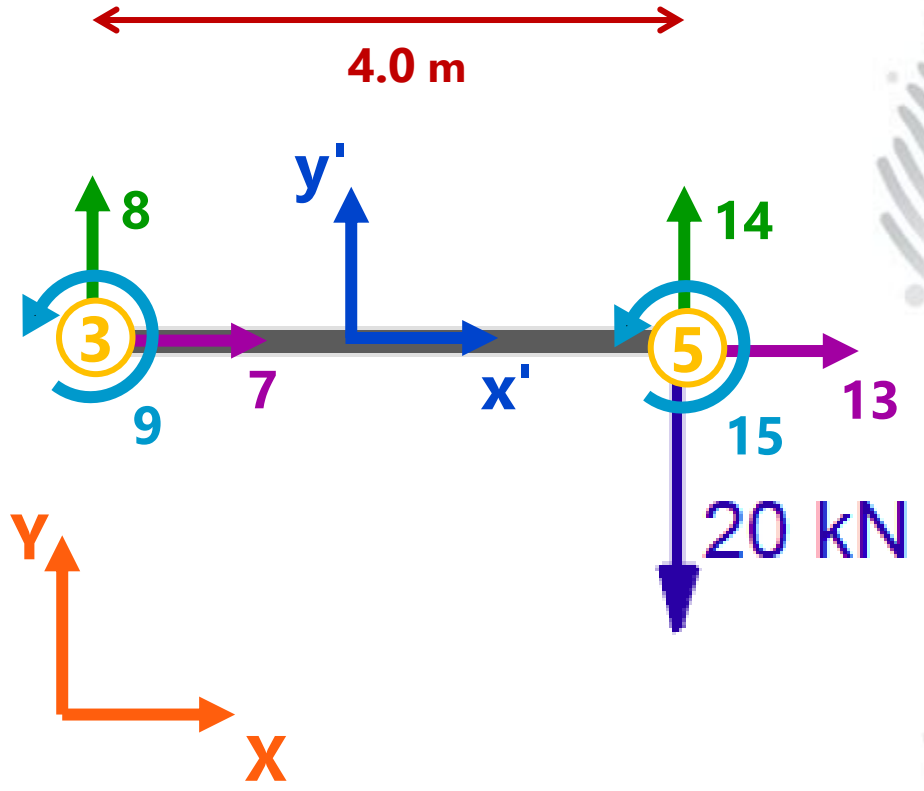


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 5

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0

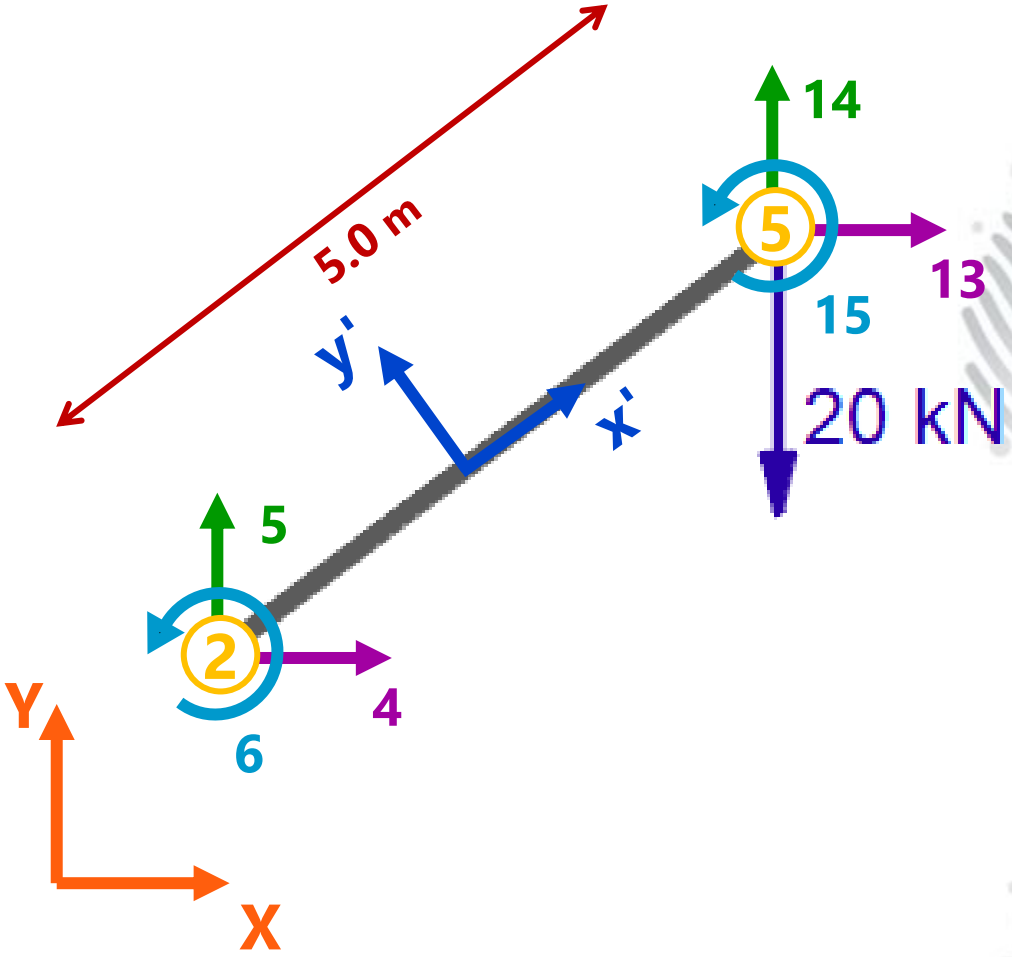


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 6

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87

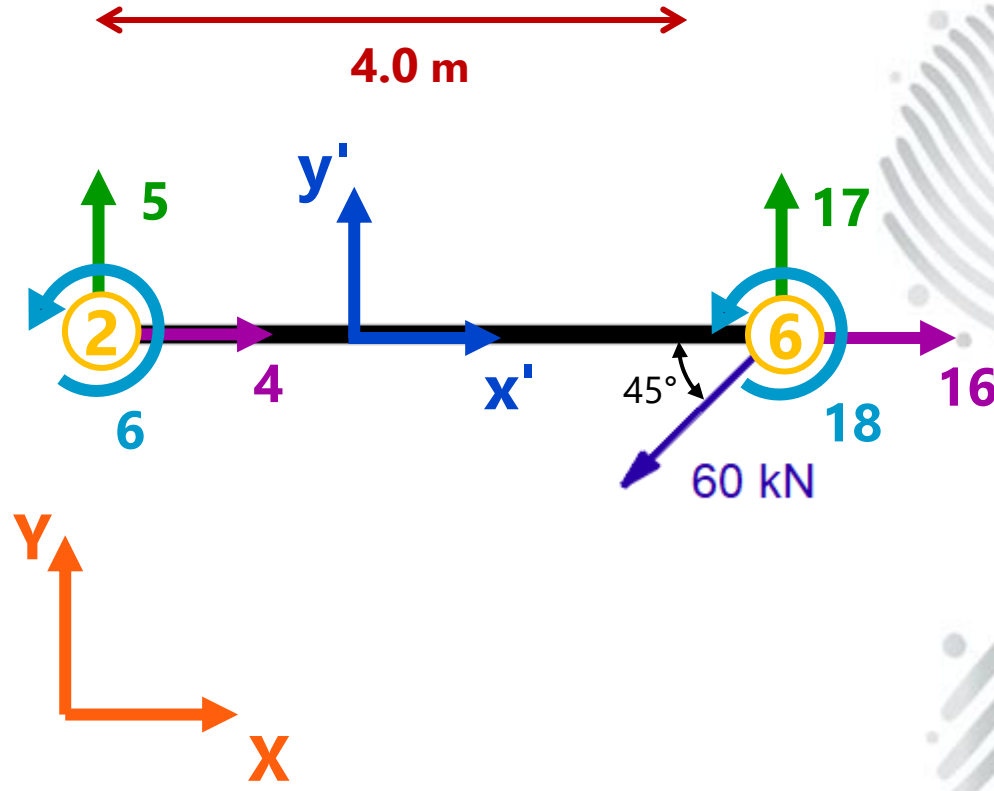


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 7

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87
7	Viga	2	6	8.0	0

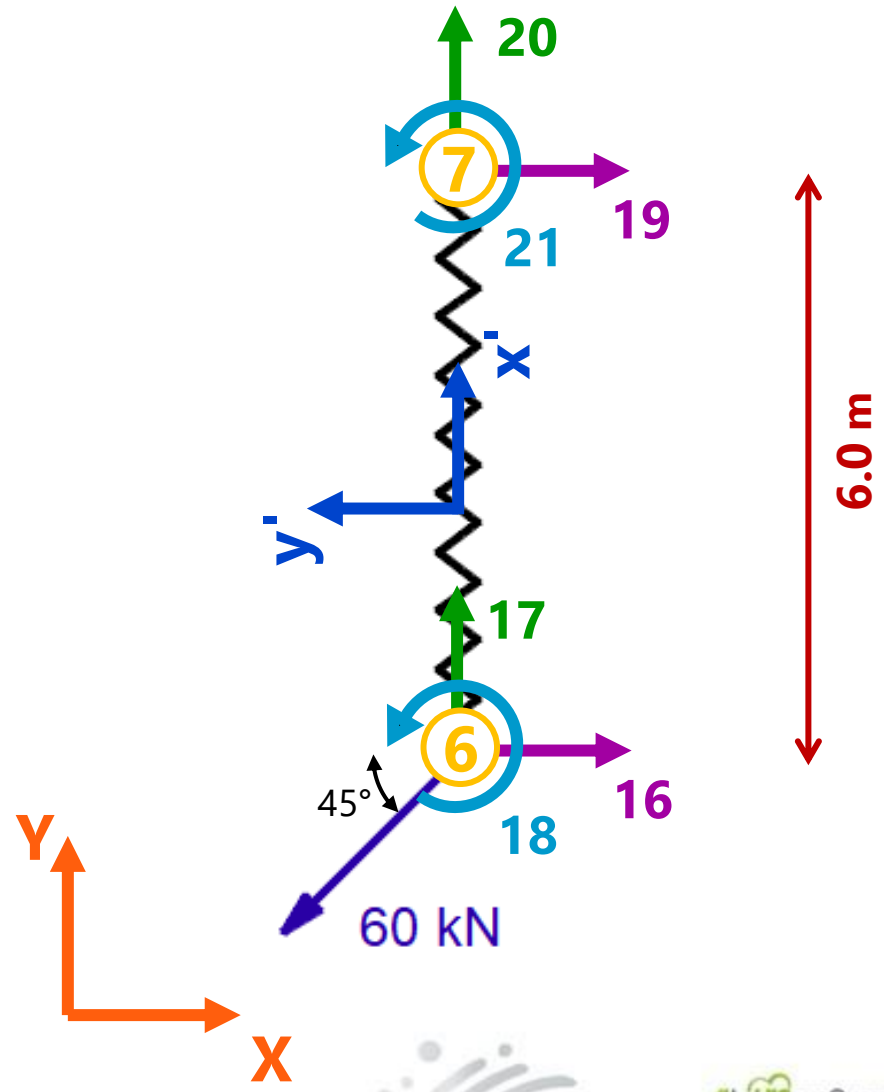


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 8

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87
7	Viga	2	6	8.0	0
8	Resorte	6	7	6.0	90



#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 8

Modelado de resortes – Equivalencia con elemento tipo barra

El resorte se modela como un elemento tipo barra con área equivalente, utilizando un módulo de elasticidad supuesto (generalmente el del material de referencia o uno convencional).

De la rigidez axial de un elemento tipo barra: $k = \frac{EA}{L}$

Despejando el área: $A = \frac{kL}{E}$

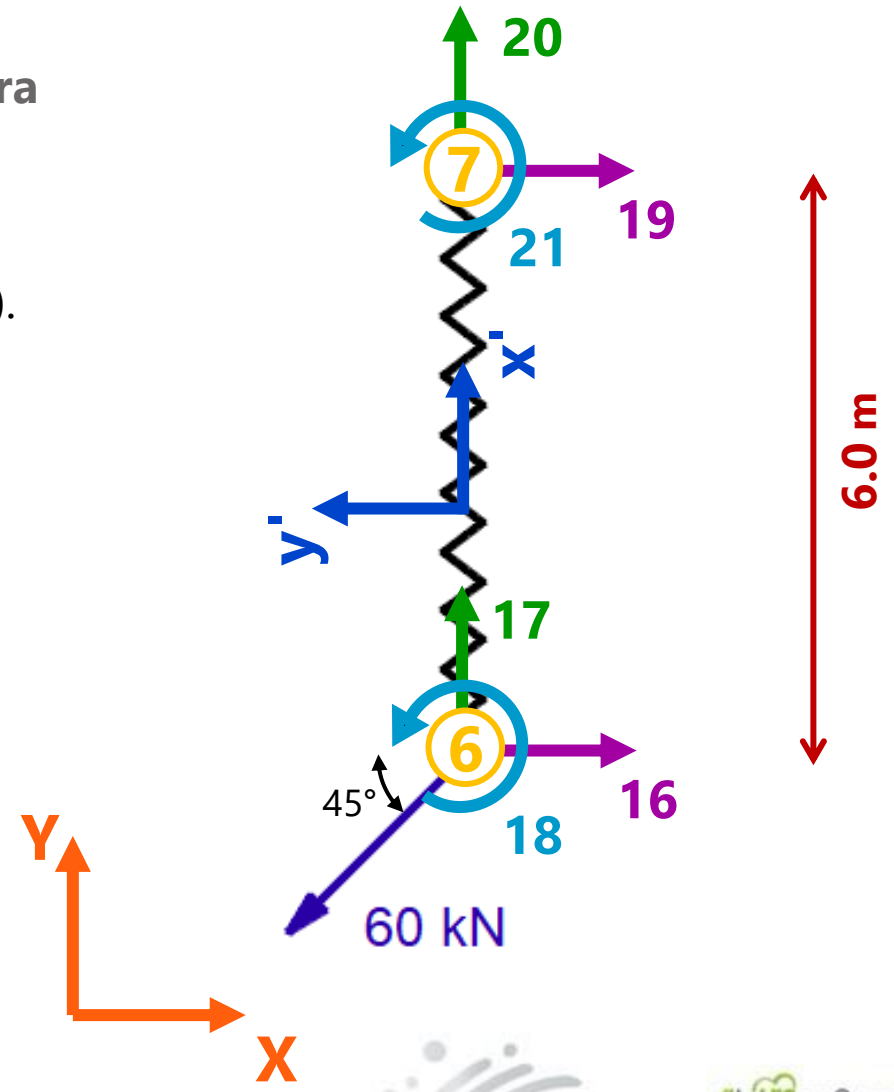
Donde:

k = rigidez del resorte (dato)

L = longitud del elemento resorte (distancia entre nodos)

E = módulo de elasticidad supuesto (elegido)

A = área calculada para el elemento tipo barra



#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 8

Modelado de resortes – Equivalencia con elemento tipo barra

Para el elemento 8 con:

k = 10000 kN/m

L = 6 m

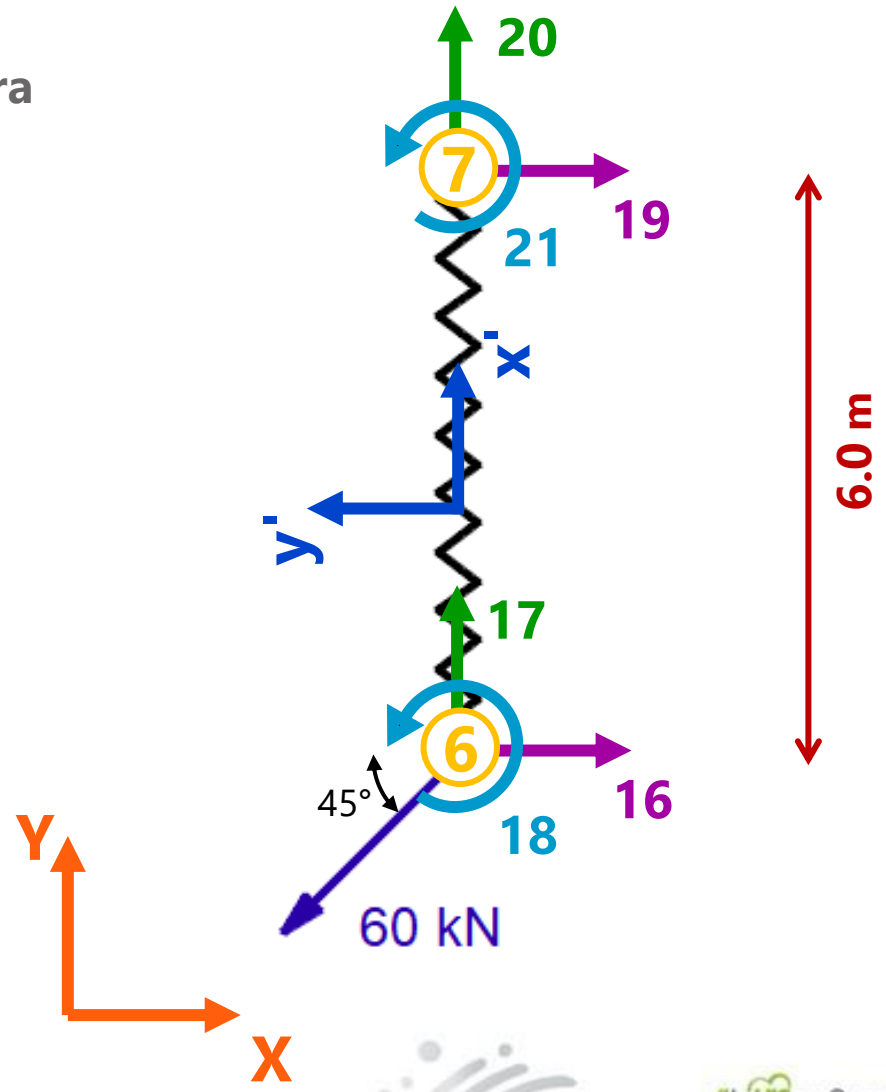
E = $2x10^8$ kN/m^2 (acero)

Calcular el área:

$$A = \frac{kL}{E} = \frac{\left(10000\ k_{N/m}\right)(6\ m)}{2 \times 10^8\ {}^{kN}/_{m^2}}$$

$$A = 0.0003\ m^2$$

Para que el elemento tipo barra se comporte exclusivamente como un resorte axial, su inercia (I) se considera despreciable ($1x10^{-16}$ m^4). De esta forma, el elemento no desarrolla rigidez a flexión ni a corte, y solo resiste fuerza en la dirección de su eje.

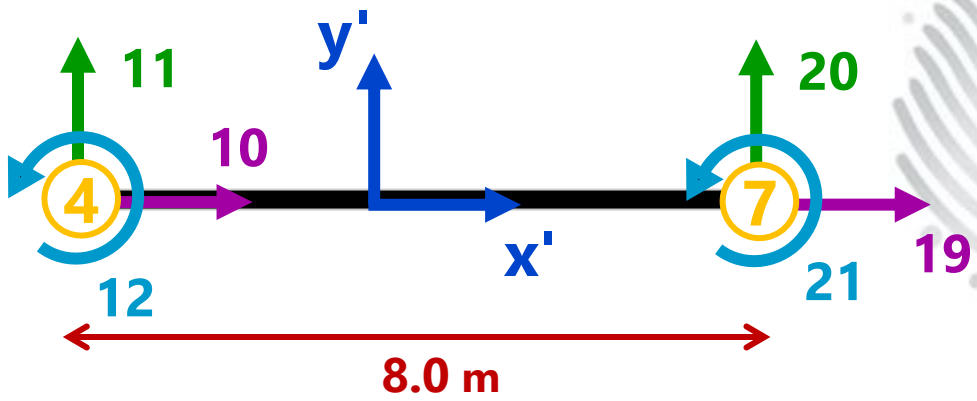


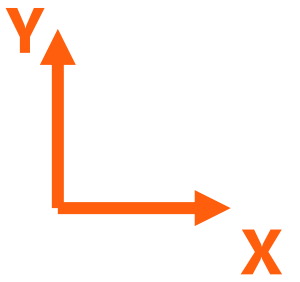
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 9

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87
7	Viga	2	6	8.0	0
8	Resorte	6	7	6.0	90
9	Viga	4	7	8.0	0



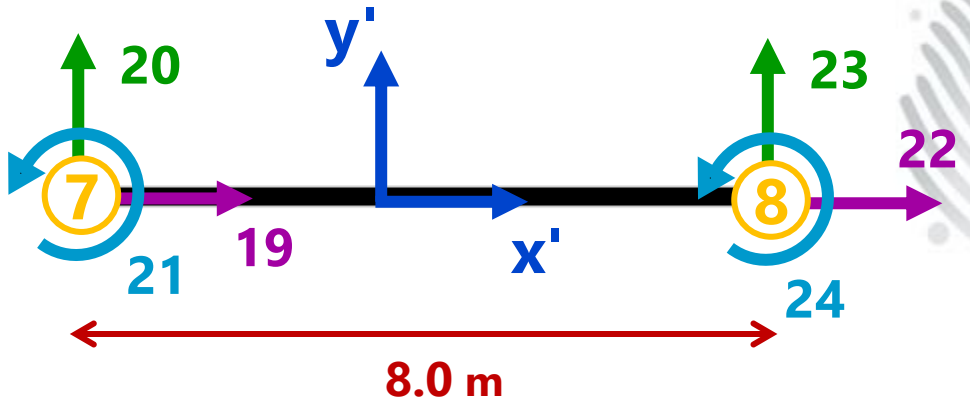


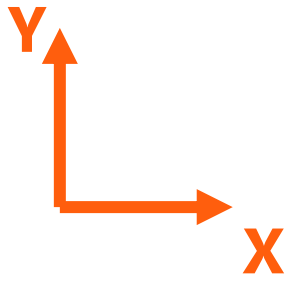
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 10

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87
7	Viga	2	6	8.0	0
8	Resorte	6	7	6.0	90
9	Viga	4	7	8.0	0
10	Viga	7	8	8.0	0



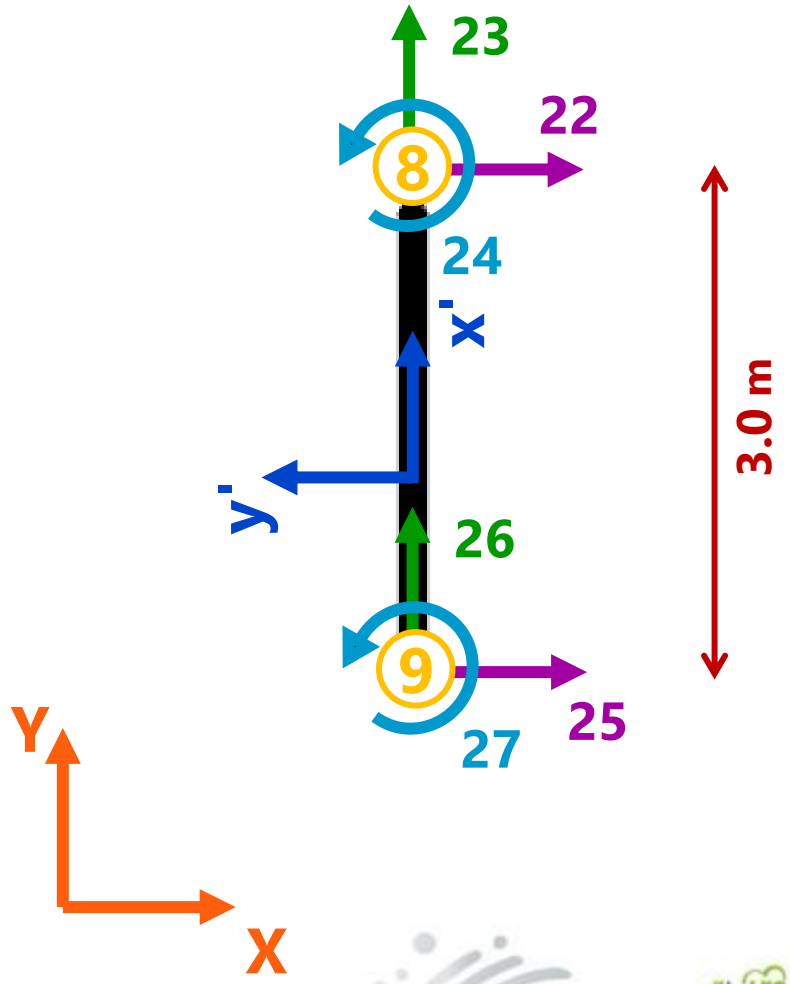


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 11

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90

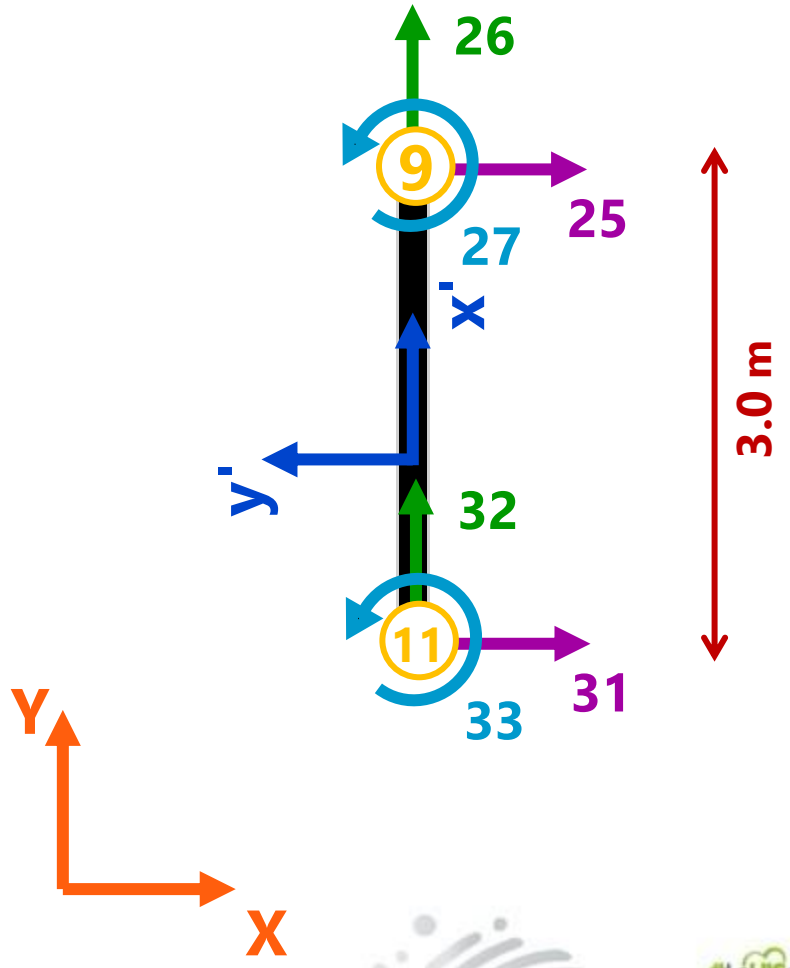


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 12

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90

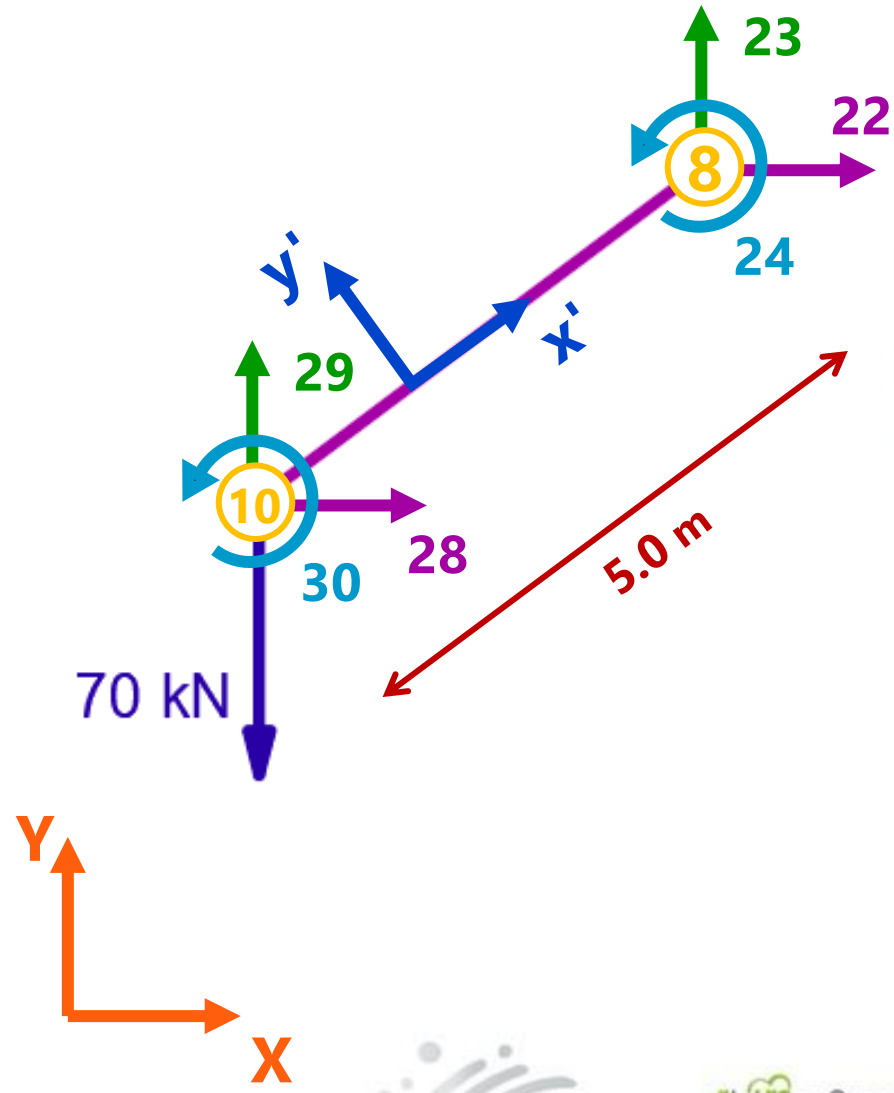


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 13

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87

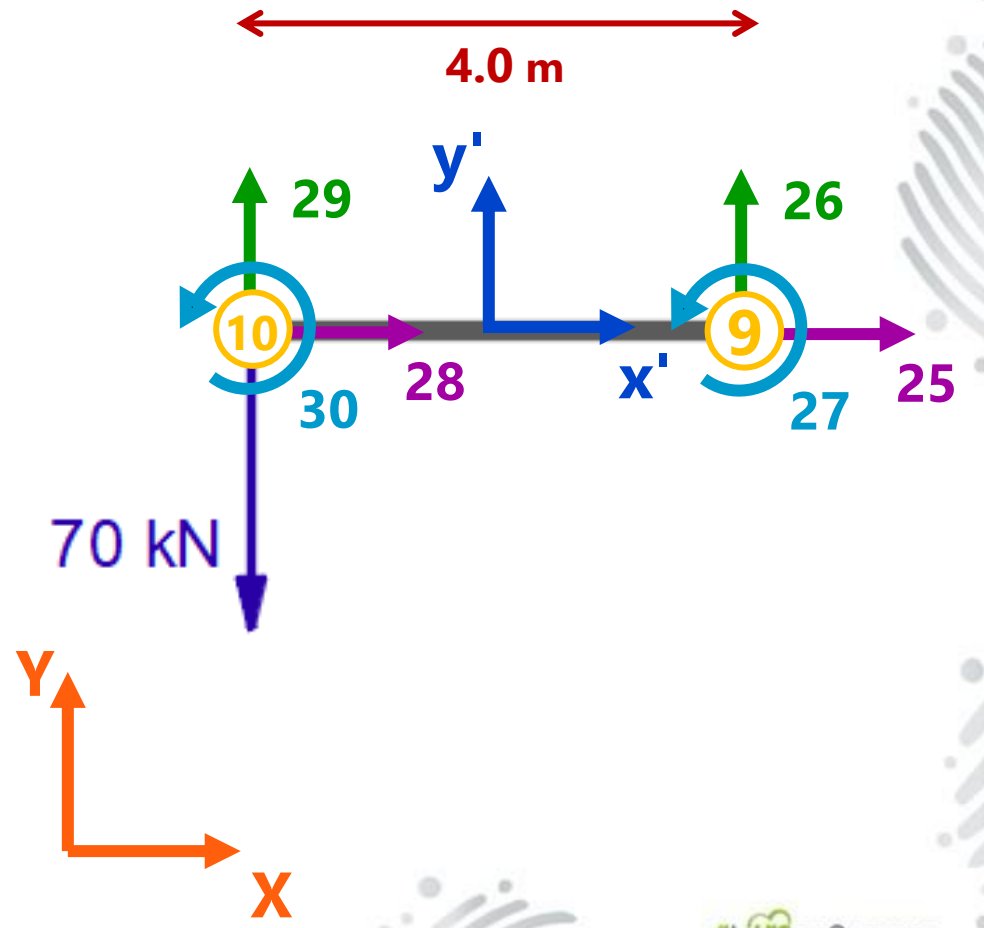


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 14

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87
14	Barra	10	9	4.0	0

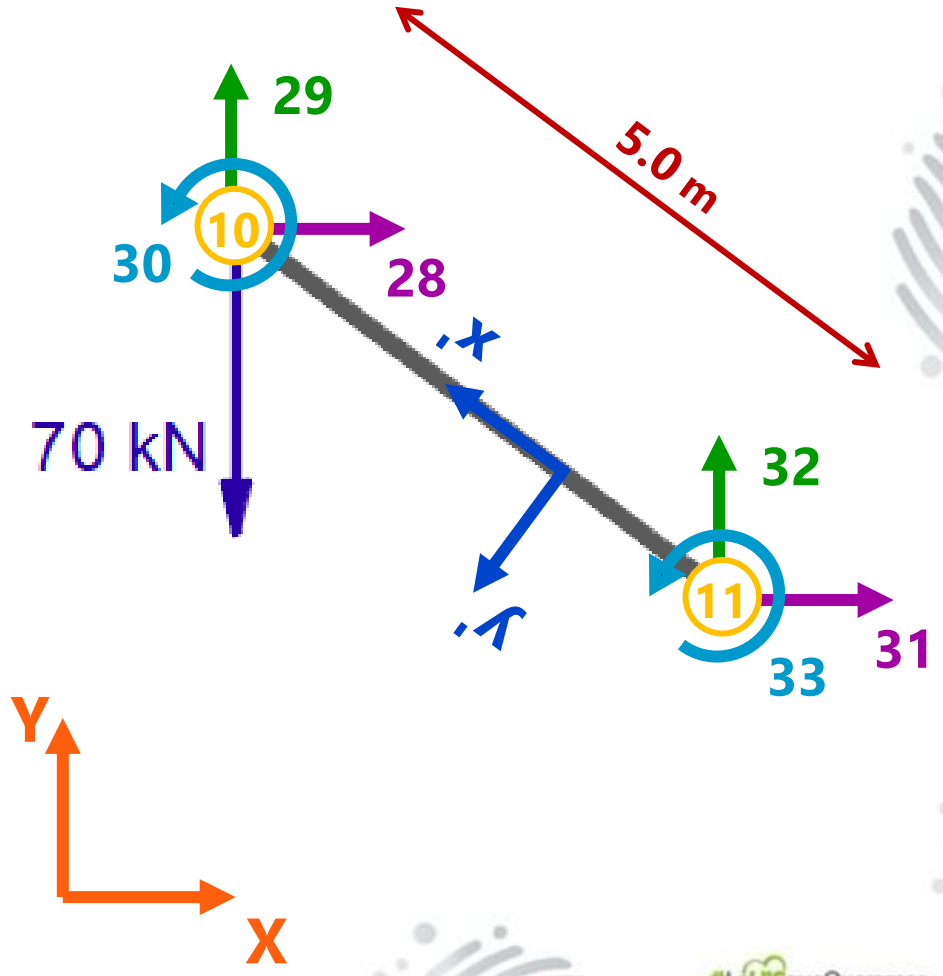


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 15

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87
14	Barra	10	9	4.0	0
15	Barra	11	10	5.0	143.13

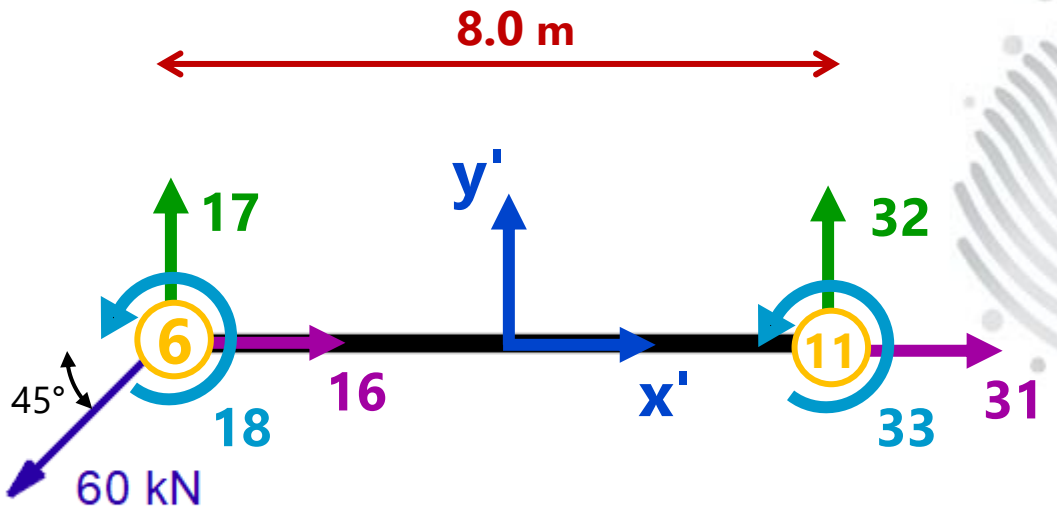


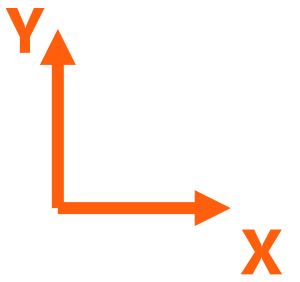
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 16

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87
14	Barra	10	9	4.0	0
15	Barra	11	10	5.0	143.13
16	Viga	6	11	8.0	0



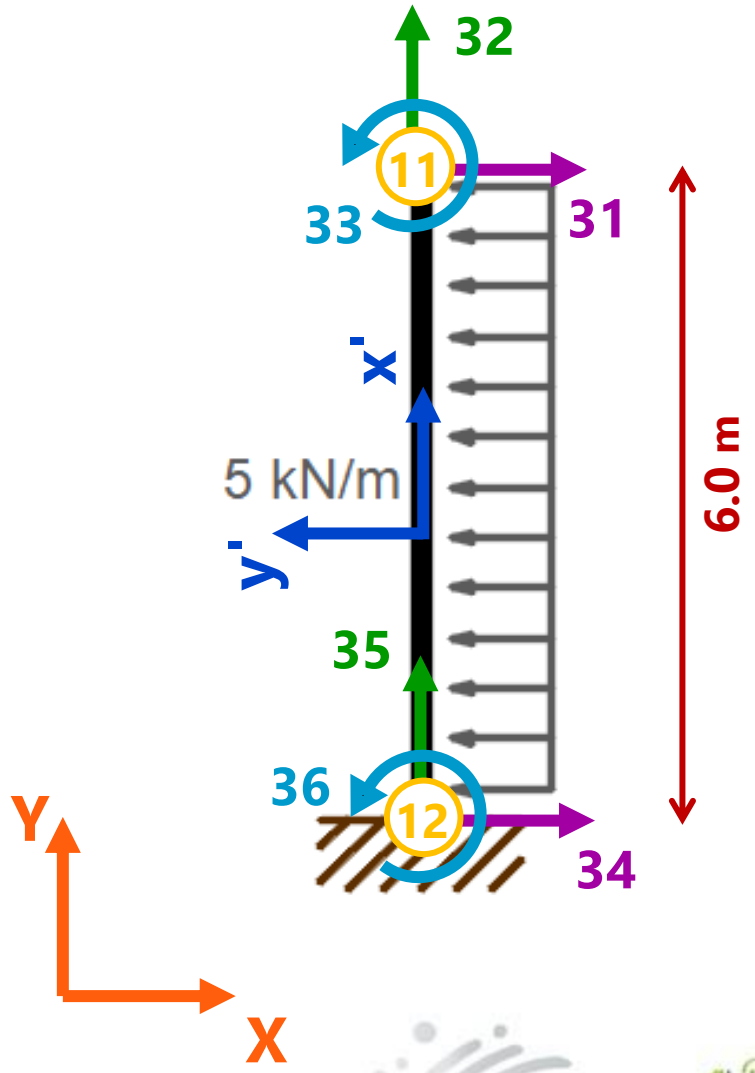


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 17

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87
14	Barra	10	9	4.0	0
15	Barra	11	10	5.0	143.13
16	Viga	6	11	8.0	0
17	Columna	12	11	6.0	90



#LaUISqueQueremos

ECUACIONES FUNDAMENTALES

Matriz de rigidez local:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$[T] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

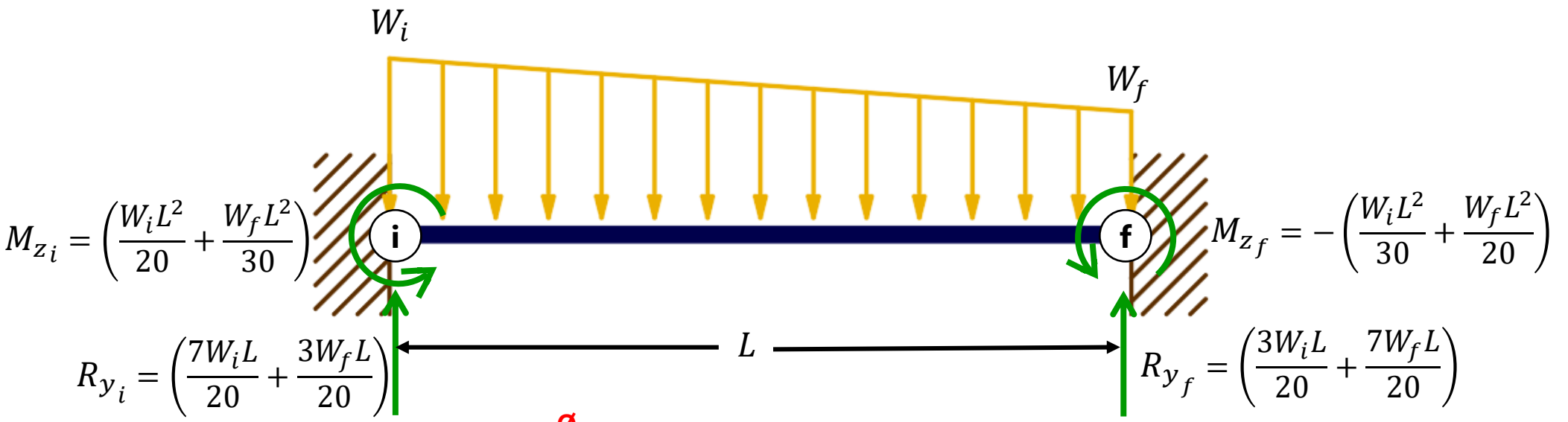
Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_L$

#LaUISqueQueremos

FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



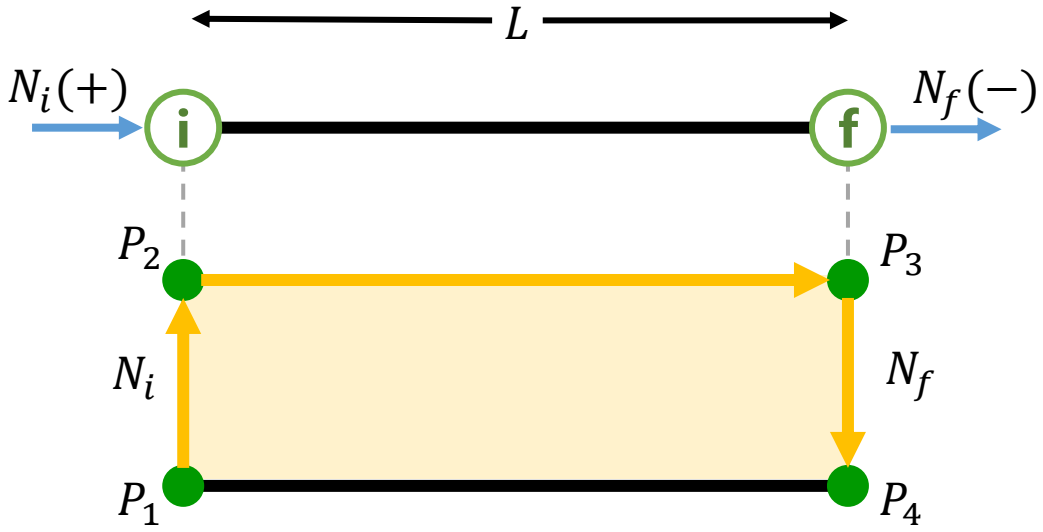
Vector FEM local: $\{F^{FEM}\}_L = \begin{Bmatrix} R_{x_i} \\ R_{y_i} \\ M_{z_i} \\ R_{x_f} \\ R_{y_f} \\ M_{z_f} \end{Bmatrix}$ Ø Ø

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA AXIAL (N)
SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



Coord. Nodo inicial: (x_i, y_i) Coord. Nodo final: (x_f, y_f)

Vector director: $\vec{u} = (e_x, e_y)$ Vector normal: $\vec{n} = (n_x, ny)$

Coordenadas Punto 1: $P_1 = (x_i, y_i)$

Coordenadas Punto 2: $P_2 = P_1 + N_i \cdot \vec{n}$

Coordenadas Punto 3: $P_3 = P_2 + L \cdot \vec{u}$

Coordenadas Punto 4: $P_4 = P_3 + N_f \cdot \vec{n}$

- El diagrama se dibuja **perpendicular** al elemento para que sean visualmente distinguibles.
- El elemento NO tiene cargas axiales aplicadas a lo largo de su eje, por lo tanto el diagrama es CONSTANTE.
- Se cumple: |Ni| = |Nf| (mismo valor y distinto signo)

Forma: Prisma recto
Ecuación: Constante
Puntos de control: P_1, P_2, P_3, P_4

Convención de signos:
Nf > 0 → Tracción (el elemento se estira)
Nf < 0 → Compresión (el elemento se acorta)

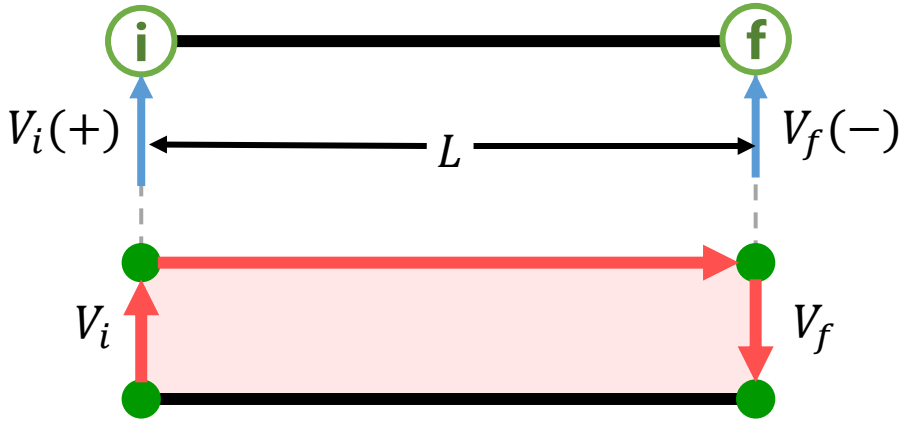
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

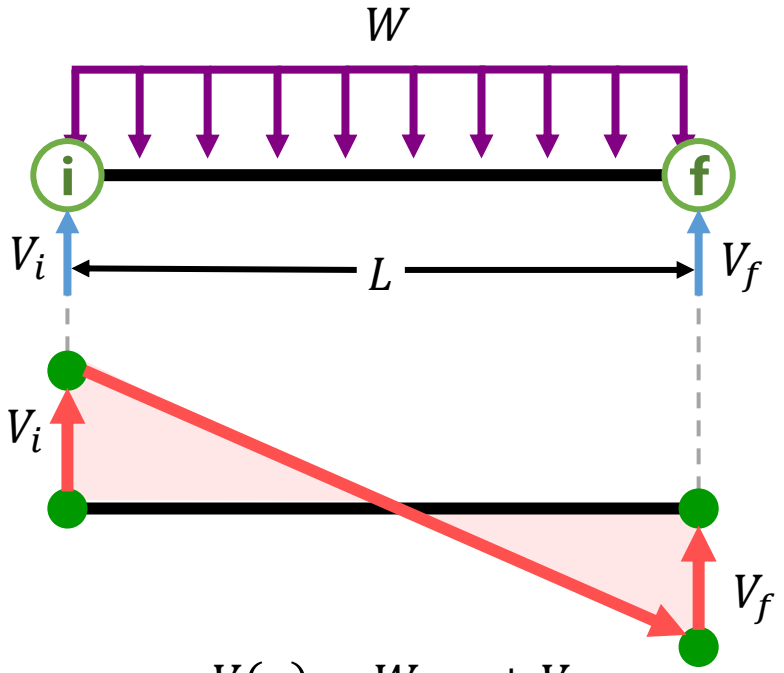
CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$V(x) = V_i$$

Se cumple: |Vi| = |Vf| (mismo valor y distinto signo)

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



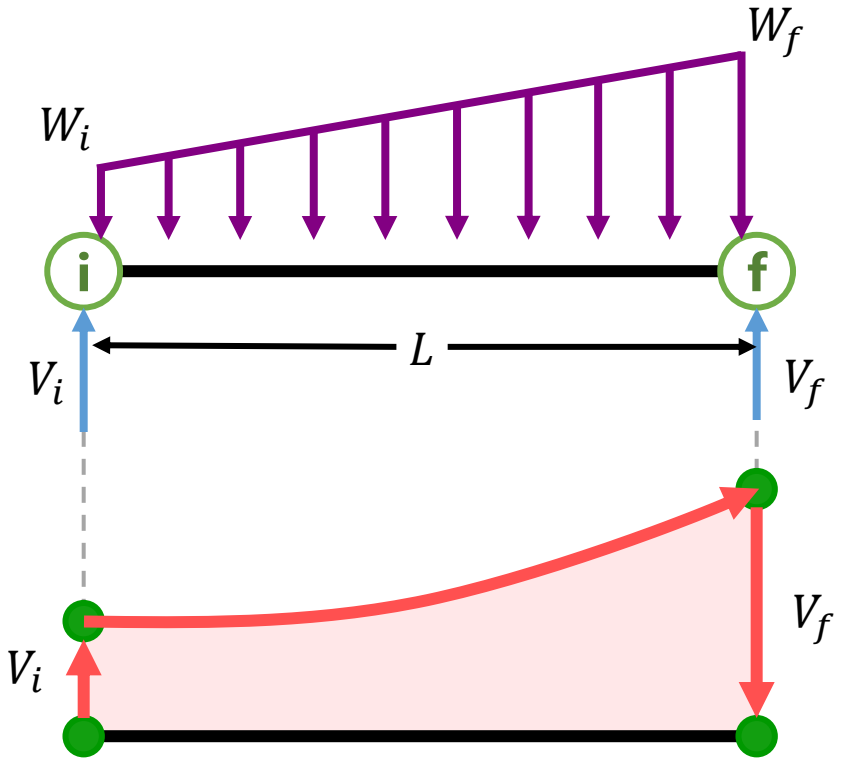
$$V(x) = W \cdot x + V_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA CORTANTE (V)

CASO III: CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

$$V(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^2}{2} + W_i \cdot x + V_i$$

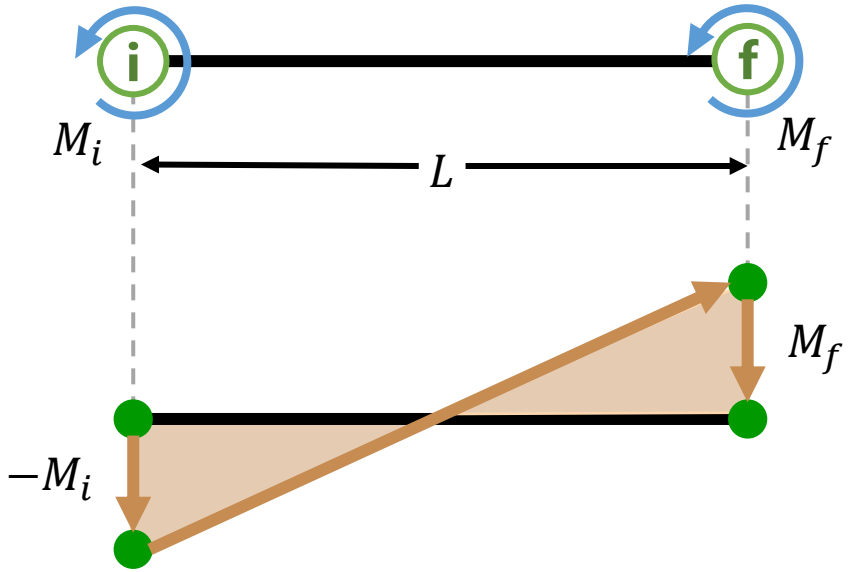
#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

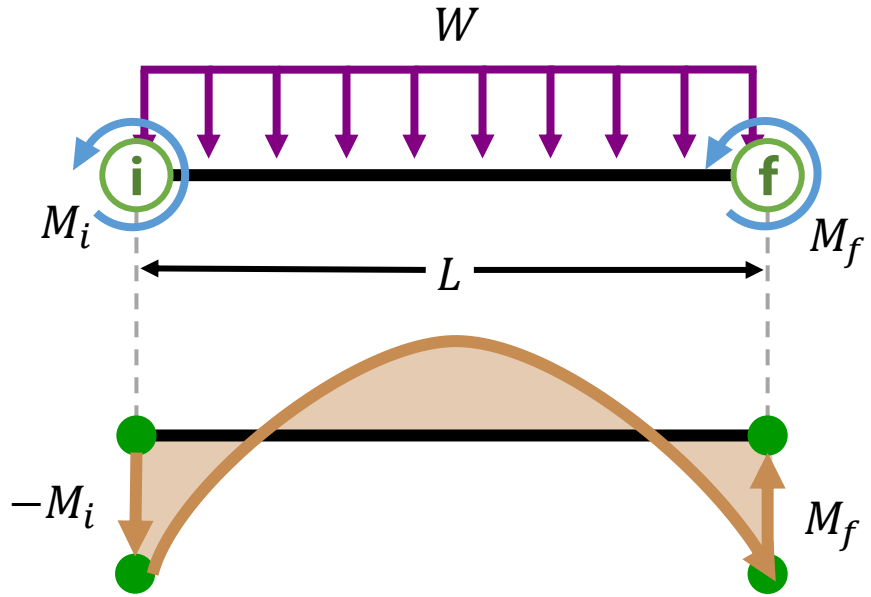
Ecuación: $M(x) = \int V(x)\,dx - M_i$

CASO I: SIN CARGA SOBRE EL ELEMENTO



$$M(x) = V_i \cdot x - M_i$$

CASO II: CARGA UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



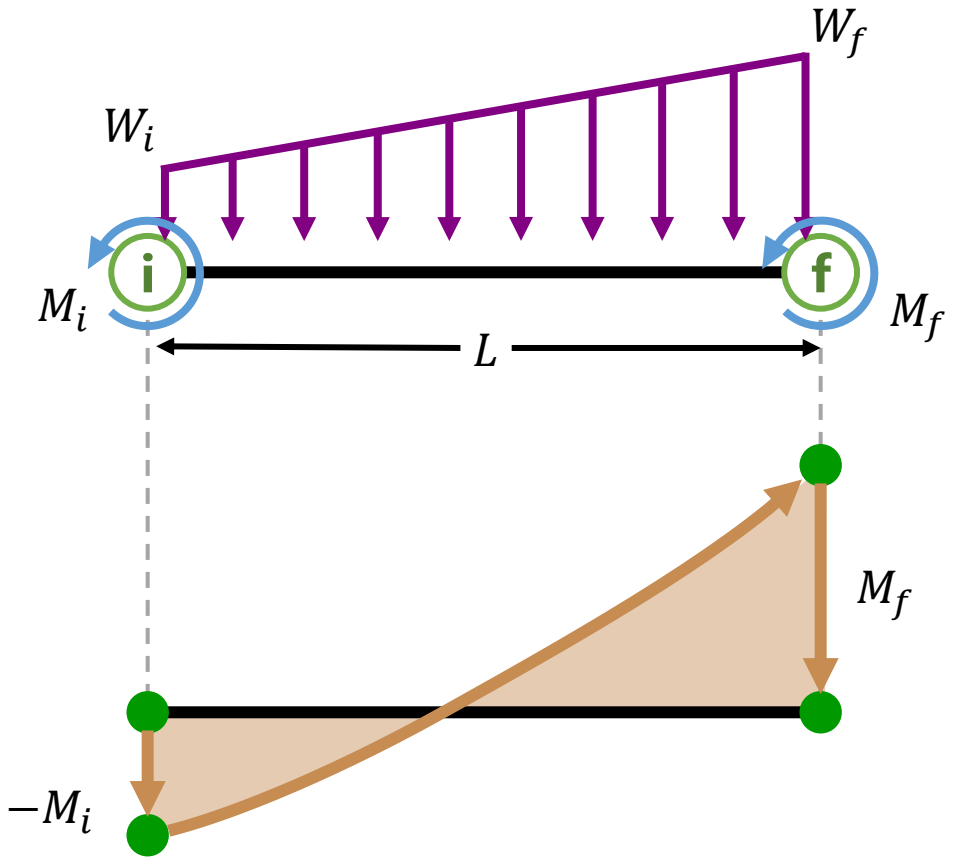
$$M(x) = \frac{W}{2}x^2 + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMA DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA MOMENTO (M)

CASO III: CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORME SOBRE EL ELEMENTO



Ecuación: $V(x) = \int W(x)\,dx + V_i$

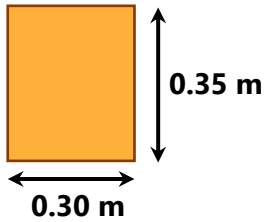
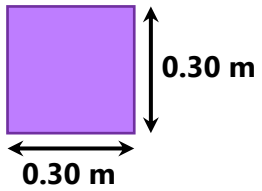
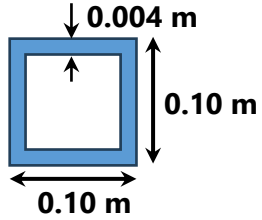
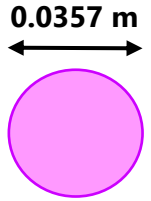
$$M(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^3}{6} + W_i\frac{x^2}{2} + V_i \cdot x - M_i$$

#LaUISqueQueremos

DATOS DE ENTRADA

Módulo de elasticidad del concreto: $E_c = 24870062.32\ {}^{kN}/_{m^2}$

Módulo de elasticidad del acero: $E_s = 2 \times 10^8\ {}^{kN}/_{m^2}$

Elemento	Vigas	Columnas	Barras	Cables	Resorte
					
Área transversal (m^2)	$b \cdot h$	$b \cdot h$	$4e(L-e)$	0.001	0.0003
Momento de inercia (m^4)	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	1×10^{-16} * Inercia despreciable	1×10^{-16} * Inercia despreciable	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87
7	Viga	2	6	8.0	0
8	Resorte	6	7	6.0	90
9	Viga	4	7	8.0	0
10	Viga	7	8	8.0	0

#LaUISqueQueremos

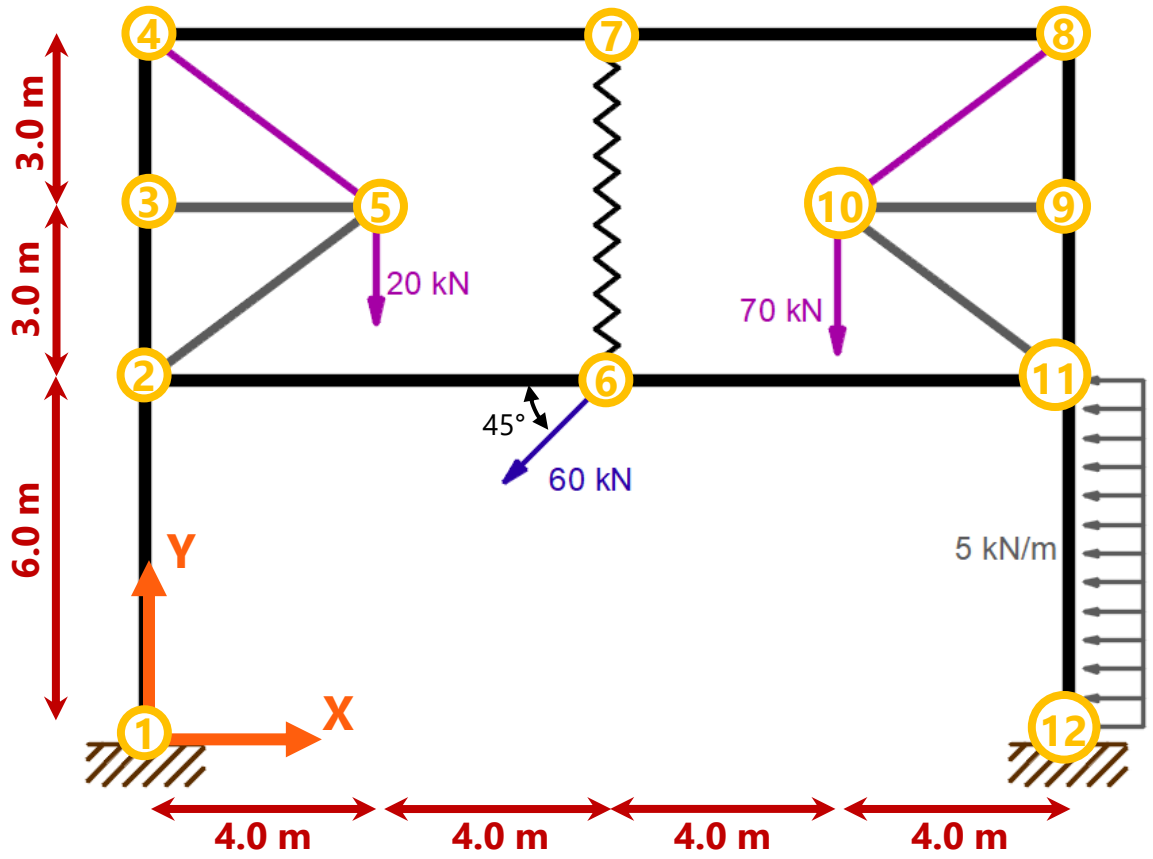
CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87
14	Barra	10	9	4.0	0
15	Barra	11	10	5.0	143.13
16	Viga	6	11	8.0	0
17	Columna	12	11	6.0	90

#LaUISqueQueremos

COORDENADAS DE LOS NODOS

NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	6.0
3	0.0	9.0
4	0.0	12.0
5	4.0	9.0
6	8.0	6.0
7	8.0	12.0
8	16.0	12.0
9	16.0	9.0
10	12.0	9.0
11	16.0	6.0
12	16.0	0.0

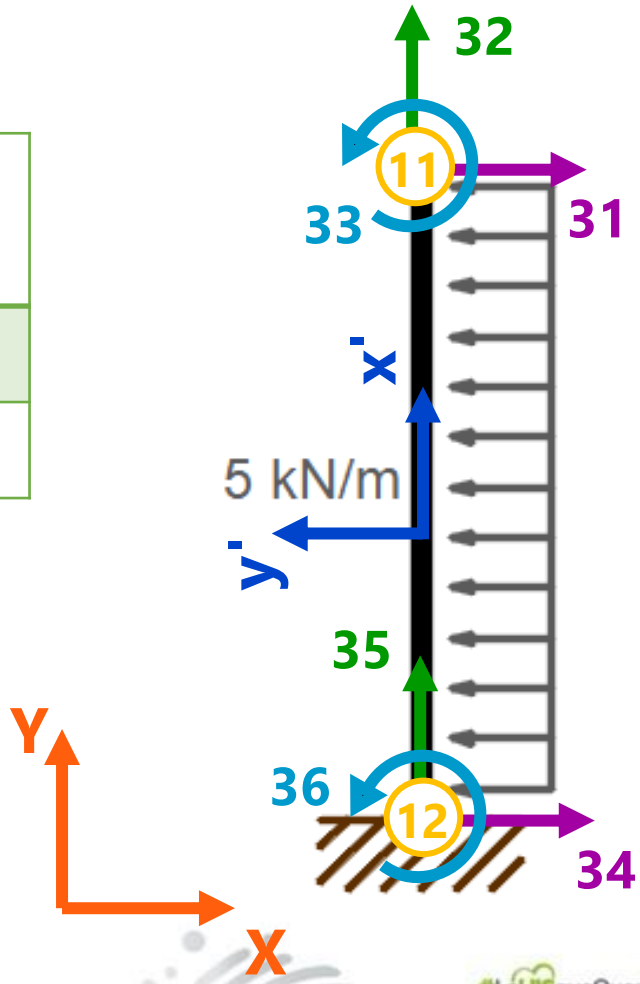


#LaUISqueQueremos

CARGAS SOBRE LOS ELEMENTOS

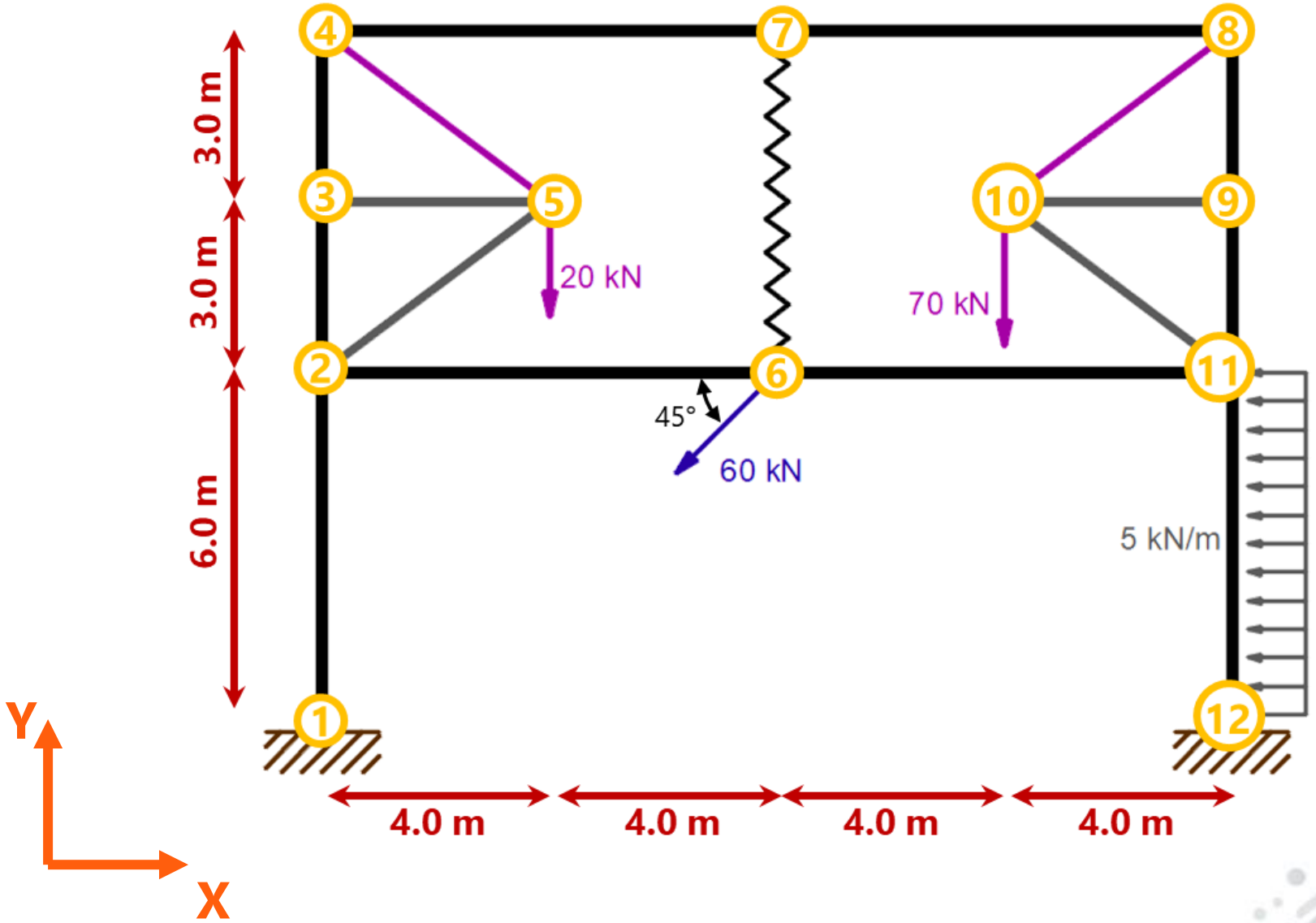
ELEM	TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (kN/m)	Wf (kN/m)
1-16	—	—	—	—
2	Uniforme	Local y	5.0	5.0

Elemento 17



#LaUISqueQueremos

GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



#LaUISqueQueremos

ENSAMBLE MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL

Matriz de rigidez local:

$$[k]_L = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación:

$$[T] = \begin{bmatrix} c_i & s_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_i & c_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_f & s_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_f & c_f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

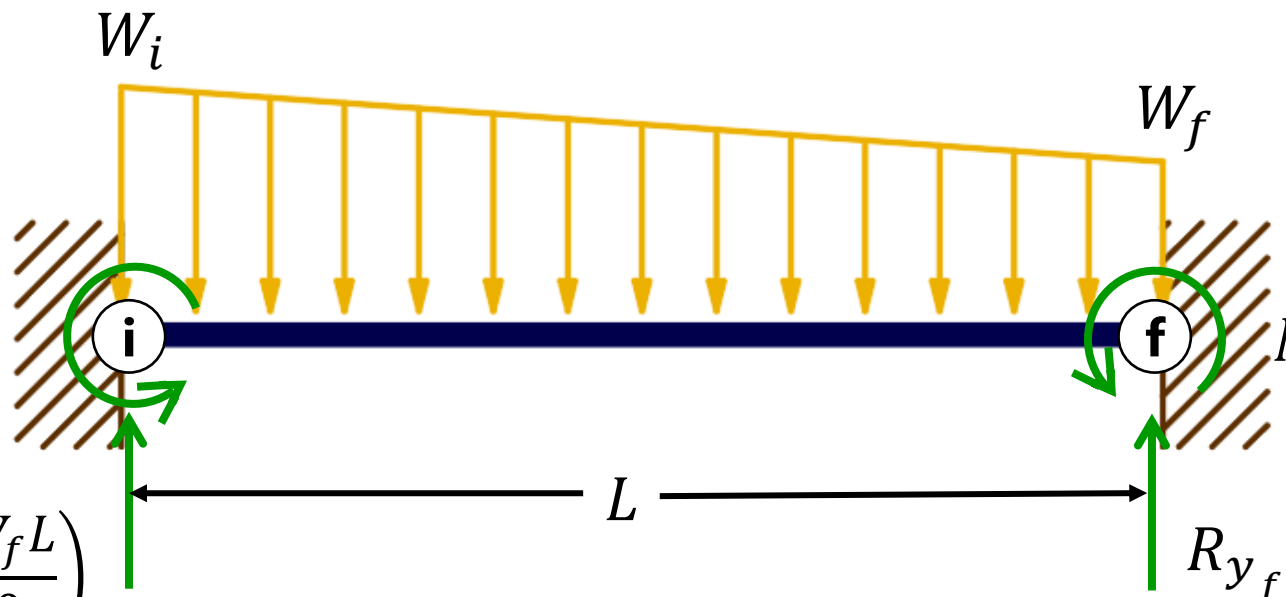
Matriz de rigidez global del elemento:

$$[k]_G = [T]^T [k]_L [T]$$

#LaUISqueQueremos

VECTOR FUERZAS DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO

CARGA TRAPEZOIDAL UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA



$$M_{z_i} = \left(\frac{W_i L^2}{20} + \frac{W_f L^2}{30}\right)$$

$$M_{z_f} = -\left(\frac{W_i L^2}{30} + \frac{W_f L^2}{20}\right)$$

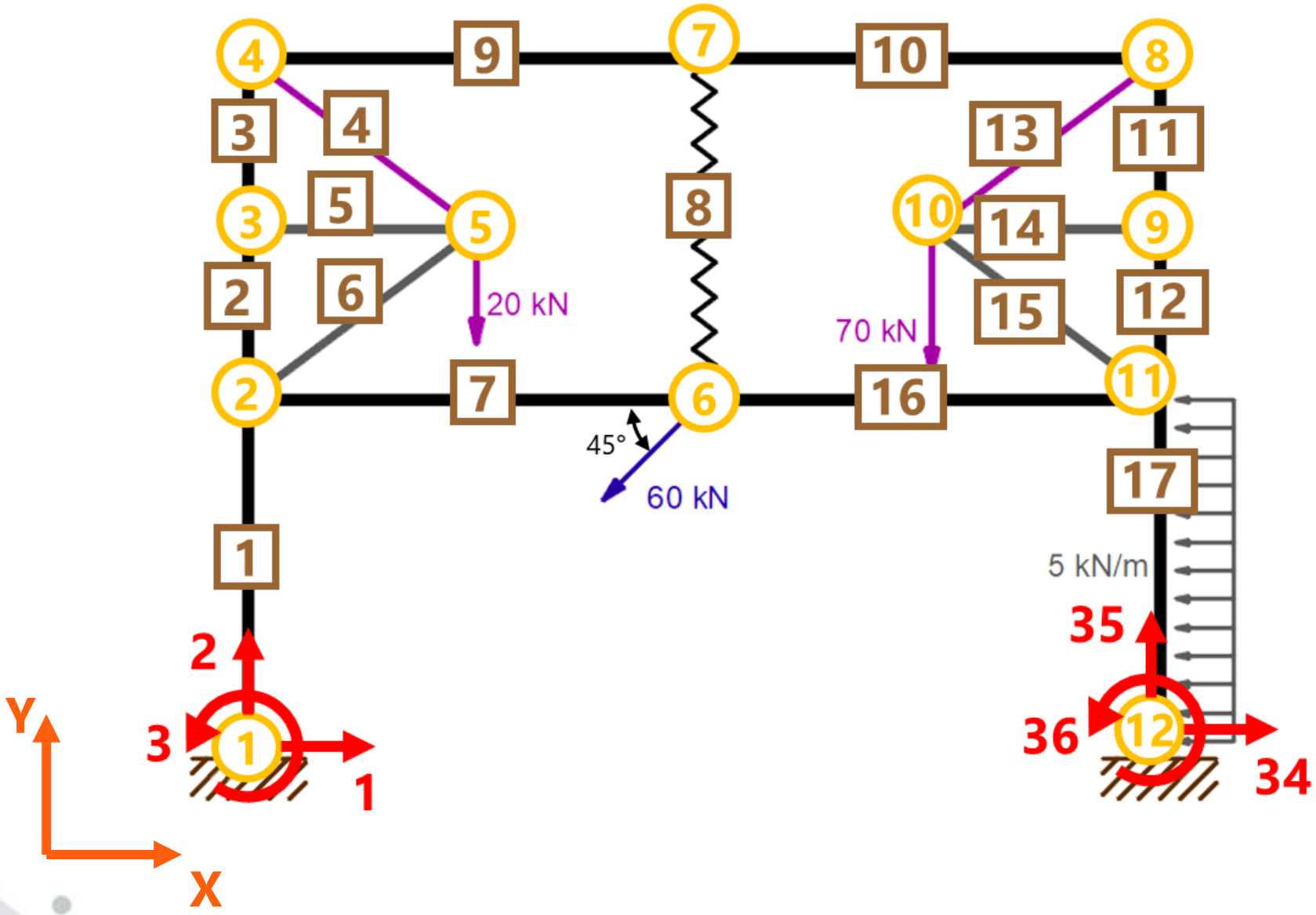
$$R_{y_i} = \left(\frac{7W_i L}{20} + \frac{3W_f L}{20}\right)$$

$$R_{y_f} = \left(\frac{3W_i L}{20} + \frac{7W_f L}{20}\right)$$

Vector FEM global: $\{F^{FEM}\}_G = \{F^{FEM}\}_L [T]^T$

#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CONTORNO



- Grados de libertad restringidos

SOLUCIÓN DEL SISTEMA

Ecuación de equilibrio: $\{F\} = [K]\{U\} + \{F^{FEM}\}$

Desplazamientos: $\{U\}_G = (\{F_{ext}\}_G - \{F^{FEM}\}_G) * [K]_G^{-1}$

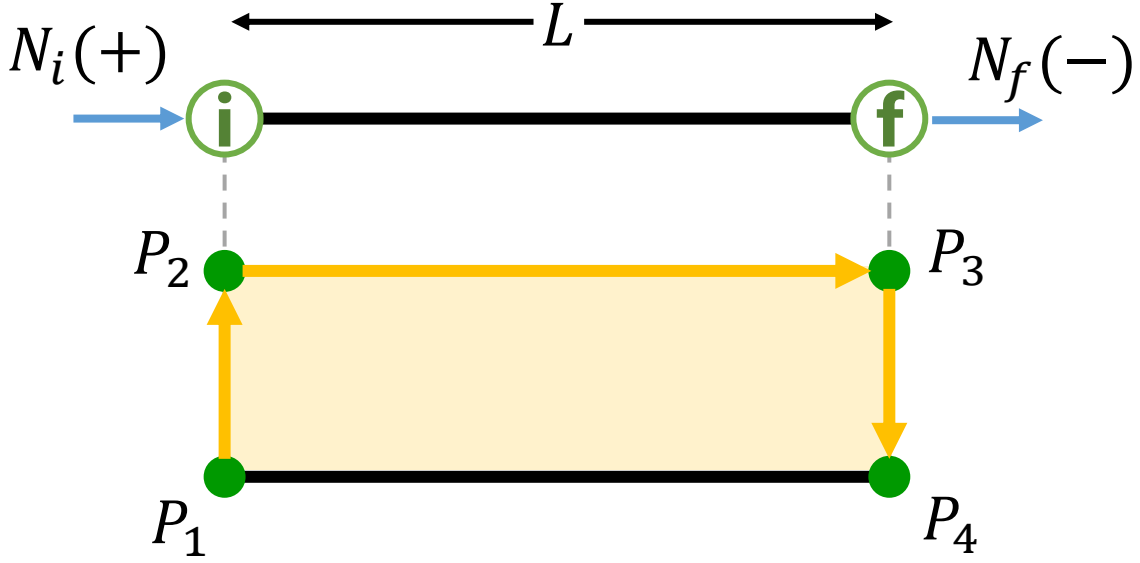
Reacciones: $\{R\} = [k]_G\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_G$

Fuerzas internas: $\{f\}_{int} = [k]_L[T]\{U\}_G + \{F^{FEM}\}_L$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

DIAGRAMA AXIAL (N)



Coord. P1: $P_1 = (x_i, y_i)$

Coord. P2: $P_2 = P_1 + N_i \cdot \vec{n}$

Coord. P3: $P_3 = P_2 + L \cdot \vec{u}$

Coord. P4: $P_4 = P_3 + N_f \cdot \vec{n}$

#LaUISqueQueremos

DIAGRAMAS DE FUERZAS INTERNAS

Fuerza cortante: $V(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^2}{2} + W_i \cdot x + V_i$

Momento flector: $M(x) = \left(\frac{W_f - W_i}{L}\right)\frac{x^3}{6} + W_i\frac{x^2}{2} + V_i \cdot x - M_i$

Si NO hay cargas distribuidas: Wi = Wf = 0 (La ecuación se simplifica)

Si hay cargas uniformes: Wi = Wf

Si hay cargas lineales: Wi ≠ Wf

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

REACCIONES

Nodo 1:

Rx = 32.54 kN

Ry = 60.49 kN

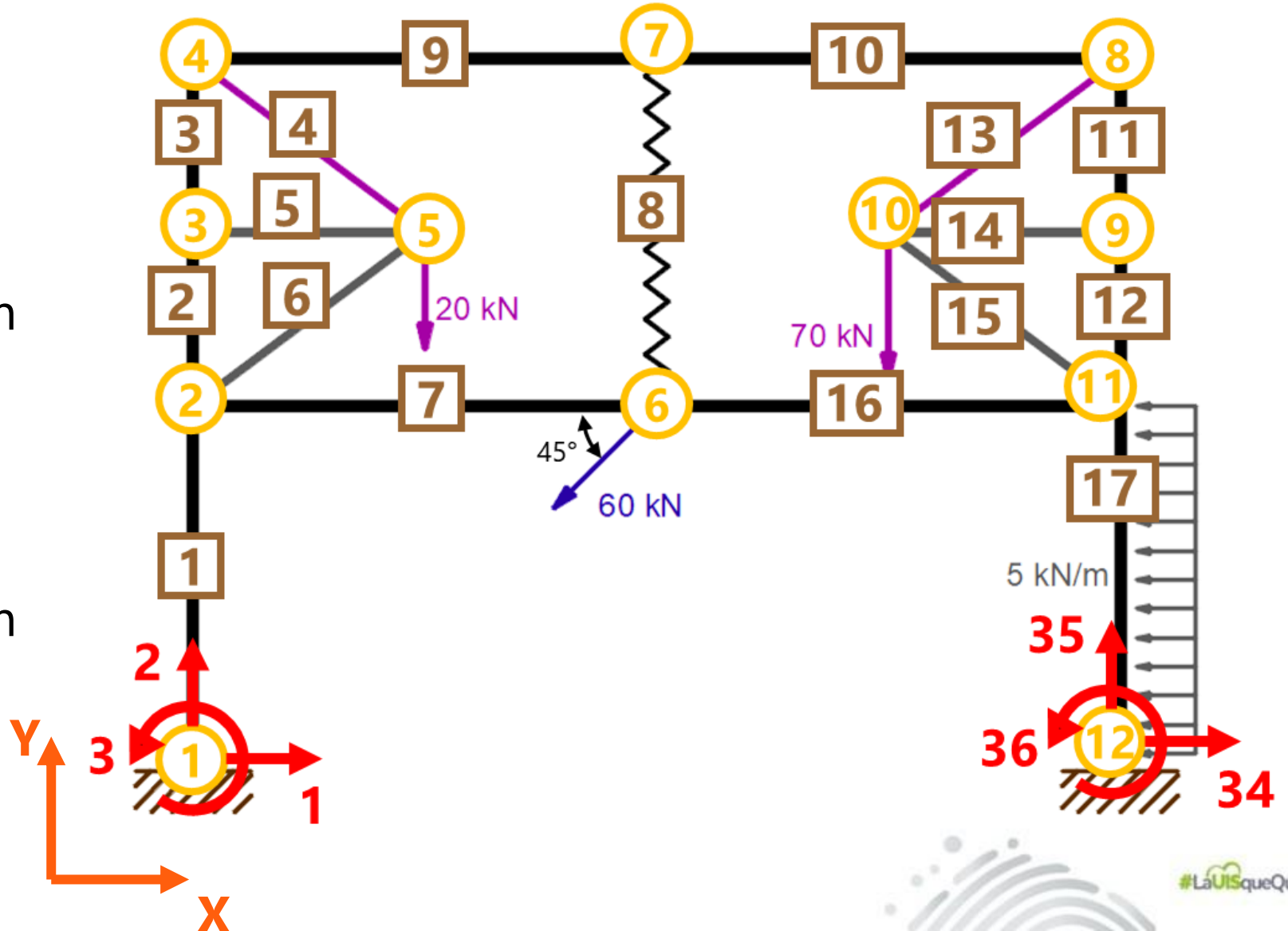
Mz = -118.32 kN-m

Nodo 12:

Rx = 39.89 kN

Ry = 71.94 kN

Mz = -117.85 kN-m



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
2	-5.708e-02	-1.621e-04	7.397e-03
3	-8.954e-02	-1.889e-04	1.291e-02
4	-1.210e-01	-2.157e-04	4.877e-03
5	-8.927e-02	4.195e-02	1.147e-02
6	-5.706e-02	-2.442e-02	-4.372e-03
7	-1.211e-01	-2.254e-02	-3.348e-03
8	-1.212e-01	-2.983e-04	8.483e-03
9	-8.969e-02	-2.456e-04	1.144e-02
10	-8.958e-02	-4.517e-02	1.162e-02
11	-5.692e-02	-1.928e-04	1.008e-02
12	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N (kN)**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
1	-60.487	Compresión	-32.541	32.541	-118.320	-76.928
2	-19.965	Compresión	-14.868	14.868	-53.162	8.557
3	-19.965	Compresión	-35.679	35.679	-8.557	-98.481
4	3.660	Tracción	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
5	20.811	Tracción	0.000	-0.000	0.000	0.000
6	-29.673	Compresión	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
7	6.066	Tracción	22.719	-22.719	130.090	51.659
8	18.830	Tracción	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
9	-38.607	Compresión	17.769	-17.769	98.481	43.669
10	-38.607	Compresión	-1.061	1.061	-43.669	35.178

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N (kN)**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
11	-39.331	Compresión	-12.418	12.418	-2.077	-35.178
12	-39.331	Compresión	-3.701	3.701	-13.179	2.077
13	63.782	Tracción	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
14	-8.718	Compresión	0.000	-0.000	0.000	0.000
15	-52.885	Compresión	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
16	48.492	Tracción	-0.878	0.878	-51.659	44.638
17	-71.939	Compresión	-39.885	9.885	-117.852	-31.459

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!

DESARROLLO DE MATERIAL DOCENTE QUE INTEGRE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO MATRICIAL EN PYTHON Y LA VALIDACIÓN MEDIANTE MODELOS EN OPENSEES

Sistemas Mixtos
Ejercicio 3
Modelo OpenSees

Autor: Yadith Tatiana Ruiz Mosquera
Directora: M.Sc. María Alejandra Oliveros Caicedo
Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas
Escuela de Ingeniería Civil
Bucaramanga

#LaUISqueQueremos

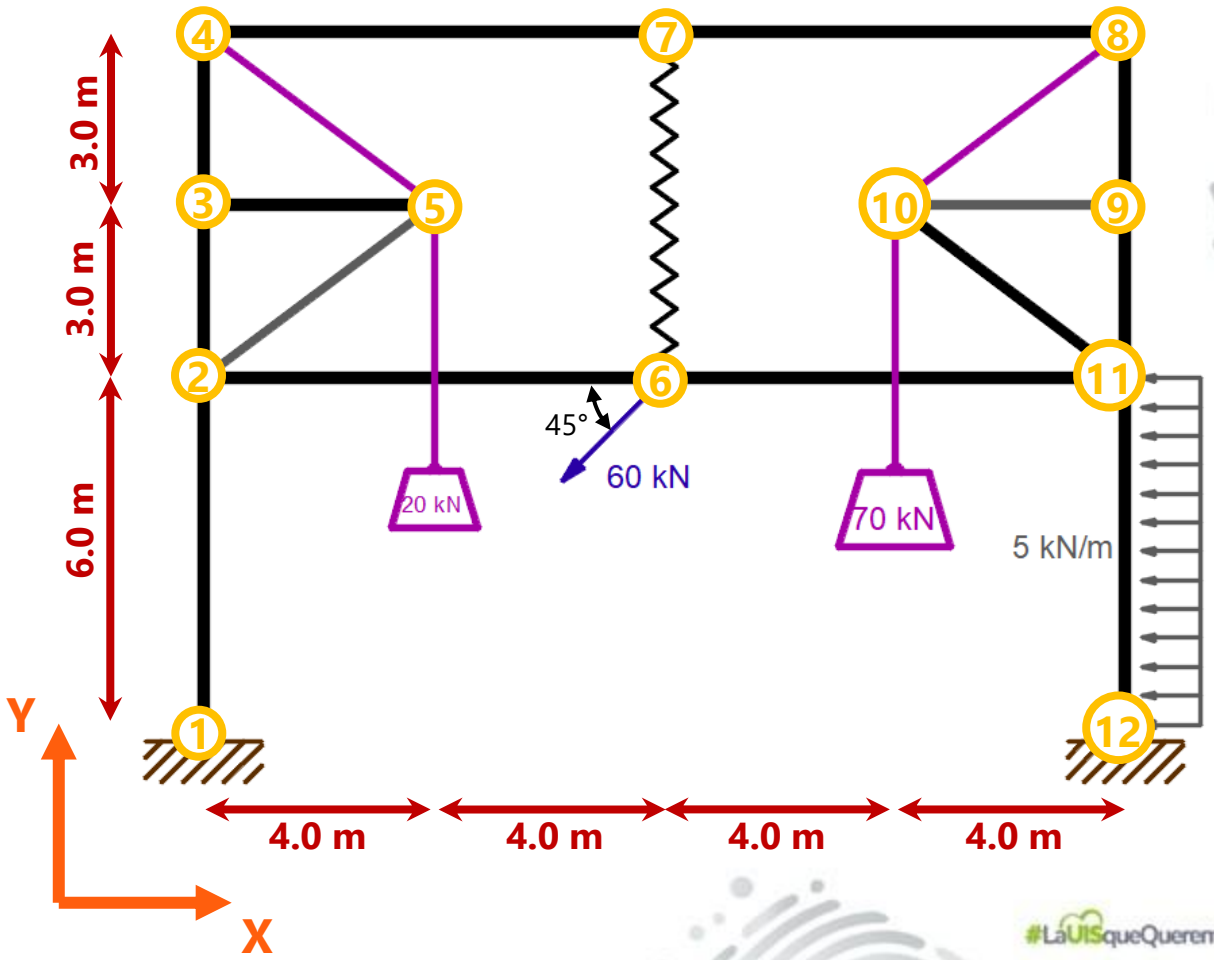
SISTEMAS MIXTOS: EJERCICIO 3

Se tiene el sistema estructural plano mostrado en la figura, conformado por un pórtico de concreto con columnas empotradas en la base, conectado a barras y cables de acero, además de un resorte vertical central. Los cables se consideran inextensibles y las poleas del los nodos 5 y 10 ideales (sin fricción y de radio despreciable).

El concreto tiene una resistencia a la compresión f'c de 28 MPa y el acero tiene un módulo de elasticidad de 200 GPa.
Las vigas tienen secciones de 0.3X0.35 m, las columnas 0.3X0.3 m, las barras son tubulares de 100 mm de lado y 4 mm de espesor, y cables de 10 cm^2.
El resorte vertical tiene una rigidez de 10000 kN/m.

Utilizando el método matricial de rigidez y considerando los ejes globales XY, se solicita:
- Determinar los desplazamientos de los nodos 5, 6 y 10.
- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Obtener las fuerzas internas en los elementos.

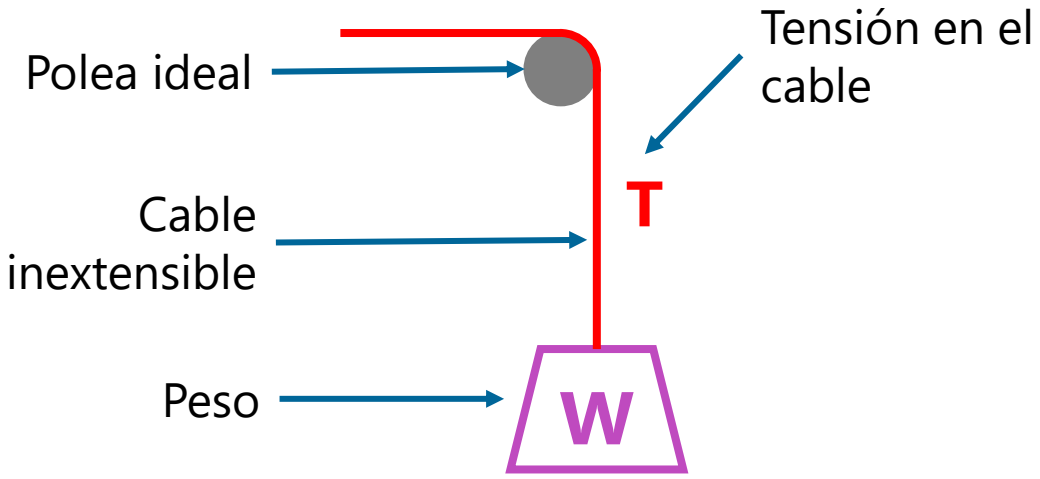
Desprecie el peso propio de los elementos y considere únicamente las cargas indicadas.



#LaUISqueQueremos

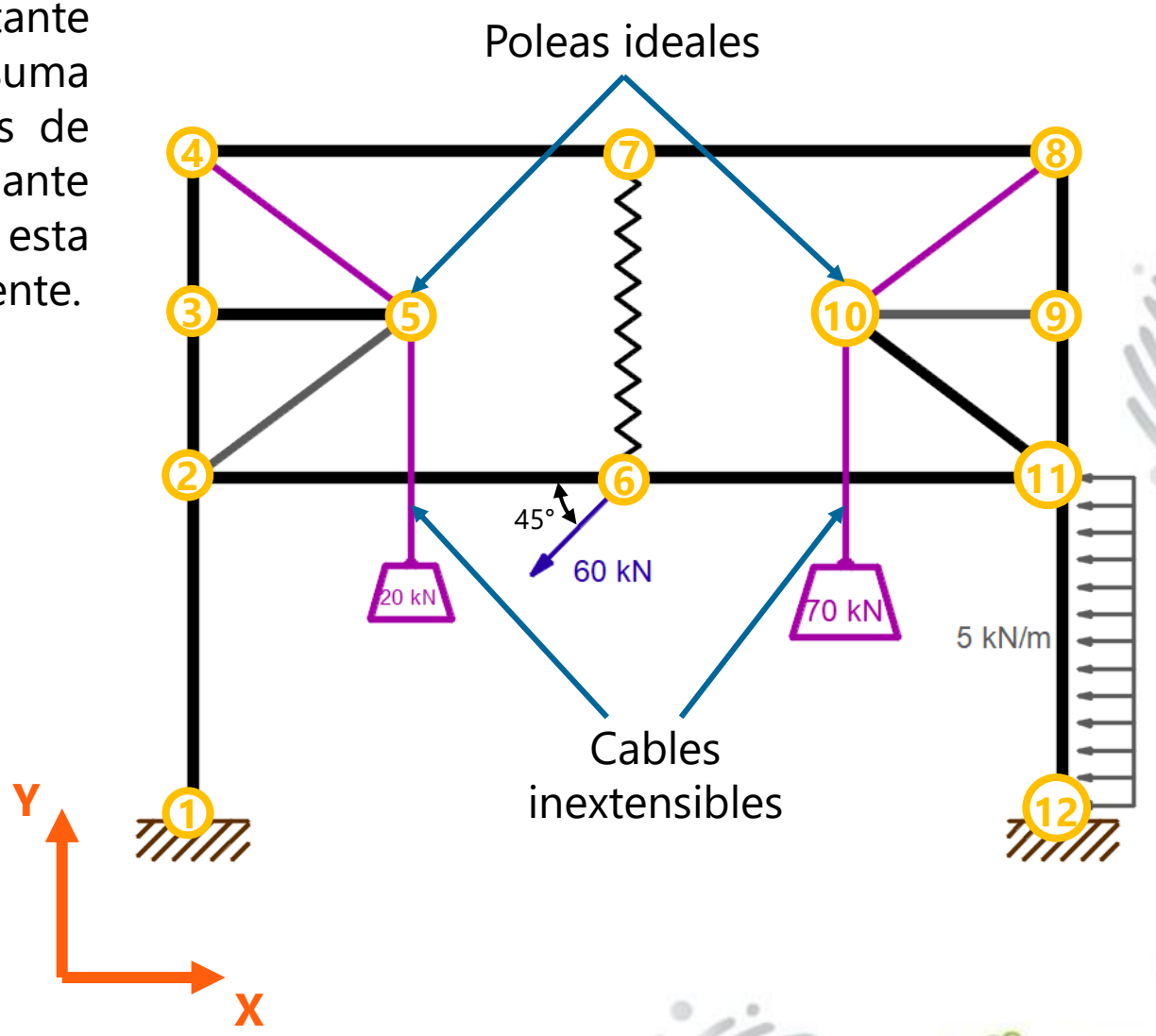
TRASPASO DE FUERZAS

En las cables inextensibles, la tensión (T) es constante en todo el cable. La polea transmite al nodo la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por los tramos de cable que llegan a ella. Por lo tanto, la carga colgante (W) debe trasladarse al nodo como parte de esta resultante, no como una fuerza externa independiente.



$$Tensión_{Cable} = Carga_{Colgante}$$

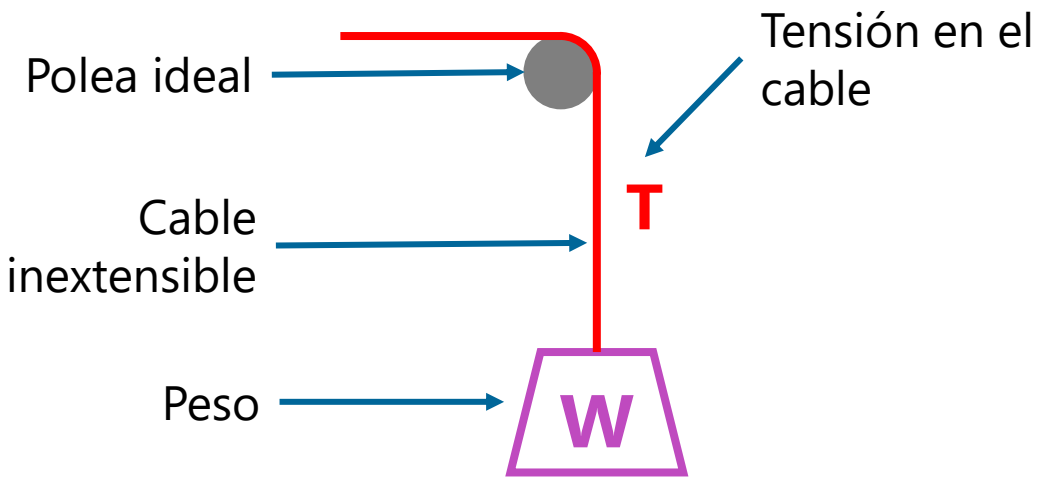
$$T = W$$



#LaUISqueQueremos

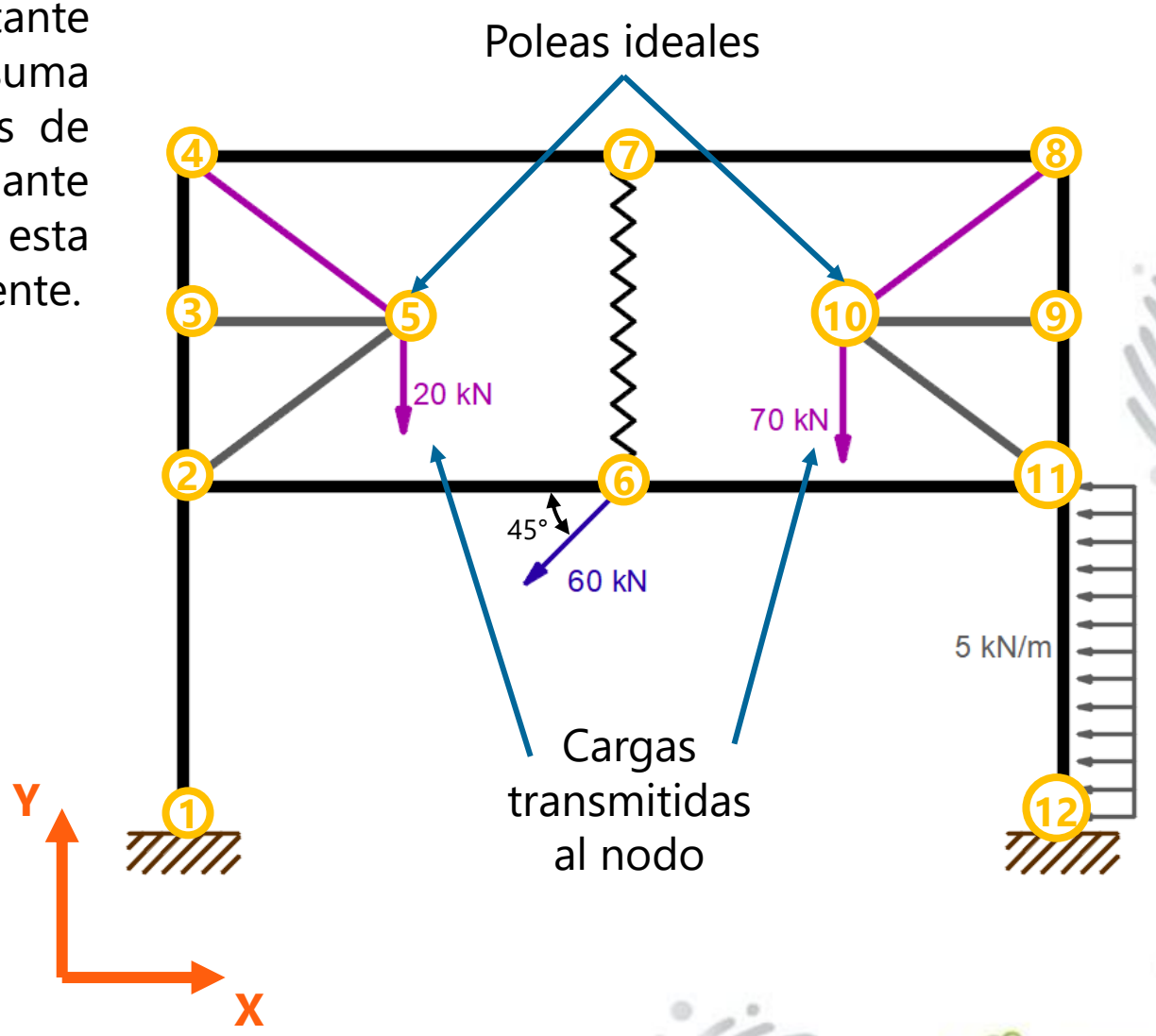
TRASPASO DE FUERZAS

En las cables inextensibles, la tensión (T) es constante en todo el cable. La polea transmite al nodo la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por los tramos de cable que llegan a ella. Por lo tanto, la carga colgante (W) debe trasladarse al nodo como parte de esta resultante, no como una fuerza externa independiente.



$$Tensión_{Cable} = Carga_{Colgante}$$

$$T = W$$



#LaUISqueQueremos

PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS

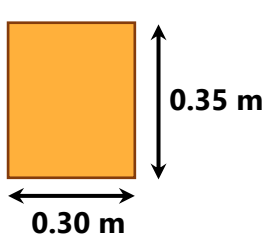
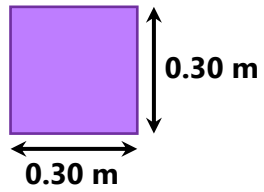
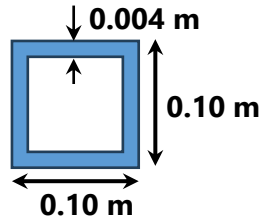
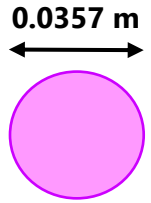
Módulo de elasticidad concreto: $E_c = 4700\sqrt{f'c}\ (MPa)$

Para $f'c = 28\ MPa$: $E_c = 4700\sqrt{28}\ MPa = 24870.06232\ MPa$

$$\boldsymbol{E_c = 24870062.32\ kN/m^2}$$

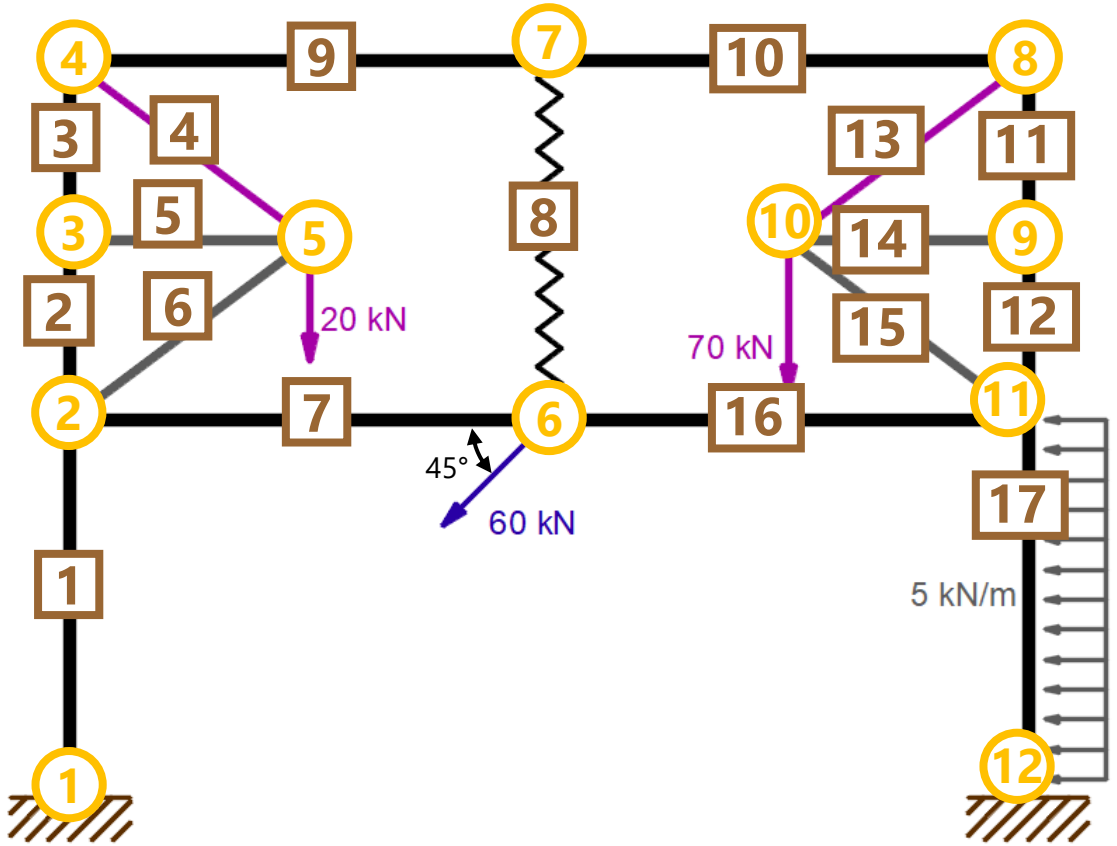
Módulo de elasticidad acero: $E_s = 200GPa$

$$\boldsymbol{E_s = 2 \times 10^8\ kN/m^2}$$

Elemento	Vigas	Columnas	Barras	Cables
				
Área transversal (m^2)	$b \cdot h$	$b \cdot h$	$4e(L-e)$	0.001
Momento de inercia (m^4)	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	1×10^{-16} * Inercia despreciable	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS



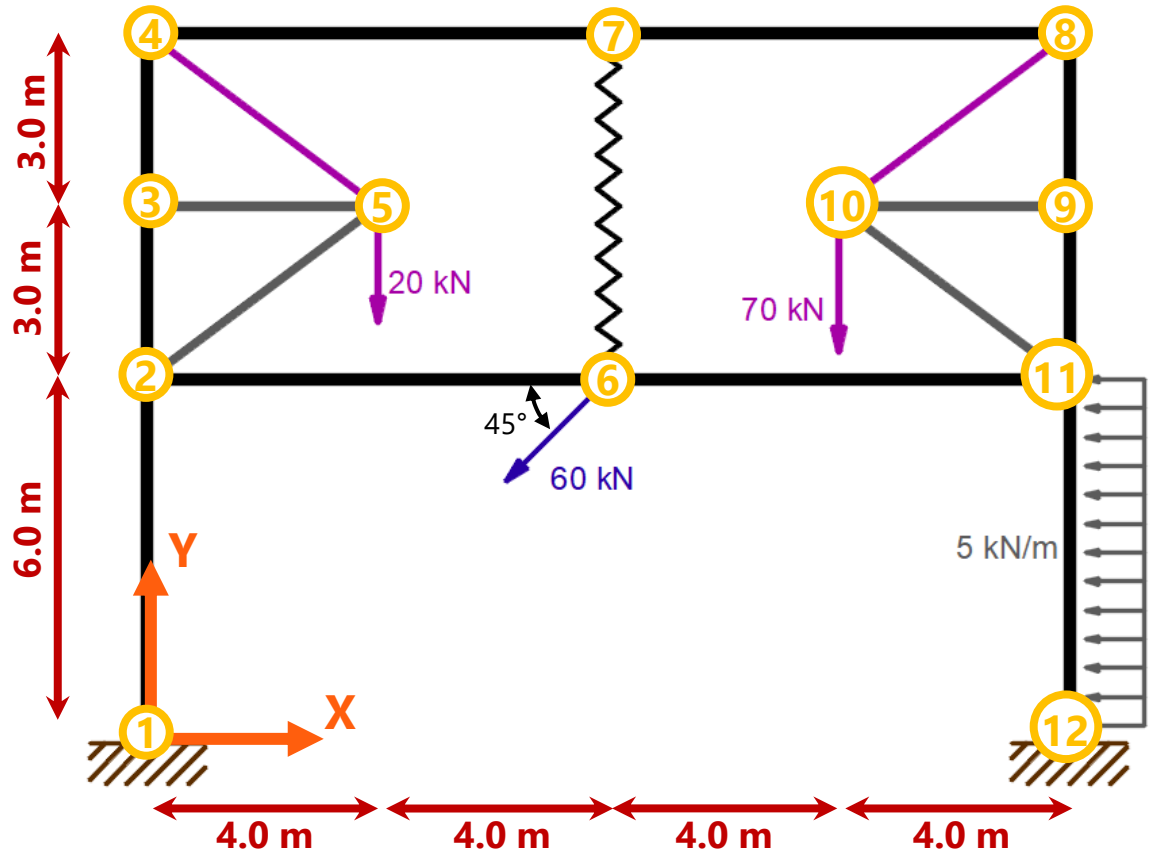
Número de nodos: 12

Número de elementos: 17

Número de grados de libertad: 24

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

COORDENADAS DE LOS NODOS



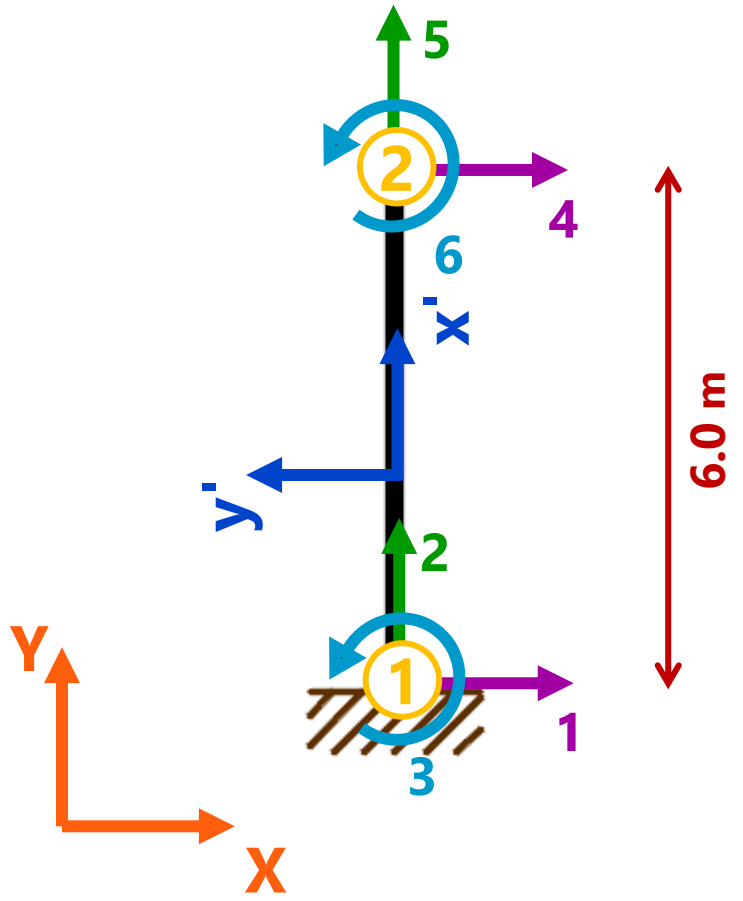
NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	6.0
3	0.0	9.0
4	0.0	12.0
5	4.0	9.0
6	8.0	6.0
7	8.0	12.0
8	16.0	12.0
9	16.0	9.0
10	12.0	9.0
11	16.0	6.0
12	16.0	0.0

#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 1

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90

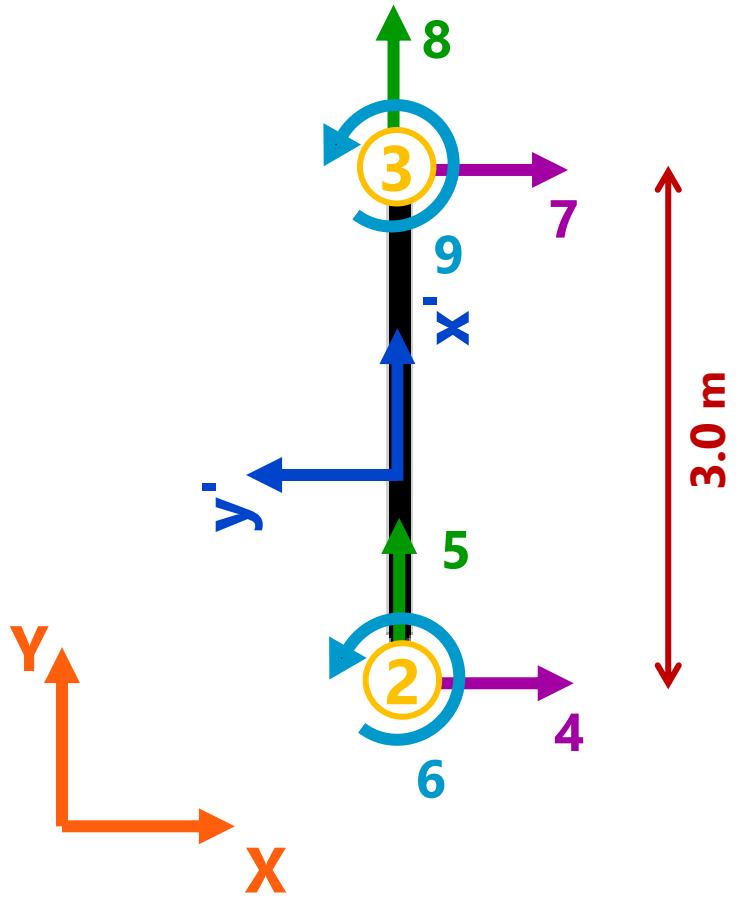


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 2

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90

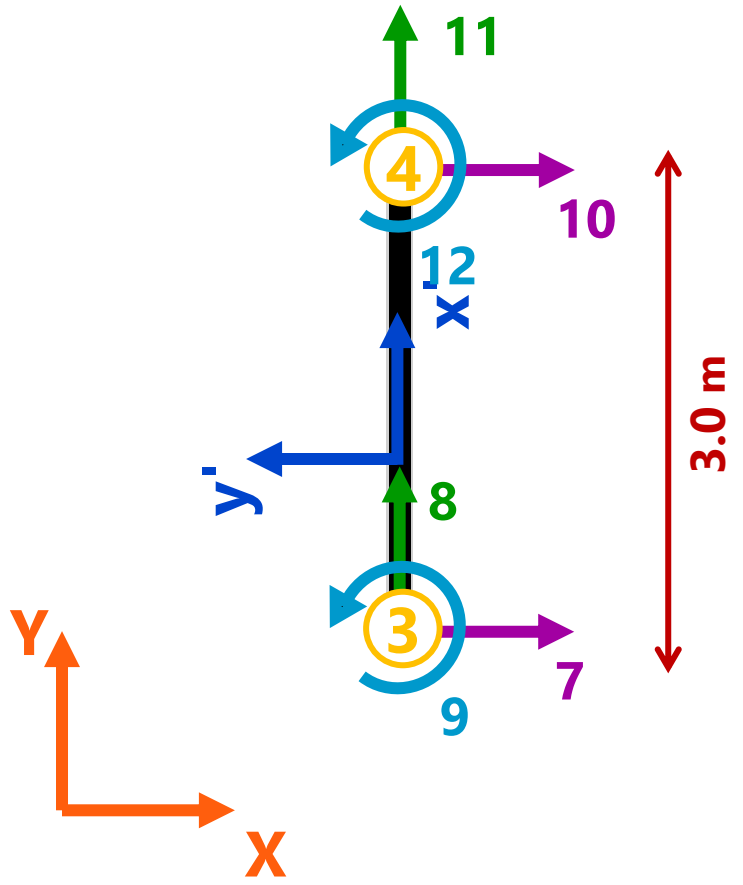


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 3

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90

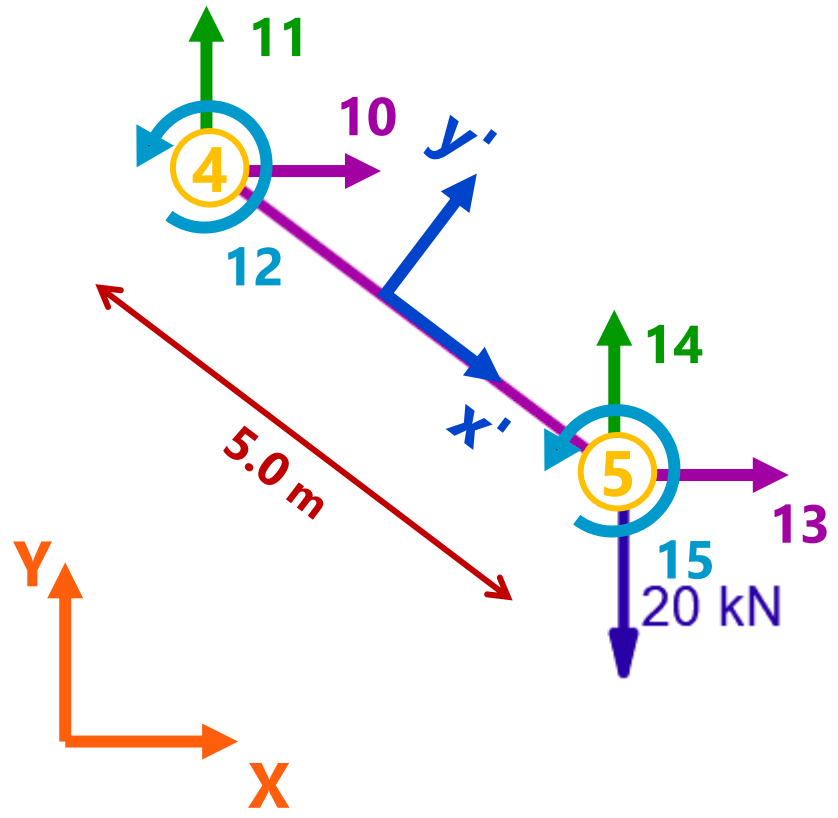


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 4

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87

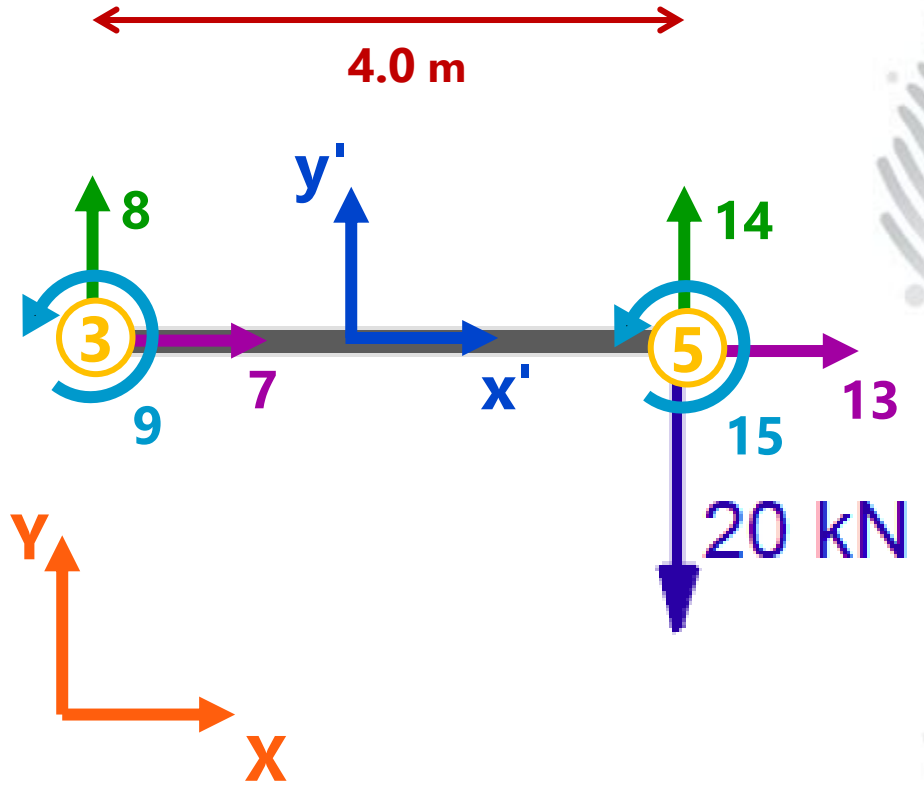


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 5

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0

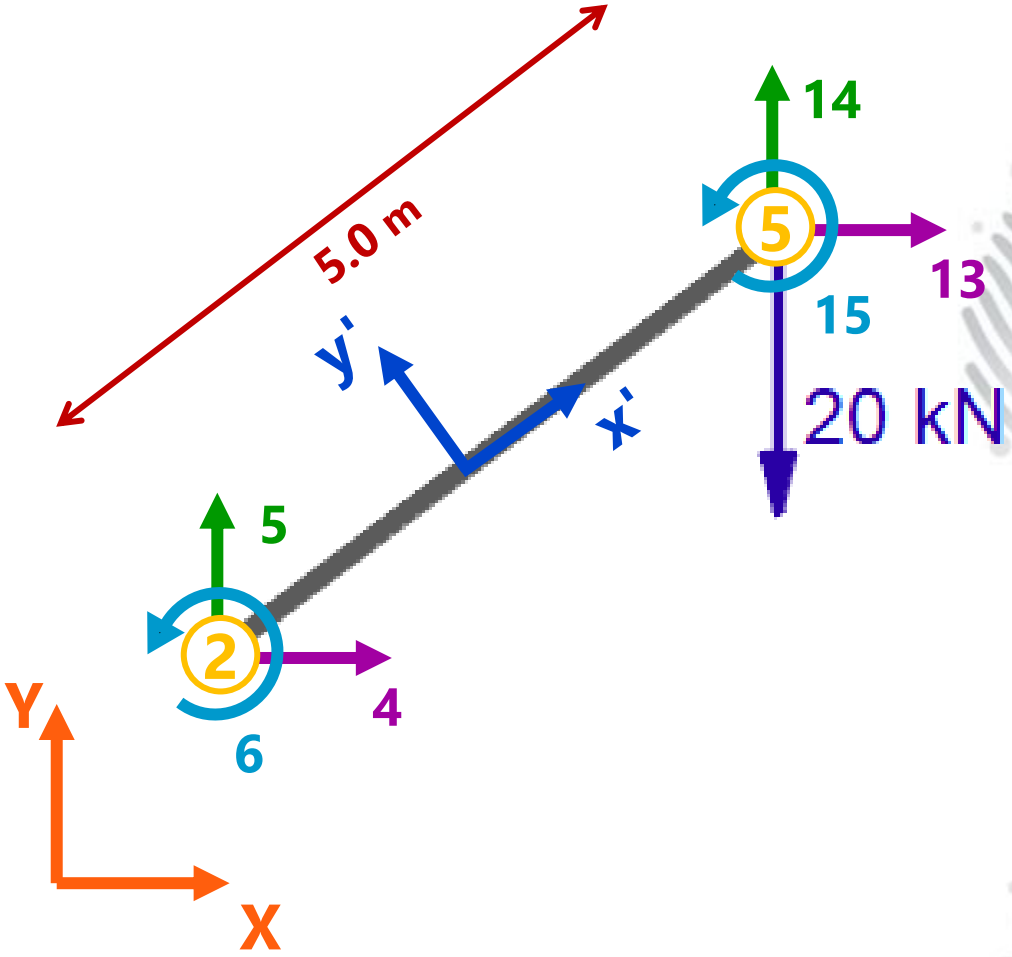


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 6

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87

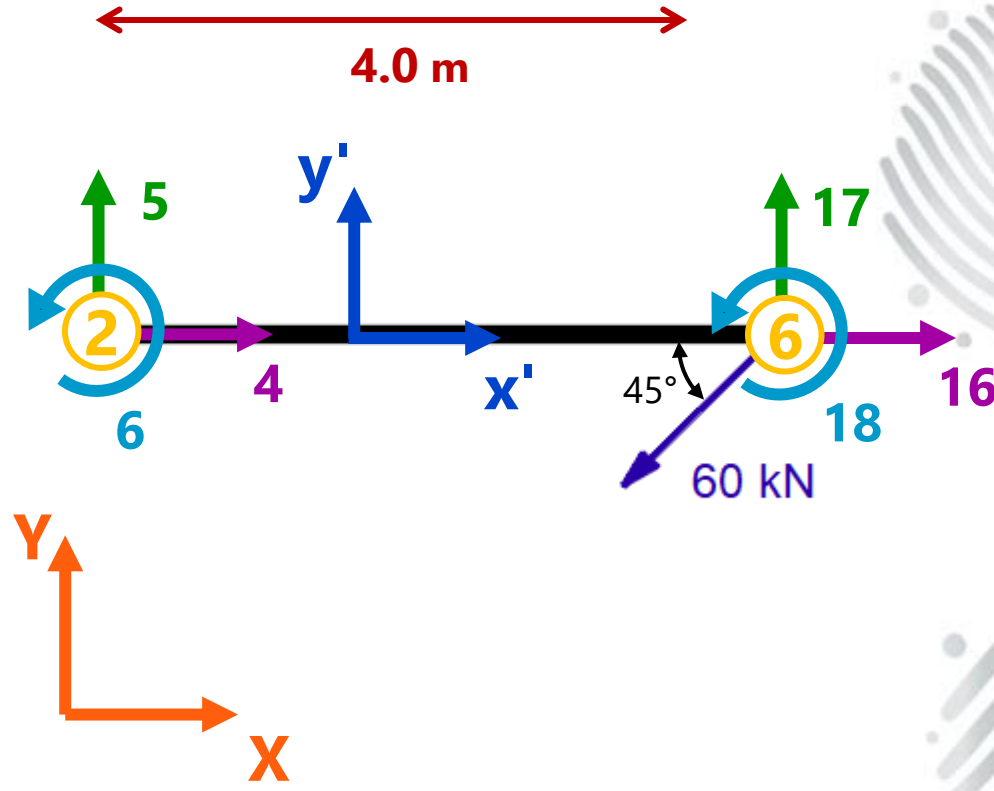


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 7

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87
7	Viga	2	6	8.0	0

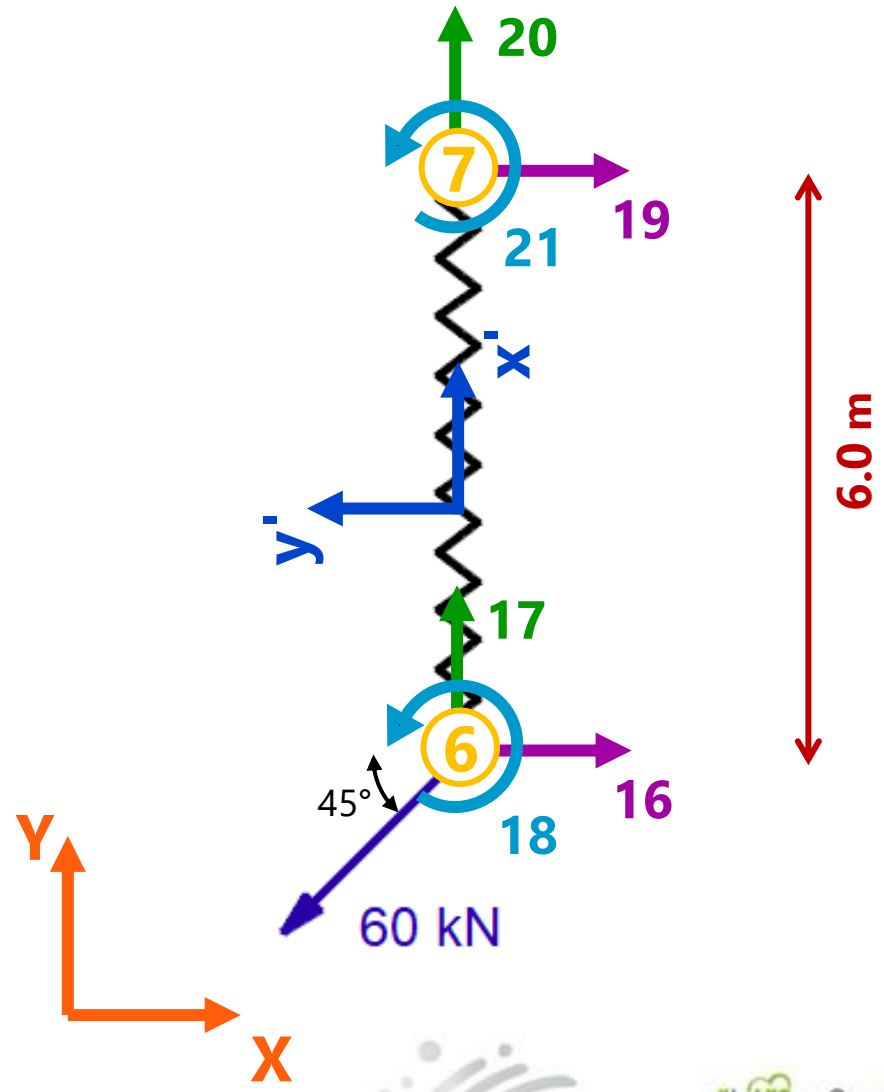


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 8

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87
7	Viga	2	6	8.0	0
8	Resorte	6	7	6.0	90



#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 8

Modelado de resortes – Equivalencia con elemento tipo barra

El resorte se modela como un elemento tipo barra con área equivalente, utilizando un módulo de elasticidad supuesto (generalmente el del material de referencia o uno convencional).

De la rigidez axial de un elemento tipo barra: $k = \frac{EA}{L}$

Despejando el área: $A = \frac{kL}{E}$

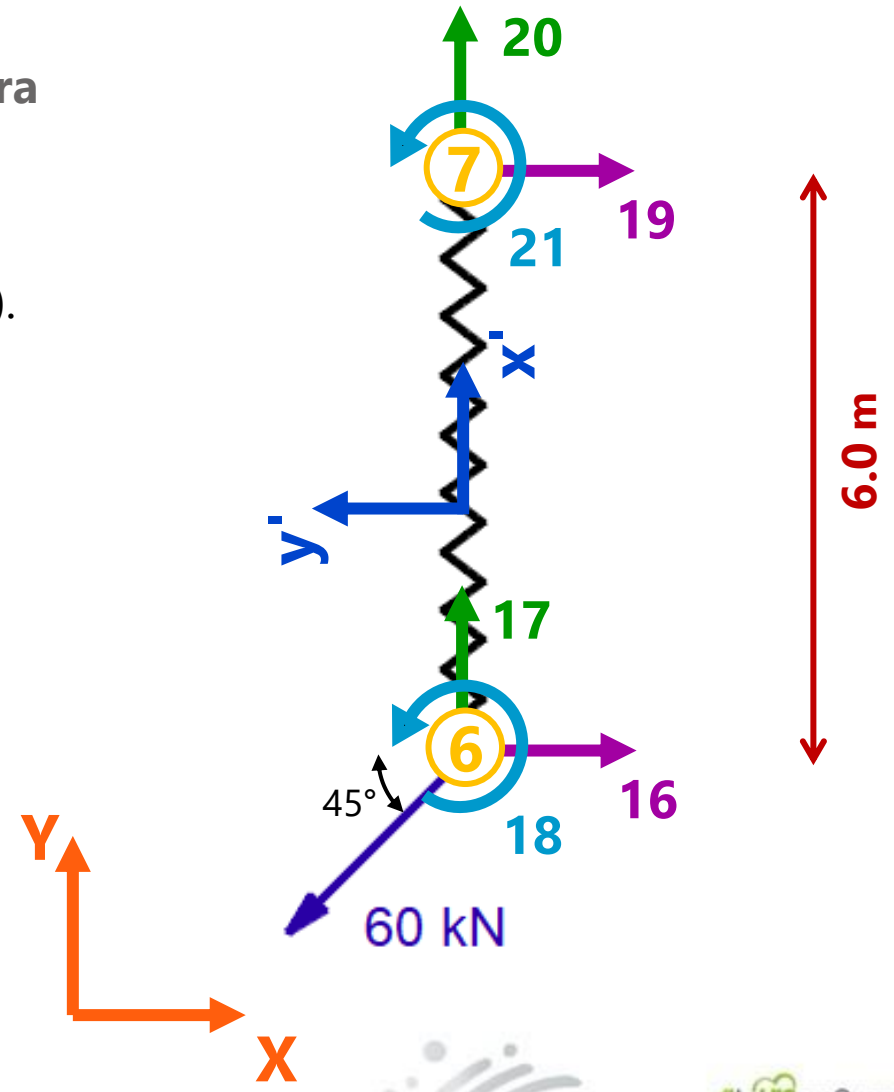
Donde:

k = rigidez del resorte (dato)

L = longitud del elemento resorte (distancia entre nodos)

E = módulo de elasticidad supuesto (elegido)

A = área calculada para el elemento tipo barra



#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 8

Modelado de resortes – Equivalencia con elemento tipo barra

Para el elemento 8 con:

k = 10000 kN/m

L = 6 m

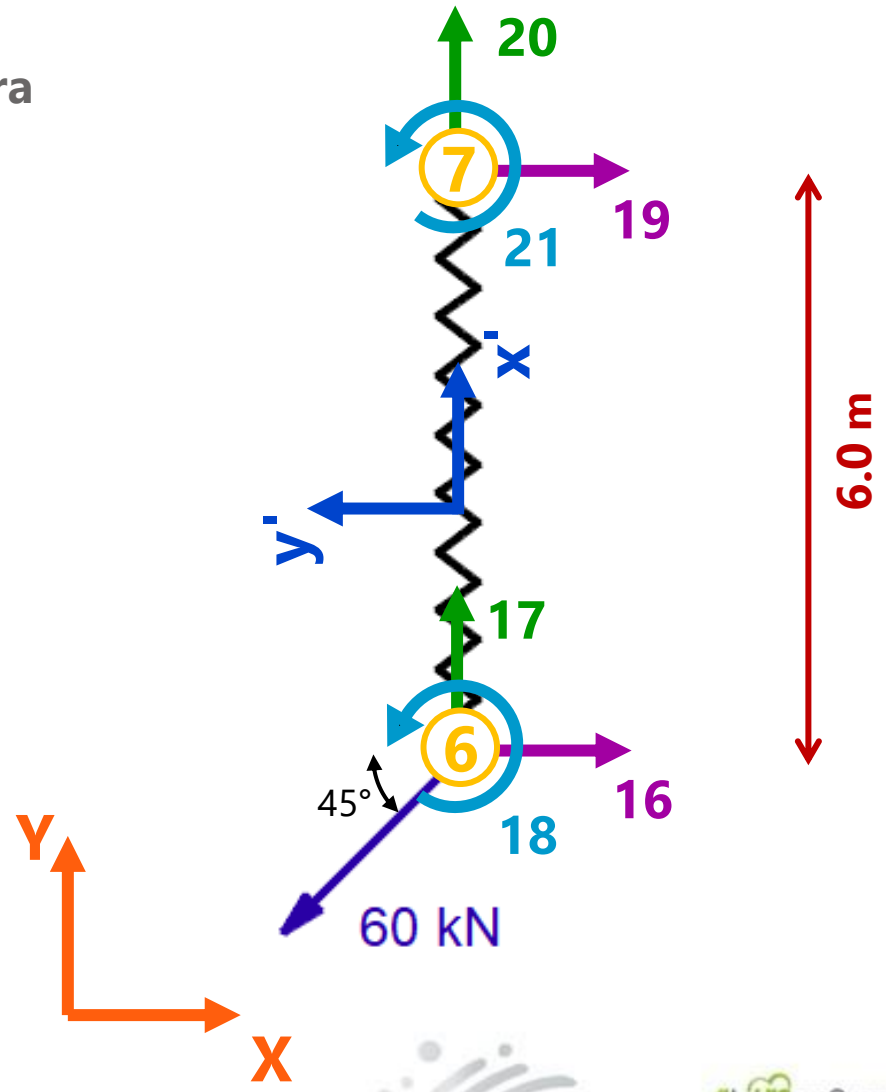
E = $2x10^8$ kN/m^2 (acero)

Calcular el área:

$$A = \frac{kL}{E} = \frac{\left(10000\ k_{N/m}\right)(6\ m)}{2 \times 10^8\ {}^{kN}/_{m^2}}$$

$$A = 0.0003\ m^2$$

Para que el elemento tipo barra se comporte exclusivamente como un resorte axial, su inercia (I) se considera despreciable ($1x10^{-16}$ m^4). De esta forma, el elemento no desarrolla rigidez a flexión ni a corte, y solo resiste fuerza en la dirección de su eje.

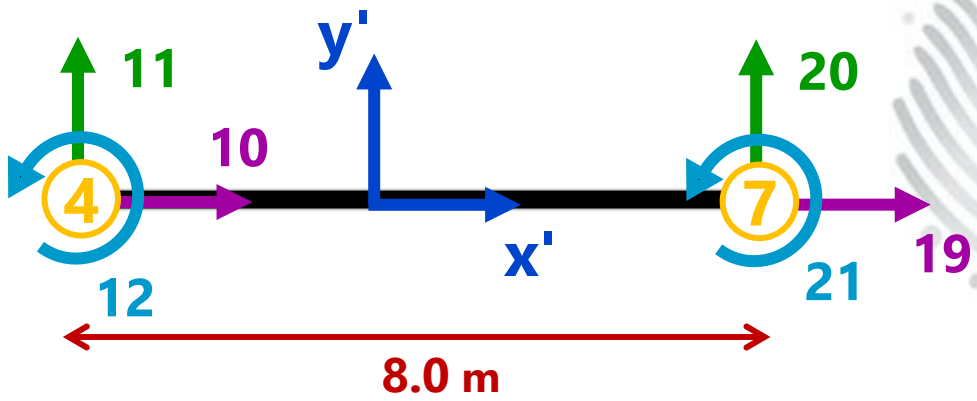


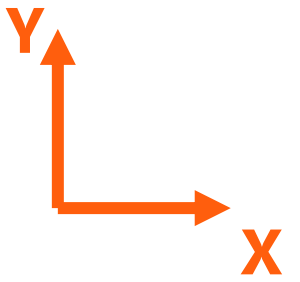
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 9

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87
7	Viga	2	6	8.0	0
8	Resorte	6	7	6.0	90
9	Viga	4	7	8.0	0



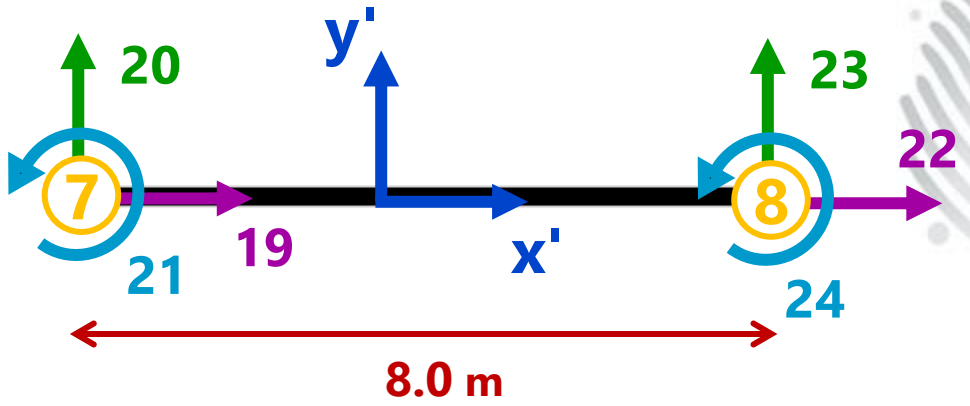


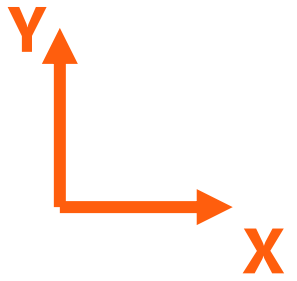
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 10

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87
7	Viga	2	6	8.0	0
8	Resorte	6	7	6.0	90
9	Viga	4	7	8.0	0
10	Viga	7	8	8.0	0



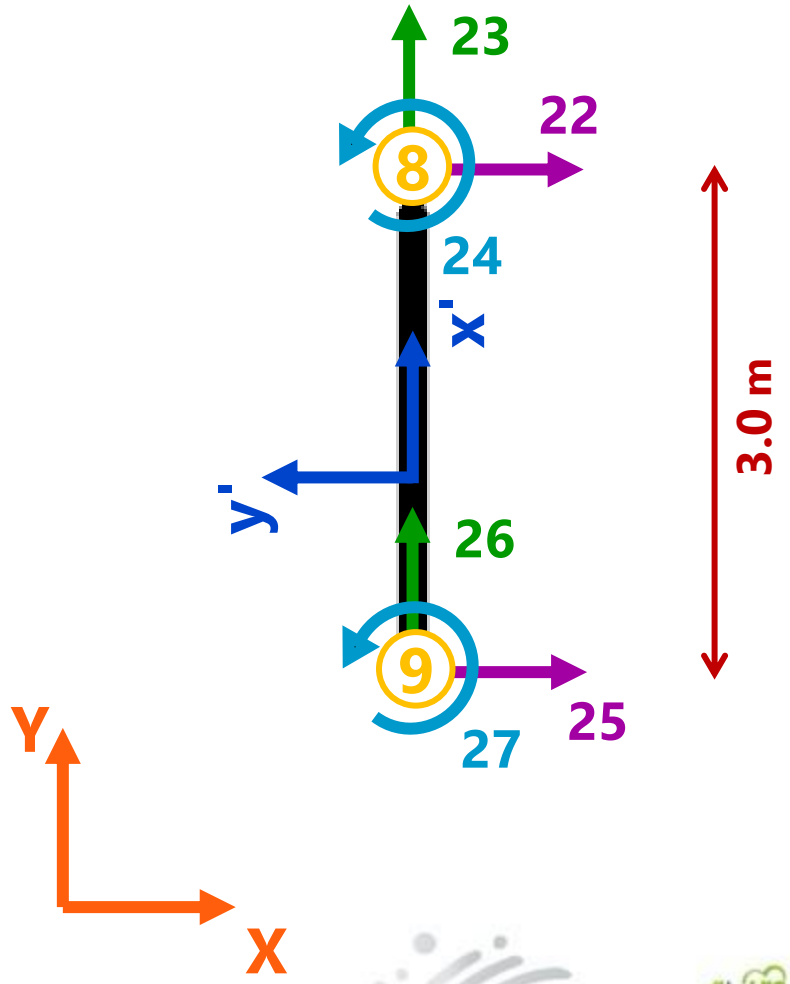


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 11

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90

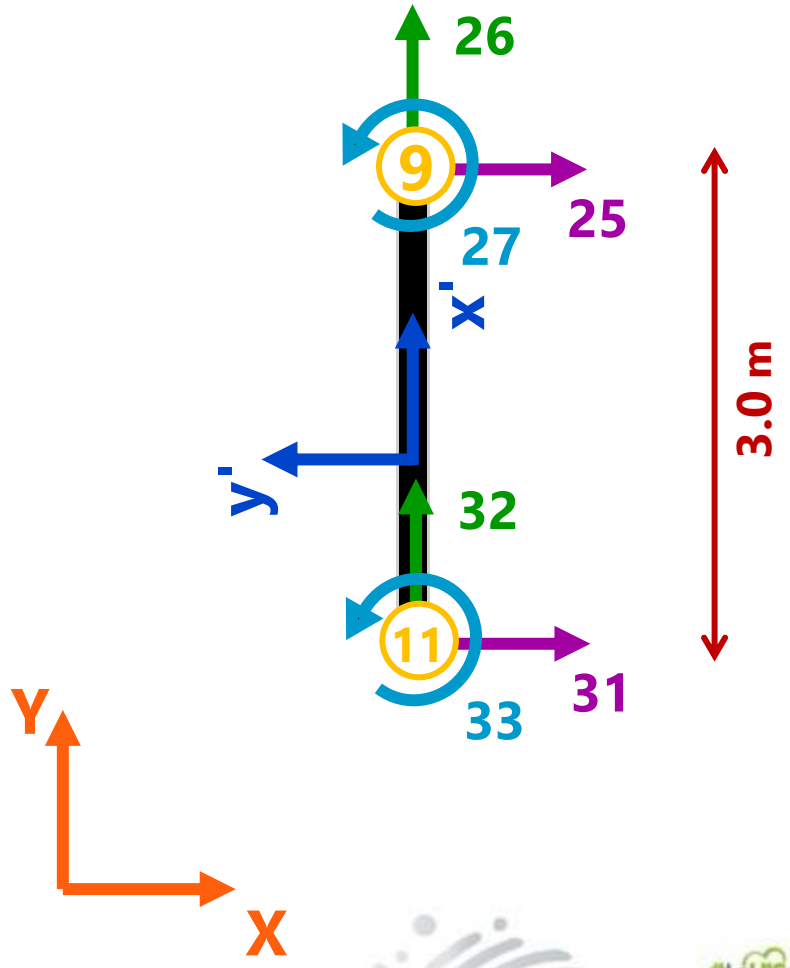


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 12

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90

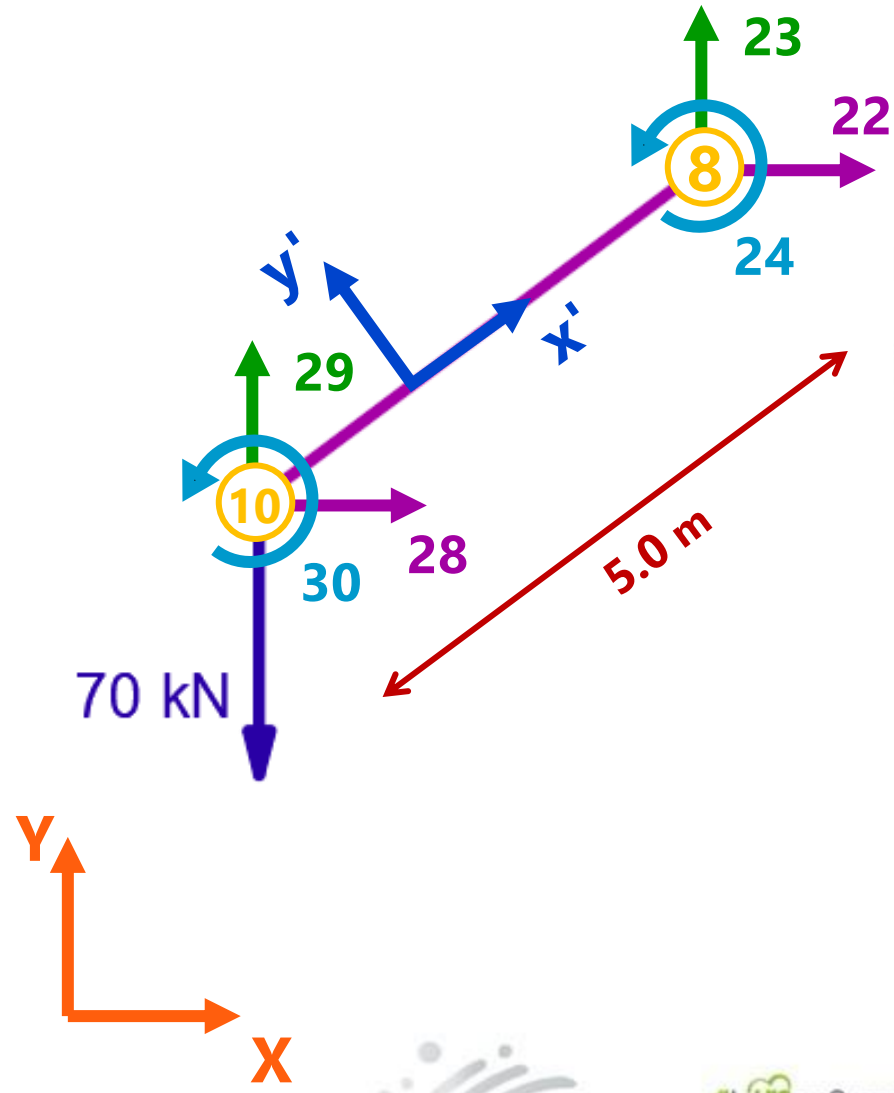


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 13

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87

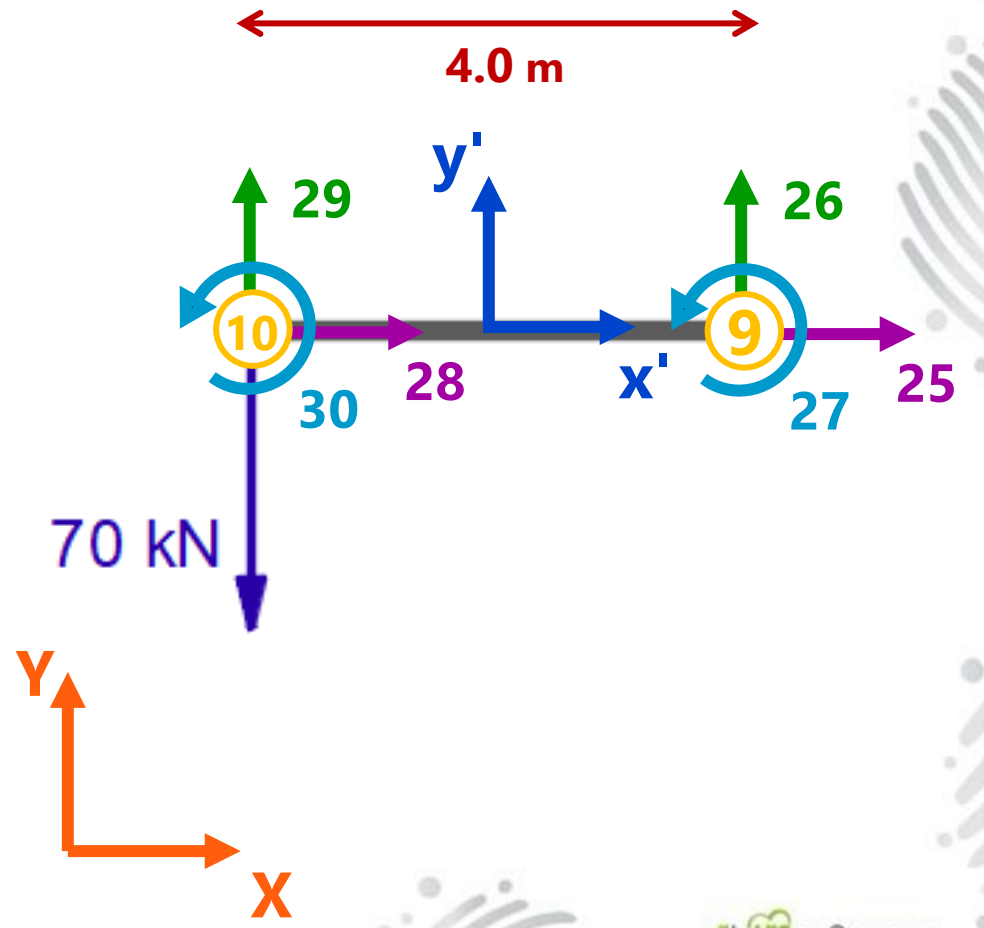


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 14

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87
14	Barra	10	9	4.0	0

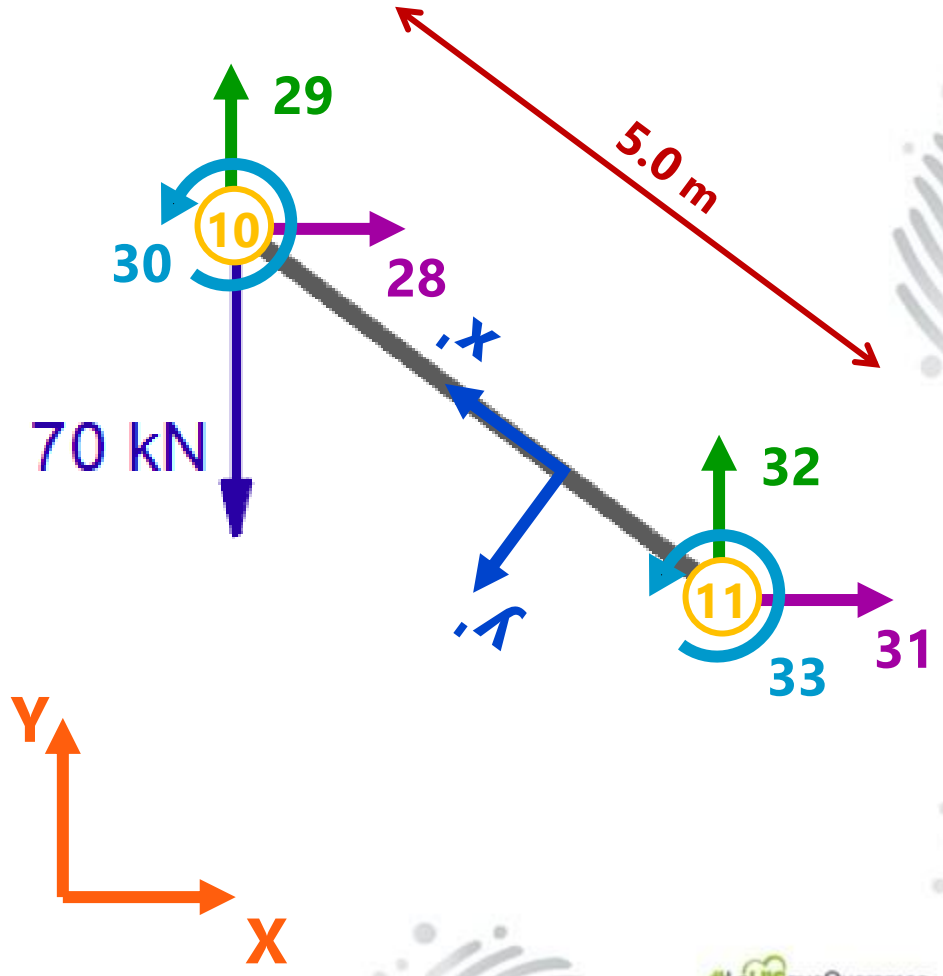


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 15

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87
14	Barra	10	9	4.0	0
15	Barra	11	10	5.0	143.13

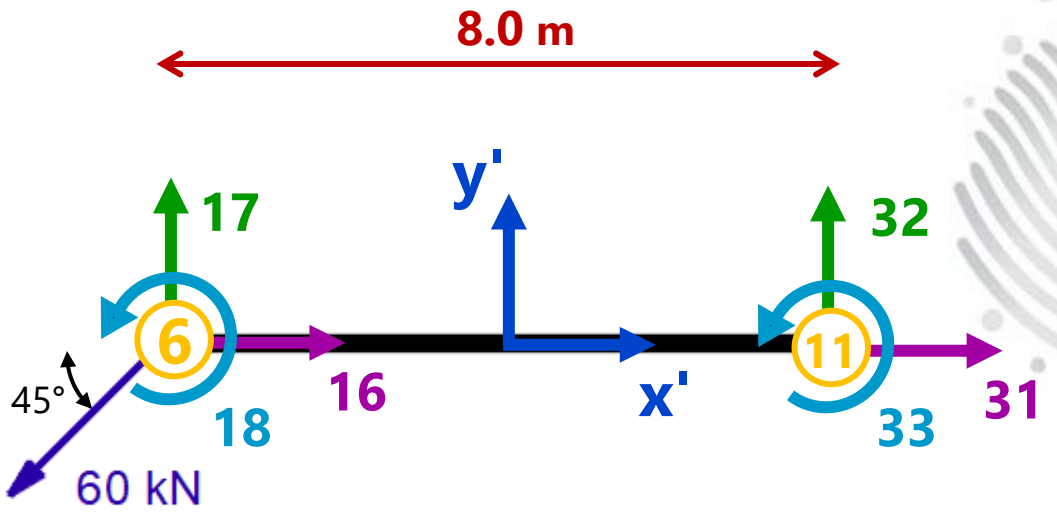


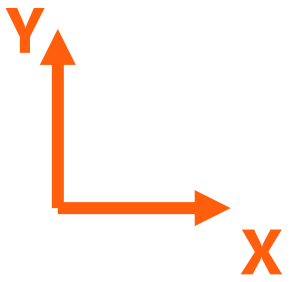
#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 16

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87
14	Barra	10	9	4.0	0
15	Barra	11	10	5.0	143.13
16	Viga	6	11	8.0	0



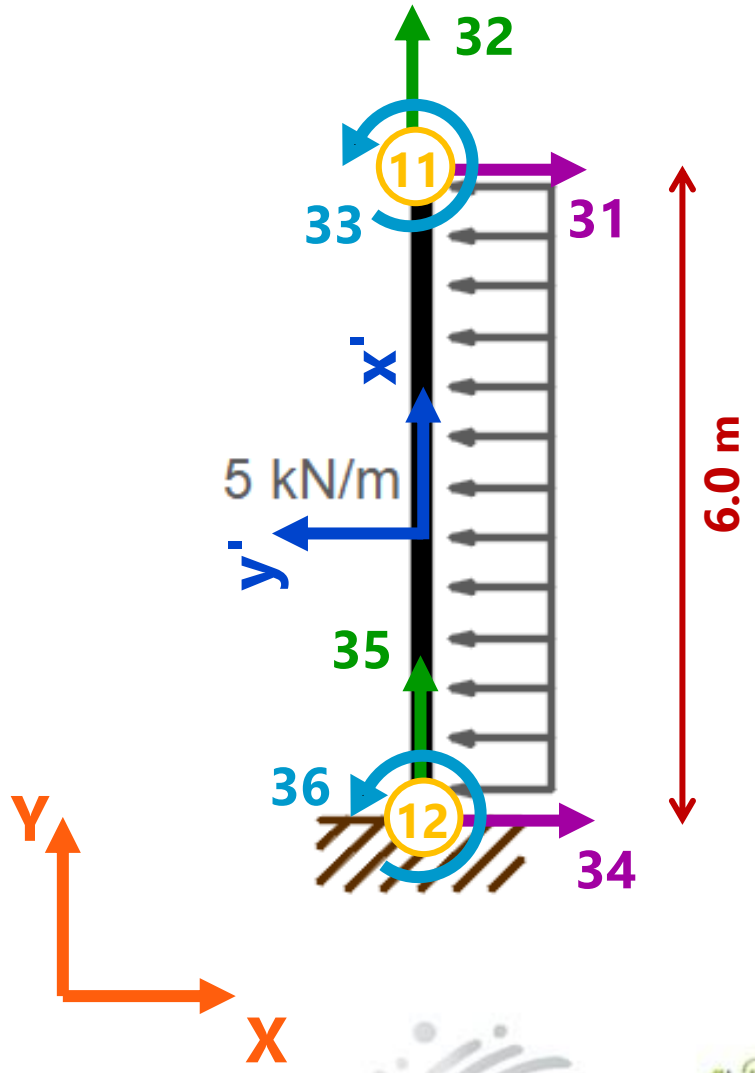


#LaUISqueQueremos

DISCRETIZACIÓN DE LOS ELEMENTOS

ELEMENTO 17

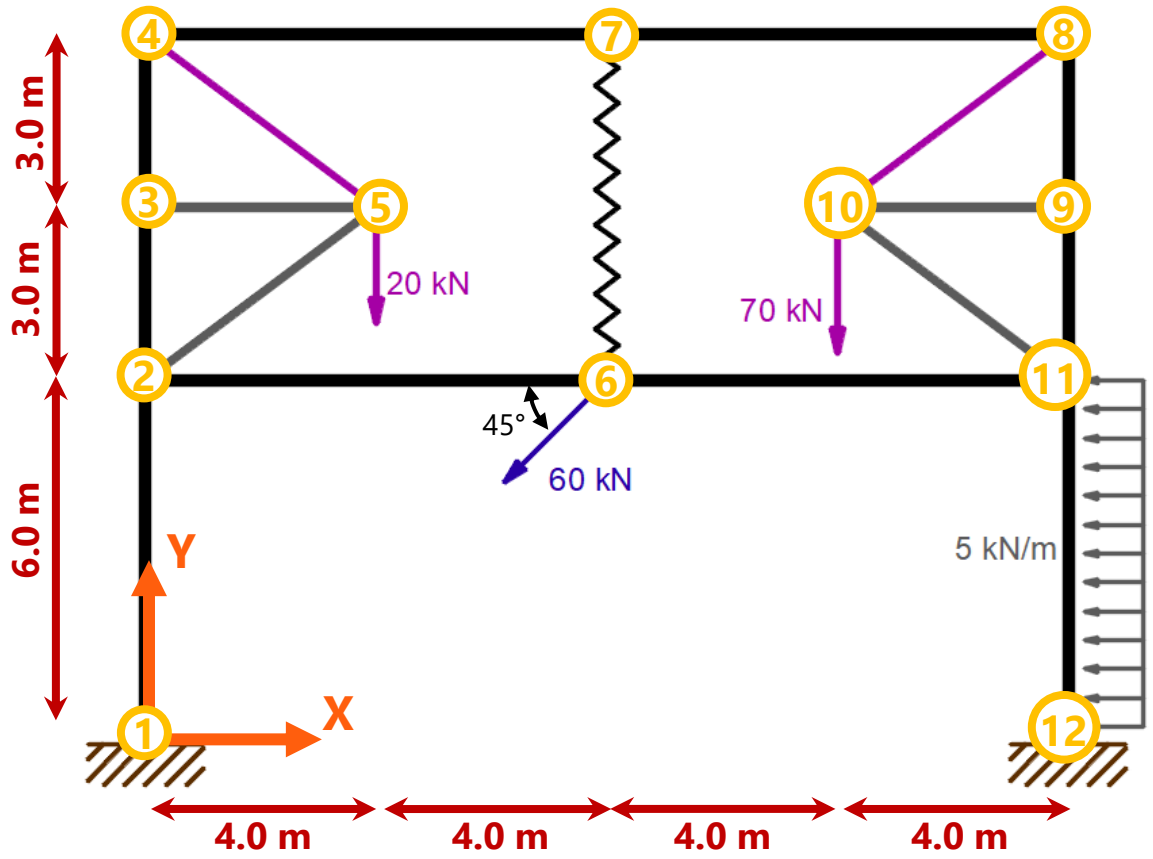
ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87
14	Barra	10	9	4.0	0
15	Barra	11	10	5.0	143.13
16	Viga	6	11	8.0	0
17	Columna	12	11	6.0	90



#LaUISqueQueremos

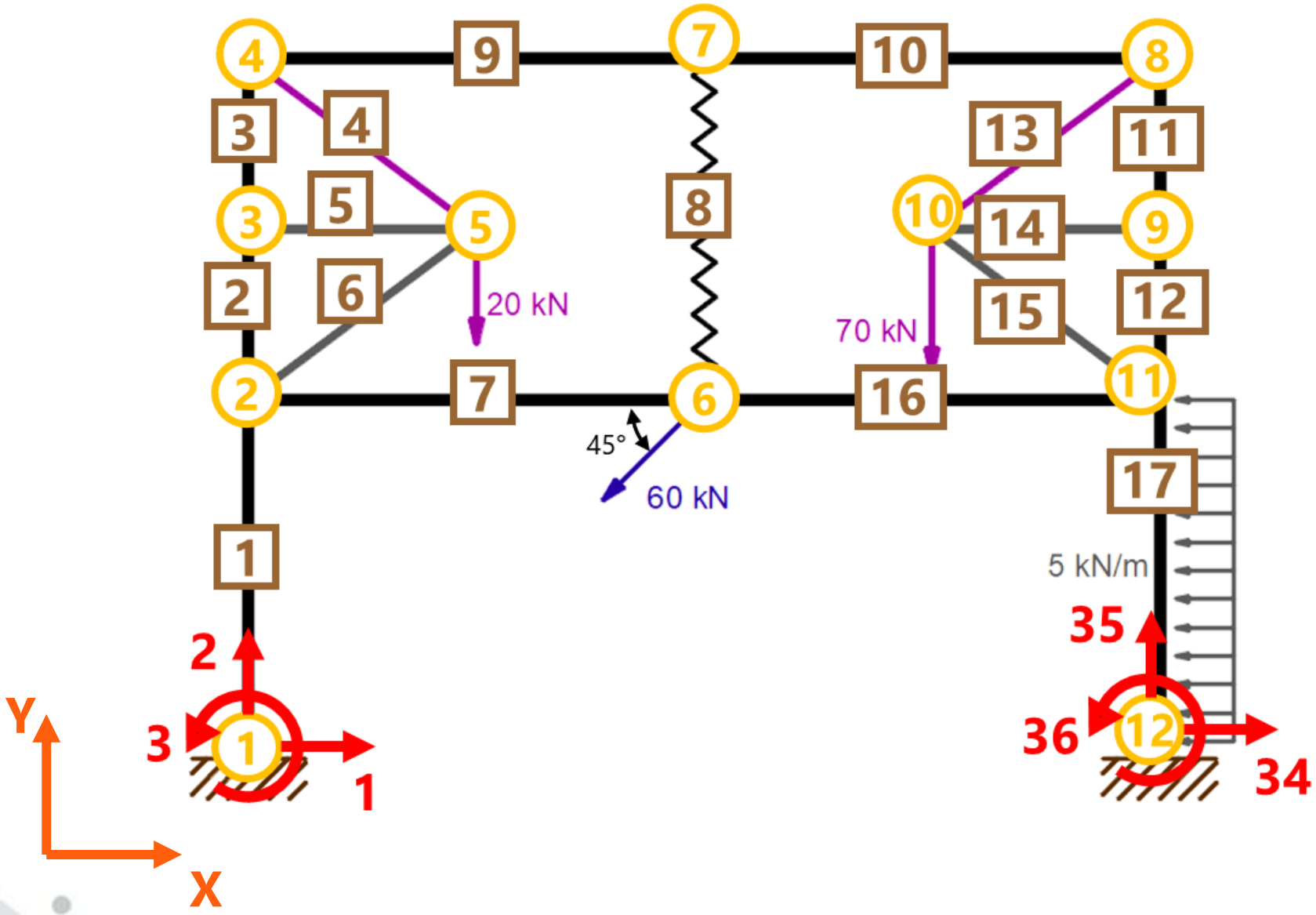
COORDENADAS DE LOS NODOS

NODO	COORD. X	COORD. Y
1	0.0	0.0
2	0.0	6.0
3	0.0	9.0
4	0.0	12.0
5	4.0	9.0
6	8.0	6.0
7	8.0	12.0
8	16.0	12.0
9	16.0	9.0
10	12.0	9.0
11	16.0	6.0
12	16.0	0.0



#LaUISqueQueremos

CONDICIONES DE CONTORNO

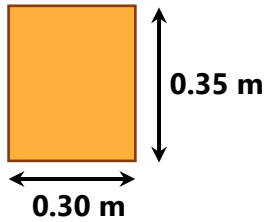
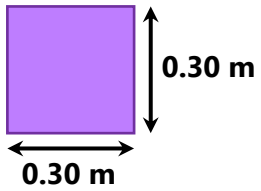
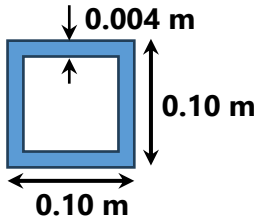
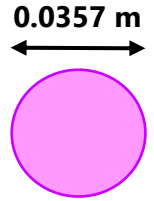
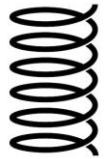


- Grados de libertad restringidos

DATOS DE ENTRADA

Módulo de elasticidad del concreto: $E_c = 24870062.32\ {}^{kN}/_{m^2}$

Módulo de elasticidad del acero: $E_s = 2 \times 10^8\ {}^{kN}/_{m^2}$

Elemento	Vigas	Columnas	Barras	Cables	Resorte
					
Área transversal (m^2)	$b \cdot h$	$b \cdot h$	$4e(L-e)$	0.001	0.0003
Momento de inercia (m^4)	$\frac{1}{12}bh^3$	$\frac{1}{12}bh^3$	1×10^{-16} * Inercia despreciable	1×10^{-16} * Inercia despreciable	1×10^{-16} * Inercia despreciable

#LaUISqueQueremos

CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
1	Columna	1	2	6.0	90
2	Columna	2	3	3.0	90
3	Columna	3	4	3.0	90
4	Cable	4	5	5.0	-36.87
5	Barra	3	5	4.0	0
6	Barra	2	5	5.0	36.87
7	Viga	2	6	8.0	0
8	Resorte	6	7	6.0	90
9	Viga	4	7	8.0	0
10	Viga	7	8	8.0	0

#LaUISqueQueremos

CONECTIVIDAD DE LOS ELEMENTOS

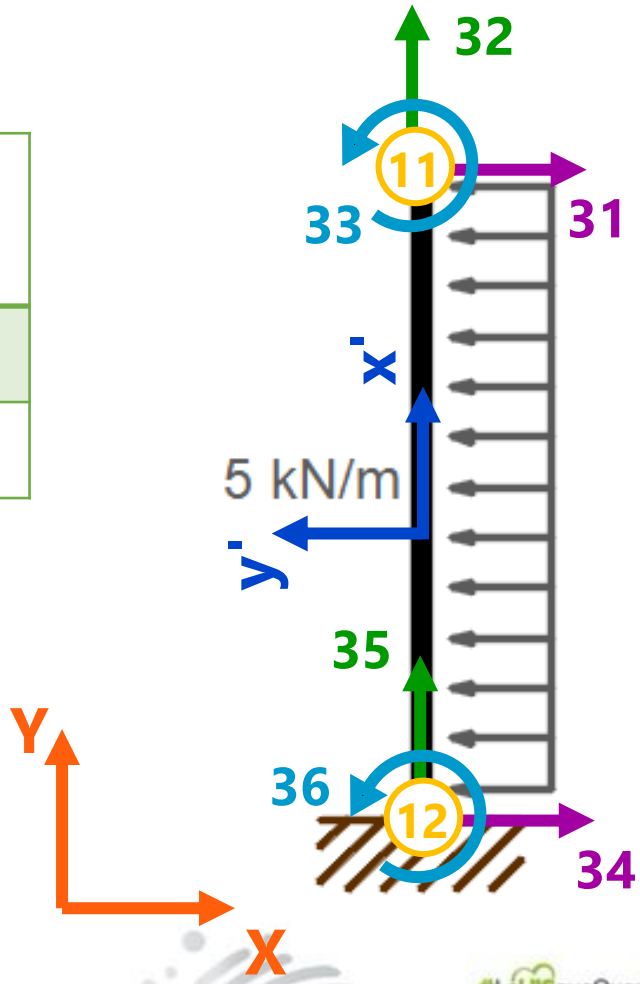
ELEM	TIPO	NODO i	NODO f	L [m]	θ [°]
11	Columna	9	8	3.0	90
12	Columna	11	9	3.0	90
13	Cable	10	8	5.0	36.87
14	Barra	10	9	4.0	0
15	Barra	11	10	5.0	143.13
16	Viga	6	11	8.0	0
17	Columna	12	11	6.0	90

#LaUISqueQueremos

CARGAS SOBRE LOS ELEMENTOS

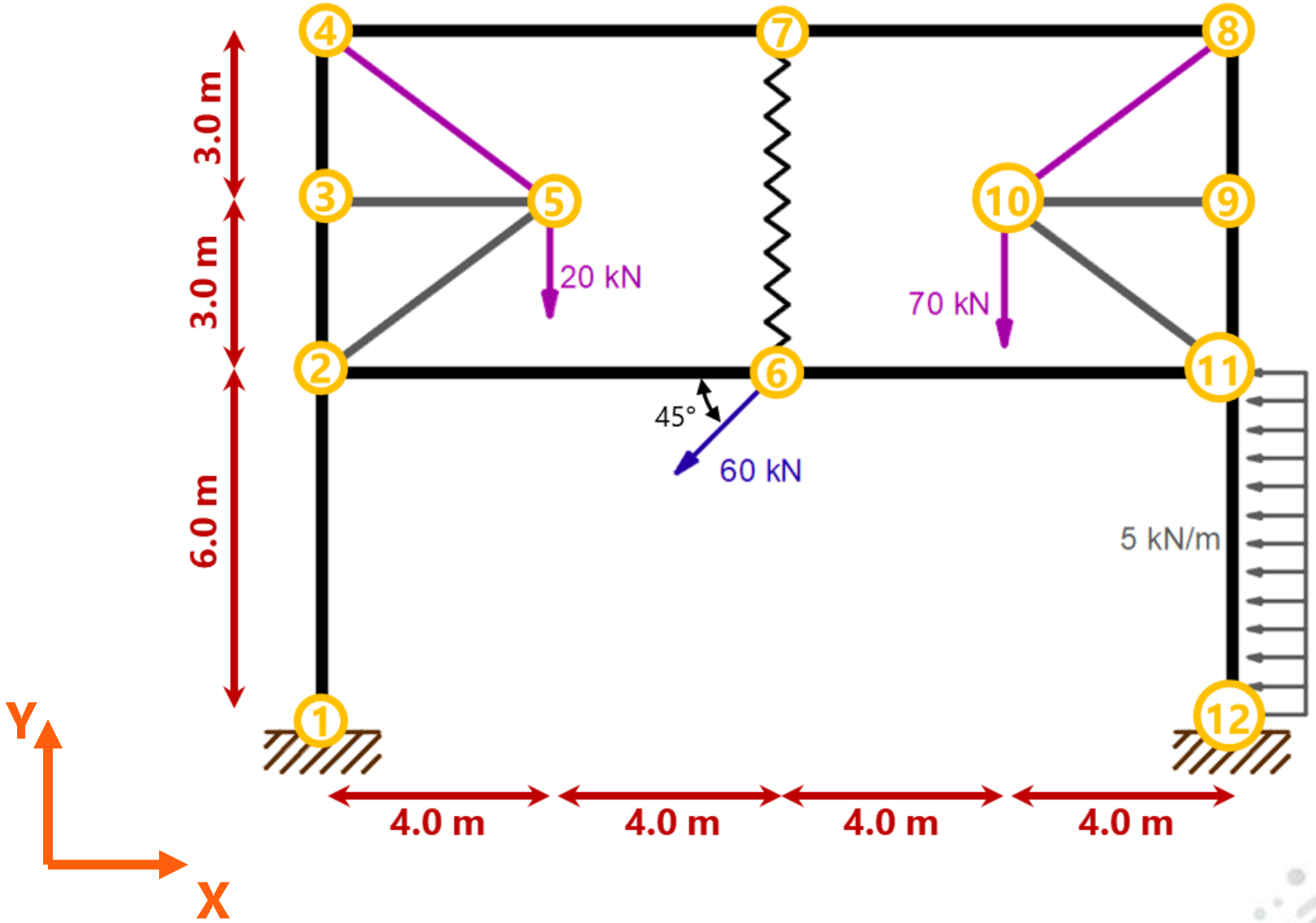
ELEM	TIPO	SISTEMA DE REFERENCIA	Wi (kN/m)	Wf (kN/m)
1-16	—	—	—	—
2	Uniforme	Local y	5.0	5.0

Elemento 17



#LaUISqueQueremos

GRAFICA SISTEMA ORIGINAL



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

REACCIONES

Nodo 1:

Rx = 32.541 kN

Ry = 60.487 kN

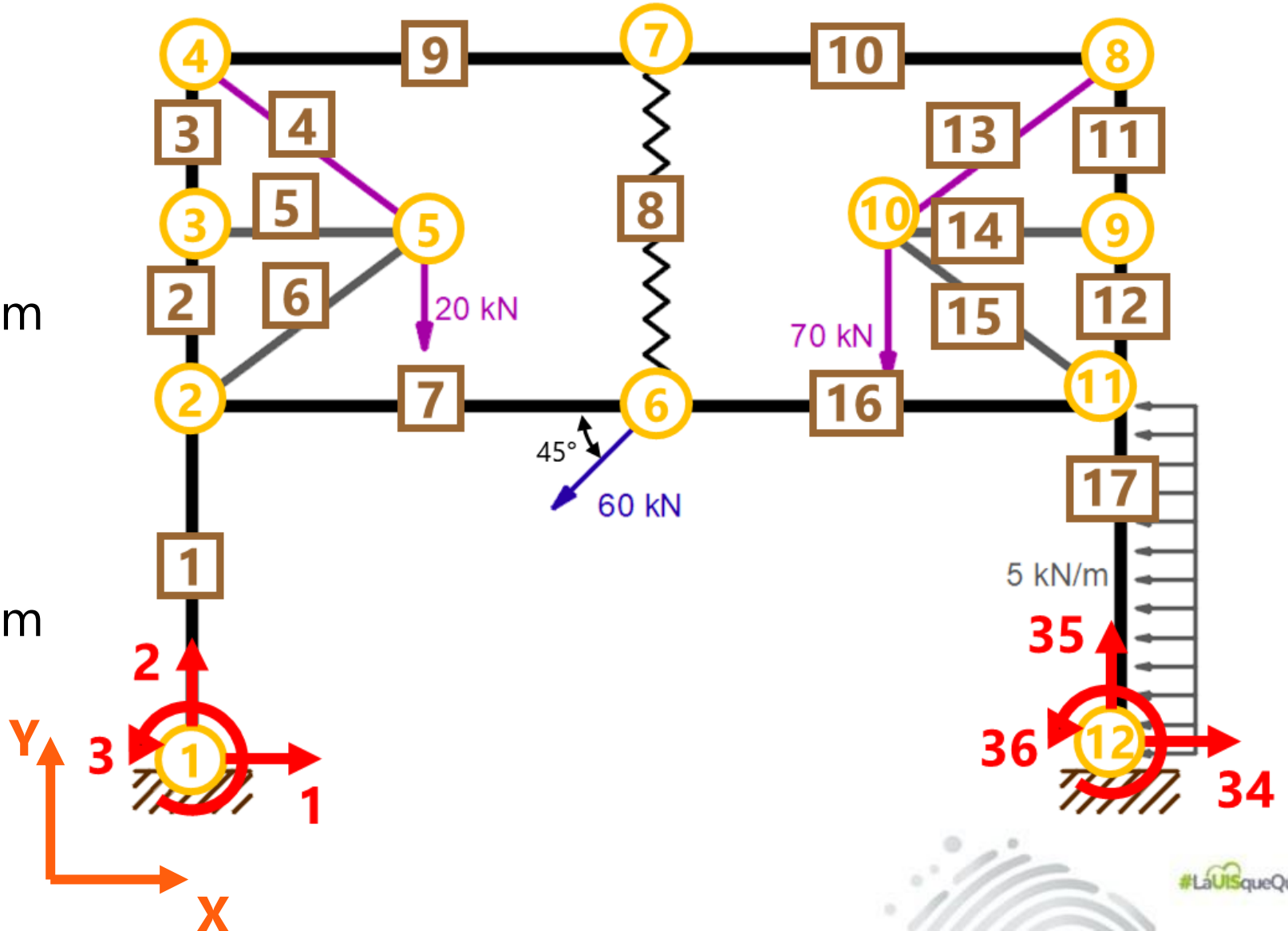
Mz = -118.320 kN-m

Nodo 12:

Rx = 39.885 kN

Ry = 71.939 kN

Mz = -117.852 kN-m



#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

DESPLAZAMIENTOS

Nodo	Ux (m)	Uy (m)	θz (rad)
1	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00
2	-5.708e-02	-1.621e-04	7.397e-03
3	-8.954e-02	-1.889e-04	1.291e-02
4	-1.210e-01	-2.157e-04	4.877e-03
5	-8.927e-02	4.195e-02	1.147e-02
6	-5.706e-02	-2.442e-02	-4.372e-03
7	-1.211e-01	-2.254e-02	-3.348e-03
8	-1.212e-01	-2.983e-04	8.483e-03
9	-8.969e-02	-2.456e-04	1.144e-02
10	-8.958e-02	-4.517e-02	1.162e-02
11	-5.692e-02	-1.928e-04	1.008e-02
12	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N (kN)**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
1	60.487	Compresión	-32.541	32.541	-118.320	-76.928
2	19.965	Compresión	-14.868	14.868	-53.162	8.557
3	19.965	Compresión	-35.679	35.679	-8.557	-98.481
4	-3.660	Tracción	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
5	-20.811	Tracción	0.000	-0.000	0.000	0.000
6	29.673	Compresión	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
7	-6.066	Tracción	22.719	-22.719	130.090	51.659
8	-18.830	Tracción	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
9	38.607	Compresión	17.769	-17.769	98.481	43.669
10	38.607	Compresión	-1.061	1.061	-43.669	35.178

#LaUISqueQueremos

SOLUCIÓN: EJERCICIO 3

FUERZAS INTERNAS

	Fuerza axial (kN)		Cortante (kN)		Momento (kN-m)	
Elem	**N (kN)**	**Tipo**	**Vi**	**Vf**	**Mi**	**Mf**
11	39.331	Compresión	-12.418	12.418	-2.077	-35.178
12	39.331	Compresión	-3.701	3.701	-13.179	2.077
13	-63.782	Tracción	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
14	8.718	Compresión	0.000	-0.000	0.000	0.000
15	52.885	Compresión	-0.000	0.000	-0.000	-0.000
16	-48.492	Tracción	-0.878	0.878	-51.659	44.638
17	71.939	Compresión	-39.885	9.885	-117.852	-31.459

#LaUISqueQueremos

Universidad Industrial de Santander

ANIVERSARIO UIS 1948 - 2026

¡Gracias!